Калининградский государственный технический университет

Пономарёв В. Ф.

Основы теории множеств

Калининград

2007

Калининградский государственный технический университет

Пономарёв В. Ф.

Основы теории множеств

Рекомендовано Ученым советом университета в качестве учебного пособия по разделу дисциплины «Дискретная математика» для студентов, обучающихся по специальностям:
230101.65 – Вычислительные машины, комплексы, системы и сети,
230102.65 – Автоматизированные системы обработки информации и управления,
351400 – Прикладная информатика (по экономике).

Калининград

2007

УДК 681.5
ББК 32.815

Пономарев В.Ф. Основы теории множеств. Учебное пособие.– Калининград: изд. КГТУ, 2007г., 95с.

Изложены основные понятия теории четких и нечётких конечных множеств, даны основы алгебры множеств и правил эквивалентных преобразований формул. Показано, что множество формул с заданными над ними операциями и отношениями формируют алгебраическую систему. Для закрепления знаний в разделе «Индивидуальные задания» приведены четыре расчетно-графические работы: доказать тождества двух формул, решить систему уравнений (поиск неизвестного множества), минимизировать формулы булевых функций, выполнить операции над нечёткими отношениями и определить их принадлежность к одному из классов.

Рецензенты: Профессор д.т.н. Колесников А.В., КГТУ,
Профессор д.п.н. Рудинский И. Д., КГТУ,
Доцент к.ф.-м.н. Мациевский С.В., РГУ им. И. Канта

Предисловие

Основное отличие дискретной математики от «классической» заключается в отсутствии понятий *предел*а, означающего, что «некоторая переменная … неограниченно приближается к какому-то постоянному значению» [10] и *непрерывности отображения* (функции), которая «зависит от того, как в самих множествах определены предельные соотношения» [10].

Основными объектами дискретной математики являются множества чисел или кодов, команд операционных систем или лексем языка программирования, графов или суждений математической логики и т.п. Эти объекты формируют состав какой-то системы, а отношения между ними – ее структуру. Следовательно, состав и структура таких систем представляют дискретную модель, для описания которой привлекается аппарат дискретной математики. Этот аппарат позволяет манипулировать сложно организованными нечисловыми структурами и разрабатывать алгоритмы и вычислительные методы. Так проблемы программирования привели к задачам обработки языковых структур, проблемы автоматизации проектирования – к задачам обработки графических объектов.

Учебное пособие включает в себя конспект лекций, задания на практические занятия и самостоятельную работу студентов по одному из разделов курса Дискретной математики. Учебное пособие состоит из шести глав.

Первые три главы раскрывают основные понятия теории множеств, правил отображения одного множества на другое и отношений между элементами одного множества. Первой особенностью глав является исследование и описание *конечных* множеств, отображений и отношений. Именно эти понятия формируют основу дискретных алгебраических систем. Второй особенность является описание и сравнение *четких* и *нечётки*х множеств. Если какой-либо элемент принадлежит множеству, то, традиционно, для *четких* множеств *характеристическая функция* (или *функция принадлежности*) принимает значение равное 1, а если не принадлежит – 0. *Нечёткие* множества, как правило, задаются нечёткими определениями: «большое (?) число», «высокая (?) температура», «низкое (?) давление» и т.п. Для нечётких множеств *характеристическая функция* (или *функция принадлежности*) принимает значения на интервале [0; 1], где 0 означает непринадлежность элемента множеству, а 1 – полную принадлежность. Промежуточные значения характеристической функции есть множество рациональных чисел.

В главе четвертой – Булева алгебра – даны определения «*унарной*» операции – *отрицание* и двух «*бинарных*» – *дизъюнкции* и *конъюнкции*, позволяющих описывать булевы функции формулам, выполнять их эквивалентные преобразования, нормализовать и оптимизировать структуру формул. Описаны основные свойства булевых функций: «*двойственности*», «*монотонности*», «*линейности*», «*сохранения аргумента*» и правила использования *функционально полных систем* для суперпозиции булевых функций двух булевых переменных аргумента при формировании функуций от *n* булевых переменных.

Совокупность булевых формул с заданными над ними булевыми алгебраическими операциями и отношениями называют *булевой алгебраической системой*. Множество булевых формул замкнуто и является *носителем* алгебраической системы, а множество операций и отношений – её *сигнатурой*.

В пятой и шестой главах даны определения и правила исполнения «*унарной операции*» – дополнения и двух «*бинарных*» – *объединение* и *пересечения* над чёткими и нечёткими множествами. Выражения, использующие описания множеств и символы основных алгебраических операций представляют формулы алгебры множеств. Показаны законы их эквивалентных преобразований и правила подстановки и замещения. Совокупность множеств с заданными над ними алгебраическими операциями и отношениями также называют *алгебраической системой*.

В разделе «Вопросы и задачи» по каждой главе дан минимальный набор задач, необходимый для закрепления учебного материала.

В разделе «Индивидуальные задания» приведены Расчетно-графические работы для самостоятельного изучения.

Глава 1. Множества

Понятие «*множество*» принадлежит к числу основных математических понятий и может быть объяснено только на примерах. Можно говорить о множестве цифр или букв, чисел или слов, таблиц или матриц, схем или рисунков, служебных символов или зарезервированных слов языка программирования, идентификаторов данных или кодов операций программы и т.п. Множество считается заданным, если указаны свойства, которыми обладают элементы множества. Например, «быть цифрой», «быть буквой», «быть числом», «быть словом», «быть служебным символом», « быть идентификатором данного», «быть кодом операции» и т.п.

Однако существуют множества, для которых принадлежность элемента множеству может быть заданы нечётко или приблизительно. Например, «*маленькое* число» (в каком диапазоне чисел: 1 – 50? или 1 – 500?), «*длинное* слово» (в каком диапазоне букв: 5 – 15? или 5 – 25?), «*большое* (?) входное сопротивление», «*высокая* (?) температура», «*большое* (?) число записей», «*большое* (?) число атрибутов» и т.п. Каждый эксперт, опираясь на собственный опыт, устанавливает для каждого элемента заданного диапазона различные значения характеристической функции принадлежности множеству и формирует различные конечные множества маленьких чисел или длинных слов, больших входных сопротивлений или малых скоростей вращения и т. п.

В настоящем пособии дано описание алгебраических систем для *конечных чётких множеств*, элементы которых объективно и четко заданы и включены в состав множества, и для *конечных нечётких множеств*, элементы которых субъективно и нечётко включены в состав множества. Такая классификация достаточно условна, но позволяет применять соответствующие математические методы.

1.1. Чёткие множества

На языках программирования задают типы данных: INTEGER –целые числа, CHAR – литеры (символы, знаки), STRING – строки, BOOLEAN – логические переменные и др. Так описывают при написании программ характерные свойства отдельных множеств.

Объекты, включаемые в множество, называют его *элементами*. Например, 3 - элемент INTEGER, *‘c’* - элемент CHAR , *‘monday’* – элемент STRING, *‘true’* – элемент BOOLEAN и т. п.

Общим обозначением множества служат фигурные скобки «{», «}», между которыми перечисляют его элементы.

Например, {1, 3, 5, 7} или {*‘a’*, *‘b’*, *‘c’*, *‘d’*}, или {‘иванов’, ‘петров’, ‘сидоров’} и т.п.

На языках программирования для обозначения множеств используют прямые скобки «[», «]», между которыми перечисляют его элементы.

Например, [1, 3, 5, 7] или [*‘a’*, *‘b’*, *‘c’*, *‘d’*], или [‘иванов’, ‘петров’, ‘сидоров’] и т.п.

Для обозначения множеств в тексте используют прописные буквы латинского алфавита A, B, C,..., X, Y, Z, а для обозначения его элементов - строчные буквы a, b, c,…, x, y, z. Иногда эти буквы используют с индексами из множества натуральных чисел. Например, A_1, A_2, A_3 или a_1, a_2, a_3.

При программировании <идентификатор множества> записывают в виде последовательности <букв> и/или <цифр>, начинающихся с прописной буквы, а <идентификатор_элемента> – в виде последовательности <букв> и/или <цифр>, начинающихся со строчной буквы.

Примечание: в угловых скобках «<…>» обозначают синтаксические переменные языка программирования.

Принадлежность элемента чёткому множеству обозначают символом принадлежности – $\in$. Например, $x\in X$, т.е. элемент x принадлежит множеству X. Если элемент не принадлежит множеству, то используют символ непринадлежности – $\notin$. Например, $x\notin X$, т.е. элемент x не принадлежит множеству X.

Порядок перечисления элементов между фигурными скобками произвольный, т.е. $\{'a', 'b', 'c', 'd'\}=\{'b', 'c', 'd', 'a'\}$, но многократная запись одного и того же элемента – не желательна, т. е. $\{'a', \cancel{'a'}, \cancel{'a'}, \cancel{'a'}, 'b', \cancel{'b'}, 'c', \cancel{'c'}, 'd'\}=\{'a','b','c','d'\}$.

При многократной записи одного и того же элемента множество называют *мультимножеством* и применяют особые методы анализа. В настоящем пособии мультимножества не рассматриваются

Множество, каждый элемент которого можно индексировать натуральным числом 1, 2,..., n, называют *счетным.* Если n конечно, то множество называют *конечным*. Например, множество цифр счетно и конечно, а множество целых чисел – счетно, но не конечно.

Мощность конечного счётного множества X есть число его элементов, которое обозначают так: $|X|=n$.

Например, мощность множества цифр равна 10, а мощность множества строчных букв латинского алфавита – 26. На языках программирования, как правило, число элементов множества указывают в диапазоне [1...n].

Пустое множество есть множество, не содержащее ни одного элемента, которое обозначают символом «$\varnothing$». Пустое множество является подмножеством любого множества.

Универсальное множество (или *универсум*) есть множество, содержащее все элементы, принимающих участие в решении определенного класса задач, которое обозначают символом «U».

Например, если в решении задач принимают участие два множества $A=\{'a', 'b'\}$ и $B=\{'b', 'c', 'd'\}$, то универсальное множество будет $U=\{'a', 'b', 'c', 'd'\}$ или если $A=\{('a', 'b', 'c'), ('b', 'c', 'd'), ('a', 'c', 'd')\}$ и $B=\{('b', 'a', 'd'), ('a', 'b', 'c'), ('c', 'b', 'd'), ('b', 'c', 'd'), ('b', 'c', 'a')\}$, то $U=\{('a', 'b', 'c'), ('b', 'c', 'd'), ('a', 'c', 'd'), ('b', 'a', 'd'), ('c', 'b', 'd'), ('b', 'c', 'a')\}$.

Примечание: Символьные константы выделяют в апострофах.

Описание множеств может быть выполнено:

– перечислением элементов между фигурными скобками,

– указанием характерных свойств элементов множества или *характеристической функции* множества,

– заданием порождающей процедуры.

При перечислении элементов между фигурными скобками указывают все элементы множества. Например, ЦИФРА={1, 2, 3, 4, 5, 6}, БУКВА={*‘a’*, *’b’*, *‘c’*, *‘d’*, *‘e'*, *f*}, ПРОДУКТЫ_ПИТАНИЯ={‘хлебобулочные_изделия’, ‘кондитерские_ изделия’, ‘молочные_продукты’, ‘напитки’, ‘фрукты’}.

При указании характерных свойств элементов множества после постановки открывающей фигурной скобки и указания имени текущего элемента $x\in X$’ ставят вертикальную черточку «|», вслед за которой *характеристической функцией* (*предикатом* –см. 2.1) – $P(x)$ описывают свойства, которыми должны обладать элементы формируемого множества X. Характеристическая функция для конкретного значения текущего элемента принимает только два значения: «истина» или «ложь». Если для *x=’a’* имеем *P*(*‘a’*) равно истине, то элемент *‘a’* включают в перечень элементов множества X, если лжи – не включают.

При задании порождающей процедуры после открывающей фигурной скобки и указания имени текущего элемента $x\in X$ ставят вертикальную черточку «|», вслед за которой записывают оператор присваивания «*x*:=<выражение>», значения которого включают в перечень элементов множества X.

Например, множество нечетных чисел можно задать порождающей процедурой: $A=\{x|\ x:=(2n-1)$, где $n=1, 2, 3,...\}$.

Включение множества A в множество B. Если все элементы множества A являются также элементами множества B, но не наоборот, то множество A включено в множество B. Для обозначения используют символ включения – $\subseteq$. Множество A называют подмножеством B. Так если $A=\{1, 2, 3\}$ и $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, то $A\subseteq B$ или если $A=\{(a, b, c), (b, c, d), (a, c, d)\}$ и $B=\{(a, c, d), (b, a, d), (a, b, c), (c, b, d), (b, c, d), (b, c, a)\}$, то $A\subseteq B$.

Если хотя бы один элемент множество A не принадлежит множеству B, то множество A не включено в множество B. Для этого в тексте используют символ невключения – $\not\subset$: $A\not\subset B$.

Например, если $A=\{1, 2, 3, 6\}$ и $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, то $A\not\subset B$ или если $A=\{(a, b, c), (b, c, d), (a, c, d)\}$ и $B=\{(b, a, d), (a, b, c), (c, b, d), (b, c, d), (b, c, a)\}$, то $A\not\subset B$.

Если $A\subseteq B$ и $A\neq B$, то A называют *собственным подмножеством* B и обозначают символом строгого включения – $\subset$. Например, если $A=\{1, 2, 3\}$ и $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, то $A\subset B$ или если $A=\{(a, b, c), (b, c, d), (a, c, d)\}$ и $B=\{(a, c, d), (b, a, d), (a, b, c), (c, b, d), (b, c, d), (b, c, a)\}$, то $A\subset B$.

Семейством называют множество, элементами которого являются только подмножества и обозначают символом $\Re$.

Так если A={*‘a’, ‘b’*}, B={*‘b’, ‘c’, ‘d’*}, C={ *‘a’, ‘b’, ‘c’, ‘d’*}, то

$\Re$={*A, B, C*}={{*‘a’, ‘b’*}, {*‘b’, ‘c’, ‘d’*}, { *‘a’, ‘b’, ‘c’, ‘d’*}}.

<u>Пример</u>. Даны множества $A=\{1, 2\}$ и $B=\{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$. Верно ли, что $\{1, 2\}\in\{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$?

Ответ: нет, неверно, так как среди элементов B нет элемента $\{1, 2\}$, но верным будет выражение $\{1, 2\}\subseteq\{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$, так как в множестве B есть два элемента 1 и 2, которые могут быть объединены в подмножество B и представлять множество A.

Булеан есть множество всех подмножеств универсального множества U, включающее пустое подмножество – $\varnothing$, одно–, двух– и т. д. до n–элементного подмножества, и обозначают $B_0(U)$. Число подмножеств мощности i определяется числом сочетаний элементов множества U по числу элементов формируемого подмножества i=0, 1, 2,…, n (см.[12]):

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\cdot(n-i)!}, \text{ где } i = 1,2,...,n. \qquad (1.2)$$

Мощность или число элементов $B_0(U)$ зависит от мощности универсального множества U и определяется по формуле:

$$|B_0(U)| = \mathbf{2}^{|U|}, \qquad (1.3)$$

где $|U|$ - мощность универсального множества.

Если $|U|=3$, то $|B_0(U)|=2^3=8$, если $|U|=5$, то $|B_0U)|=2^5=32$.

Пример. Дано $X=\{$*‘a’*, *‘b’*, *‘c’*, *‘d’*$\}$. Какие множества содержит булеан?

Ответ: Число подмножеств булеана равно $|B_0(4)| = 2^4 = 16$.

$B_0(|X|)=\{\varnothing;$

{*‘a’*}; {*‘b’*}; {*‘c’*}; {*‘d’*};
{*‘a’*, *‘b’*}; {*‘a’*, *‘c’*}; {*‘a’*, *‘d’*}; {*‘b’*, *‘c’*}; {*‘b’*, *‘d’*}; {*‘c’*, *‘d’*};
{*‘a’*, *‘b’*, *‘c’*}; {*‘a’*, *‘b’*, *‘d’*}; {*‘b’*, *‘c’*, *‘d’*}; {*‘a’*, *‘c’*, *‘d’*};
{*‘a’*, *‘b’*, *‘c’*, *‘d’*}}.

При программировании на Pascal’е булеан записывают так:

$B(|U|)$=set of (*‘a’*, *‘b’*, *‘c’*)=[[ ], [*‘a’*], [*‘b’*], [*‘c’*], [*‘a’*, *‘b’*], [*‘b’*, *‘c’*], [*‘a’*, *‘c’*], [*‘a’*, *‘b’*, *‘c’*]], где [ ] – пустое множество, [*‘a’*], [*‘b’*], [*‘c’*] – одноэлементные множества, [*‘a’*, *‘b’*], [*‘b’*, *‘c’*], [*‘a’*, *‘c’*] - двухэлементные множества, [*‘a’*, *‘b’*, *‘c’*] – универсальное множество.

Равенство множеств A и B. Если все элементы множества A являются элементами множества B и все элементы множества B являются элементами множества A, то множества A и B равны:

Иначе, если $A\subseteq B$ и $B\subseteq A$, то $A=B$. (1.1)

Если $A=\{1, 2, 3\}$ и $B=\{3, 2, 1\}$, то $A=B$ или если $A=\{(a, b, c), (b, c, d), (a, c, d)\}$ и $B=\{ (a, c, d), (b, c, d), (a, b, c)\}$, то $A=B$.

Прямое произведение множеств A и B. Если даны два множества A и B, то упорядоченную пару (x, y), где $x\in A$ и $y\in B$, называют *кортежем*, а множество всех кортежей (x, y) называют прямым произведением, т.е.

$$(A \otimes B) = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}, \qquad (1.4)$$

где «$\otimes$» – символ прямого произведения.

Если $A=\{$*‘a’*, *‘b’*, *‘c’*, *‘d’*, *‘e’*, *‘f’*, *‘g’*, *‘h’*$\}$ и $B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, то прямое произведение формирует 8·8=64 кортежа {(*‘a’*, 1), (*‘a’*, 2),..., (*‘h’*, 8)}. Это – описание шахматной доски, а при описании шахматной партии участвуют не все кортежи. Поэтому любое множество упорядоченных пар (x, y) при описании шахматной партии есть подмножество прямого произведения, т.е. $\{(x, y)|\ x \in A, y \in B\} \subseteq (A \otimes B)$.

Прямым произведением нескольких множеств $X_1, X_2,...,X_n$ называют множество всех кортежей длины n:

$$(X_1 \otimes X_2 \otimes ... \otimes X_n) = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1 \in X_1, {}_2 \in X_2, ..., x_n \in X_n\}. \qquad (1.5)$$

Каждый элемент кортежа x_i называют его *компонентой*, а в базах данных – *атрибутом*.

Следует обратить внимание, что компоненты x_i занимают в кортеже всегда заданное место, т.е кортеж есть упорядоченное множество компонент (атрибутов).

Если $X_1=X_2=...=X$, то любое множество кортежей $(x_1, x_2,..., x_n)$ есть подмножество прямого произведения:

$$\{(x_1, x_2, ..., x_n)\} \subseteq X^n. \qquad (1.6)$$

Для обозначения кортежа используют круглые скобки, а для замещения его в тексте – символ «t_i», т.е. $t_i=(x_1, x_2,..., x_n)$. Такое замещение активно используют при исполнении алгебраических операций в базах данных.

Если множество $X_i=\varnothing$, то $(X_1 \otimes X_2 \otimes ... \otimes X_i \otimes ... \otimes X_n)=\varnothing$.

Следует обратить внимание, что $\varnothing \neq \{\varnothing\}$, так как $|\varnothing|=0$, а $|\{\varnothing\}|=1$.

Число компонент кортежа определяет его длину или *ранг*:

$$|(x_1, x_2,..., x_n)|=n. \qquad (1.7)$$

Если известны $|X_1|=m_1$, $|X_2|=m_2$,...$|X_n|=m_n$, то мощность прямого произведения есть

$$|(X_1 \otimes X_2 \otimes ... \otimes X_n)|=m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_n. \qquad (1.8)$$

Кортежи, имеющие одинаковые имена компонент, одинаковое их число и одинаковый порядок следования в кортеже, называют *совместимыми кортежами*. Такие кортежи удобно описывать таблицами. Например, если дату в документах описывают кортежем (число. месяц. год), то при описании в таблице множества документов удобно выделить такую структуру совместимых кортежей.

Строка в языках программирования рассматривается как машинное представление кортежа. Для описания на языке программирования используют линейные списки:

```
type t=record
        element: data
        next:∧t
end.
```

1.2. Нечёткие множества

Часто при указании характерных свойств элементов множества используют нечеткое описание этих свойств. Например, «большое (?) входное сопротивление осциллографа», «малое (?) напряжение на базе транзистора», «постоянное (?) число оборотов двигателя», «большое (?) число записей в таблице», «большое (?) число атрибутов матрицы» и т.п.

Для решения задач при таком описании свойств элементов была предложена в середине XX века Л. Заде теория нечётких множеств (fuzzy sets).

Если дано четкое универсальное множество U и на этом множестве необходимо сформировать нечёткое подмножество X', то принадлежность каждого элемента $u_i \in U$ множеству X' может быть задана *функцией принадлежности* $\mu_X(u_i): U \to [0, 1]$, значение которой для каждого элемента $u_i \in U$ равно рациональному числу на интервале [0, 1]. Это значение называют *степенью принадлежности*.

Тогда нечёткое множество X' можно описать так:

$$X' = \{\mu_X(u_1)/u_1, \mu_X(u_2)/u_2, ..., \mu_X(u_n)/u_n\}, \quad (1.9)$$

где над символом «/» указывают степень принадлежности элемента $u_i \in U$ нечёткому множеству X', под символом «/» – имя элемента универсального множества – u_i, а апострофом помечают нечёткие множества «X'».

Носителем нечёткого множества является чёткое подмножество универсального множества, т. е. $X = \{u_1, u_2, ..., u_n\} \subseteq U$, для которых $0 < \mu_{X'}(u_i) \leq 1$.

Если $\mu_{X'}(u_i)=1$, то элемент u_i чётко принадлежит множеству X'. Если все элементы X' имеют значение $\mu_{X'}(u_i)=1$, то задано чёткое подмножество множества U.

Если $\mu_{X'}(u_i)=0$, то элемент чётко не принадлежит множеству X'. Если все элементы X' имеют значение $\mu_{X'}(u_i)=0$, то задано чёткое пустое множество.

Пример. Дано множество натуральных чисел $U=\{1, 2, 3,\ldots, 50\}$. Сформировать нечёткое множество $X'=\{x| P(x)$:– «маленькое число»$\}$.

Эксперт сформировал нечёткое множество так:

X'(«маленькое число»)={1/1, 0,8/2, 0,6/3, 0,4/4, 0,2/5},

где над символом «/» – степень принадлежности натурального числа, указанного под знаком «/». Все остальные числа в диапазоне [6–50] имеют, по мнению эксперта, степень принадлежности равной 0. Носителем нечёткого множества является множество чисел X= {1, 2, 3, 4, 5}.

В теории нечётких множеств есть операция *концетрации функции принадлежности*, в результате которой степень принадлежности для каждого элемента вычисляют по формуле:

$$\mu_{CON}(x_i) = [\mu_{X'}(x_i)]^2.$$

При исполнении такой операции используют, как правило, лингвистическую переменную «очень».

Для данного примера X'(«очень маленькое число»)={1/1, 0,64/2, 0,36/3, 0,16/4, 0,04/5}. Обратите внимание, носителем этого множества является множество чисел X= {1, 2, 3, 4}.

Пример. Дано 10 дискет, эксперт должен сформировать множество подмножеств, удовлетворяющих условию «взять несколько дискет» без указания имени дискеты и её содержимого. Множество всех подмножеств этих дискет содержит пустое множество, одно-, двух- трех- и т.д. до десятиэлементного подмножества. Так задано универсальное множество $U=\{\varnothing, 1, 2, \ldots, 10\}$.

Для множеств, содержащих одну, две, половину или все дискеты, эксперт определил значение степени принадлежности равной нулю. По его мнению, проще сказать: «взять половина дискет», «…две дискеты» или «…все дискеты». Для множеств, содержащих три, восемь или девять дискет, эксперт определил значение степени принадлежности равной 0,6, а для множеств, содержащих четыре, шесть или семь дискет, – 0,8. Так эксперт сформировал нечеткое множество X'(«взять несколько дискет»)=$\{0{,}4/3, 0{,}6/4, 0{,}8/6, 0{,}8/7, 0{,}6/8, 0{,}4/9\}$. Такой была субъективная оценка высказывания «взять несколько дискет». Носителем этого множества является четкое подмножество $X=\{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$.

Пример. Дан электрический двигатель. Пусть скорость вращения двигателя изменяется в пределах от 0 до 3150 об/мин.

Таблица 1.1

Скорость (об/мин)	Степень принадлежности			
	Нулевая	Маленькая	Средняя	Большая
0	1	0	0	0
450	0,33	0,33	0	0
900	0	1	0	0
1350	0	0,33	0,33	0
1800	0	0	1	0
2250	0	0	0,33	0,33
2700	0	0	0	1
3150	0	0	0	1

Эксперт, на основе собственного опыта, должен сформировать четыре нечётких подмножества на дискретном универсуме: X'_1(«нулевая»), X'_2(«маленькая»), X'_3(«средняя») и X'_4(«большая»). Так как понятия «нулевая…», «маленькая…», «средняя…» и «большая…» не имеют числовой оценки, то эксперт разбил весь диапазон скоростей на восемь поддиапазонов, установил два уровня принадлежности – 0,33 и 1,00 и составил таблицу 1.1.

Анализ таблицы показывает:

– X'_1 («нулевая…»)=$\{I/0,\ 0{,}33/450\}$. Эксперт установил, что этому понятию соответствуют скорости вращения в диапазоне 0 – 450 об/мин.. Степень принадлежности для скорости 0 об/мин. он установил равной 1, для 450 об/мин. – 0,33, а для других диапазонов – 0.

– X'_2 («маленькая…»)=$\{0{,}33/450,\ 1/900,\ 0{,}33/1350\}$. Эксперт установил, что этому понятию соответствуют скорости вращения в диапазоне 450 – 1350 об/мин.. Степень принадлежности для скорости 900 об/мин. он установил равной 1, для 450 об/мин. и 1350 об/мин. – 0,33, а для других диапазонов – 0.

– X'_3 («средняя…»)=$\{0{,}33/1350,\ 1/1800,\ 0{,}33/2250\}$. Эксперт установил соответствие скоростей вращения этому понятию в диапазоне 1350 – 2250 об/мин.. Степень принадлежности для скорости 1800 об/мин. он установил равной 1, для 1350 об/мин. и 2250 об/мин. – 0,33, а для других диапазонов – 0.

– X'_4 («большая…»)=$\{0{,}33/2250,\ 1/2700,\ 1/3150\}$. Эксперт установил, что этому понятию соответствуют скорости вращения в диапазоне 2250 – 3150 об/мин. Степень принадлежности для скоростей 2700 об/мин. и 3150 об/мин. он установил равной 1, для 2250 об/мин. – 0,33, а для других диапазонов – 0.

В приведенных примерах даны субъективные оценки эксперта о степени принадлежности нечётким множествам элементов универсального множества.

Мощность нечёткого конечного множества равна сумме степеней принадлежности элементов этого множества, т.е.

$$|X'(u)|=\sum_{i=1}^{n}\mu_{X'}(x_i). \tag{1.9a}$$

Пример. Дано нечёткое множество $X'=\{1/1,\ 0{,}8/2,\ 0{,}6/3,\ 0{,}4/4,\ 0{,}2/5\}$. Чему равна мощность данного множества?

Ответ: $|X'(u)|=1+0{,}8+0{,}6+0{,}4+0{,}2=3$.

Нечёткое включение нечёткого множества A' в нечёткое множество B' определяется **с**тепенью включения каждого элемента $u_i \in U$ множеств A' и B': «если $0<\mu_{A'}(u_i)\le\mu_{B'}(u_i)$, то $u_i \in U$ нечётко принадлежит нечёткому множеству B'».

Степень нечёткого включения нечёткого множества A' в нечёткое множество B' определяется формулой [7]:

$$\begin{aligned}\mu(A'\sqsubseteq B')&=\underset{i}{\&}(\mu_{A'}(u_i)\to\mu_{B'}(u_i))=\underset{i}{\&}(\mu_{\overline{A'}}(u_i)\vee\mu_{B'}(u_i))=\\&=\min_i\{\max\{(1-\mu_{A'}(u_i)),\ \mu_{B'}(u_i)\}\},\end{aligned} \tag{1.10}$$

где «$\sqsubseteq$» – символ нечёткого включения, «$\to$» – символ операции импликации, «$\vee$» – – дизъюнкции, «$\underset{i}{\&}$» – – конъюнкции по каждому элементу $u_i \in U$.

Если $\mu(A'\sqsubseteq B')\ge 0{,}5$, то нечёткое множество A' нечётко включено в нечёткое множество B'.

<u>Пример.</u> Даны $U=\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, $A'=\{0{,}3/u_2,\ 0{,}6/u_3,\ 0{,}4/u_5\}$ и $B'=\{0{,}8/u_1,\ 0{,}5/u_2,\ 0{,}7/u_3,\ 0{,}6/u_5\}$. Определить $\mu(A'\sqsubseteq B')$ и $\mu(B'\sqsubseteq A')$.

$\mu(A'\sqsubseteq B')=\min\limits_i\{\max\{0{,}7/u_2,\ \ 0{,}5/u_2\},\ \ \max\{0{,}4/u_3,\ \ 0{,}7/u_3\},\ \ \max\{0{,}6/u_5,\ 0{,}6/u_5\}\}=\min\{0{,}7/u_2,\ 0{,}7/u_3,\ 0{,}6/u_5\}=0{,}6$.

$\mu(B'\sqsubseteq A')=0$, так как для всех u_i не выполняется условие $0<\mu_{B'}(u_i)\le\mu_{A'}(u_i)$.

Ответ: нечёткое множество A' нечётко включено в нечёткое множество B', а нечёткое множество B' не включено в нечёткое множество A'.

Нечёткое равенство нечётких множеств A' и B' определяется степенями нечёткого включения $\mu(A'\sqsubseteq B')$ и $\mu(B'\sqsubseteq A')$ [7]. Если t_{1i} нечётко принадлежит A', то он нечётко принадлежит B' и если t_{2i} нечётко принадлежит B', то он нечётко принадлежит A':

$$\mu(A' \cong B') = \underset{i}{\&}(\mu_{A'}(u_i) \leftrightarrow \mu_{B'}(u_i)) = \underset{i}{\&}(\mu_{A'}(u_i) \to \mu_{B'}(u_i))\&(\mu_{B'}(u_i) \to \mu_{A'}(u_i)) =$$
$$\underset{i}{\&}(\mu_{\overline{A'}}(u_i) \vee \mu_{B'}(u_i))\&(\mu_{\overline{B'}}(u_i) \vee \mu_{A'}(u_i)) = \qquad (1.11)$$
$$\min_i\{\min\{\max\{(1-\mu_{A'}(u_i)),\ \mu_{B'}(u_i)\},\ \max\{(1-\mu_{B'}(u_i)),\ \mu_{A'}(u_i)\}\}\},$$

где «$\cong$» – символ нечёткого равенства множеств, «$\leftrightarrow$» – символ операции эквивалентности, «$\to$» – – импликации, «$\vee$» – – дизъюнкции, «$\underset{i}{\&}$» – – конъюнкции по каждому элементу $u_i \in U$.

Если $\mu(A' \cong B') \geq 0{,}5$, то нечёткие множества A' и B' нечётко равны между собой.

Пример. Даны $U=\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, $A'=\{0{,}8/u_2, 0{,}6/u_3, 0{,}1/u_5\}$ и $B'=\{0{,}3/u_1, 0{,}6/u_2, 0{,}7/u_3, 0{,}2/u_4, 0{,}3/u_5\}$. Определить $\mu(A' \tilde{=} B')$.

$\mu(A' \tilde{=} B') = \min_i \{\min\{\max\{0{,}2/u_2, 0{,}6/u_2\}, \max\{0{,}8/u_2, 0{,}4/u_2\}\}, \min\{\max\{0{,}4/u_3, 0{,}7/u_3\}, \max\{0{,}6/u_3, 0{,}3/u_3\}\}, \min\{\max\{0{,}9/u_5, 0{,}3/u_5\}, \max\{0{,}1/u_5, 0{,}7/u_5\}\} = \min_i\{\min\{0{,}6/u_2, 0{,}8/u_2\}, \min\{0{,}7/u_3, 0{,}6/u_3\}, \min\{0{,}9/u_5\ о{,}7/u_5\}\} = \min_i\{0{,}6/u_2, 0{,}6/u_3, 0{,}7/u_5\} = 0{,}6$.

Ответ: нечёткое множество A' нечётко равно нечёткому множеству B'.

Семейством нечётких множеств называют множество $\mathfrak{R}'$, при условии:

$$\begin{aligned} &A'_1, A'_2, \ldots A'_n \in \mathfrak{R}', \\ &\bigcup_i A_i \subseteq U, \\ &A'_i \cap A'_j \cong \varnothing, \\ &A'_i \not\cong \varnothing, \text{ где } 1 \leq i \leq n. \end{aligned} \qquad (1.12)$$

Пример. Дано универсальное множество $U=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ и три нечётких подмножества $A'_1=\{0{,}3/x_1, 0{,}1/x_2, 0{,}8/x_3, 0{,}2/x_4, 1{,}0/x_5\}$, $A'_2=\{0{,}8/x_1, 0{,}6/x_3, 0{,}4/x_5\}$, $A'_3=\{0{,}6/x_2, 0{,}8/x_4\}$. Описать семейство подмножеств.

Ответ: $\mathfrak{R}'(U) = \{\{0{,}3/x_1, 0{,}1/x_2, 0{,}8/x_3, 0{,}2/x_4, 1{,}0/x_5\}, \{0{,}8/x_1, 0{,}6/x_3, 0{,}4/x_5\}, \{0{,}6/x_2, 0{,}8/x_4\}\}$. Носителем семейства нечётких множеств являются все элементы универсального множества.

Нечёткое прямое произведение $(A' \otimes B')$. Если даны два нечётких множества $A'=\{\mu_{A'}(x)/x \in U\}$ и $B'=\{\mu_{B'}(y)/y \in U\}$, то упорядоченную пару (x, y), где $x \in A'$ и $y \in B'$ называют нечётким кортежем.

Множество всех нечётких кортежей (x, y) называют *нечётким прямым произведением нечётких множеств*:

$$C'=(A' \otimes B') = \{\mu_{A' \otimes B'}(x, y)/(x,y) \mid x \in A', y \in B'\}. \qquad (1.13)$$

Степень принадлежности нечёткого кортежа – $\mu_{\{A' \otimes B'\}}(x, y)$ определяется степенью принадлежности элементов $u_i \in U$ множествам A' и B' при исполнении операции конъюнкции, то есть имеет минимальное значение степеней принадлежности $\mu_{A'}(x)$ и $\mu_{B'}(y)$:

$$\mu_{\{A' \otimes B'\}} = \mu_{A'}(x) \,\&\, \mu_{B'}(y) = \min\{\mu_{A'}(x), \mu_{B'}(y)\}, \qquad (1.14)$$

где «⊗» – символ прямого произведения.

Пример. Даны универсальное множество $U=\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9\}$ и два нечетких множества: $A'=\{0{,}6/ u_1, 0{,}4/ u_2, 0{,}8/ u_3 ,0{,}2/ u_4, 1{,}0/ u_5, 0{,}3/ u_6\}$ и $B'=\{0{,}9/ u_1, 0{,}4/ u_2, 1{,}0/ u_3, 0{,}7/ u_7, 0{,}3/ u_8, 0{,}5/ u_9\}$. Вычислить нечёткое прямое произведение этих множеств.

Ниже представлены расчеты для элементов главной диагонали матрицы нечёткого прямого произведения A' и B':

$$\mu_{\{A,B\}} = \{\min\{\mu_{A'}(u_1),\mu_{B'}(u_1)\}/(u_1;u_1),\min\{\mu_{A'}(u_2),\mu_{B'}(u_2)\}/(u_2;u_2),$$
$$\min\{\mu_{A'}(u_3),\mu_{B'}(u_3)/(u_3;u_3)\},\min\{\mu_{A'}(u_4),\mu_{B'}(u_7)\}/(u_4;u_7),$$
$$\min\{\mu_{A'}(u_5),\mu_{B'}(u_8)\}/(u_5;u_8),\min\{\mu_{A'}(u_6),\mu_{B'}(u_9)\}/(u_6;u_9)\} =$$
$$=\{\min\{0{,}6;\ 0{,}9\}/(u_1;u_1),\min\{0{,}4;\ 0{,}4)\}/(u_2;u_2),\min\{0{,}8;\ 1\}/(u_3;u_3),$$
$$\min\{0{,}2;\ 0{,}7\}/(u_4;u_7),\min\{1;\ 0,\ 3\}/(u_5;u_8),\min\{0{,}3;\ 0{,}5\}/(u_6;u_9)\} =$$
$$=\{0,\ 6/(u_1;u_1);\ 0,\ 4/(u_2;u_2);\ 0{,}8/(u_3;u_3);\ 0{,}2/(u_4;u_7);\ 0{,}3/(u_5;u_8);\ 0{,}3/(u_6;u_9)\}.$$

Ответ: результаты расчетов приведены в табл. 1.2. Строки матрицы – элементы нечёткого множества A', а столбцы – B'.

Таблица 1.2

$C'=(A'\otimes B')$	u_1	u_2	u_3	u_7	u_8	u_9
u_1	0,6	0,4	0,6	0,6	0,3	0,5
u_1	0,4	0,4	0,4	0,4	0,3	0,4
u_3	0,8	0,4	0,8	0,7	0,3	0,5
u_4	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
u_5	0,9	0,4	1,0	0,7	0,3	0,5
u_6	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3

Глава 2. Соответствия, отображения и функции

Если даны два множества (A и B) и каждому элементу $x\in A$ по некоторому правилу сопоставлены элементы $y\in B$, то формируется множество пар (x, y), как подмножество прямого произведения A и B:

$$h=\{(x, y)|\ x \in A\ , y \in B\} \subseteq (A \otimes B). \qquad (2.1)$$

Следует обратить внимание, что на первом месте пары находится элемент $x\in A$, а на втором – $y\in B$, т.е. задан порядок записи элементов на множестве пар. Упорядоченную пару (x, y) не следует путать с множеством $\{x, y\}$.

Оператор такого сопоставления записывают так:

$$h: A \to B.$$

Множество A называют *областью отправления*, а множество B – *областью прибытия*. Эти множества могут иметь различную физическую природу. Так на рис. 2.1 область отправления есть A={*‘a’*, *‘b’*, *‘c’*, *‘d’*, *‘e’*, *‘f’*}, а область прибытия – $B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Множество проекций $\pi_1(x, y)$ на первую компоненту кортежа формирует *область определения* $A^0=\{\pi_1(x, y)\}$={*‘a’*, *‘b’*, *‘c’*, *‘d’*, ‘f’}$\subseteq A$, а на вторую – *область значений* $B^0=\{\pi_2(x, y)\}=\{1, 2, 4, 5, 6\}\subseteq B$ (см. рис. 2.1).

Элемент $y_j \in B^0$ называют *образом* элемента $x_i \in A^0$, а элемент $x_i \in A^0$ – *прообразом* элемента $y_j \in B^0$.

Если область определения дана на нескольких множествах X_i, т.е. $h = \{(x_1, x_2, ..., x_n, y) | \; x_i \in X_i, y \in Y\} \subseteq ((X_1 \otimes X_2 \otimes ... \otimes X_n) \otimes Y)$, то $y_j \in Y^0$ является образом для упорядоченного кортежа $(x_{1i}, x_{2i}, ..., x_{ni}) \in (X_1 \otimes X_2 \otimes ... \otimes X_n)$, а упорядоченный кортеж $(x_{1i}, x_{2i}, ..., x_{ni})$ – прообразом для $y_j \in Y^0$.

Оператор такого сопоставления записывают так:

$h : X^n \to Y$).

Мощность сопоставления не больше мощности прямого произведения:

$$|h| \leq |(A \otimes B)| \text{ или } |h| \leq |((X_1 \otimes X_2 \otimes ... \otimes X_n) \otimes Y)| \qquad (2.2)$$

Такие операторы принято называть *соответствиями* или *отображениями*, которые описывают:

– списками $\{(x, y)\}$ или $\{(x_1, x_2, ..., x_n, y)\}$,

– ориентированными графами с множеством вершин $\{A \cup B\}$ или $\{X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n \cup Y\}$ и множеством дуг $\{(x, y)\}$ или $\{(x_1, x_2, ..., x_n, y)\}$,

– матрицами инциденции, строки которых есть $\{t_i\}$, а столбцы – компоненты кортежа: $y, x_1, x_2, ..., x_n$.

Строки таблиц или матриц есть кортежи, имеющие одинаковую длину и одинаковые имена компонент кортежа, т.е они совместимы. Каждый кортеж может быть замещен символом $t_i = (x_1, x_2, ..., x_n, y)$.

Соответствия или отображения также могут быть четкими и нечеткими.

2.1. Чёткие соответствия, отображения и функции

Если при сопоставлении $h : A \to B$ хотя бы для одного элемента $x \in A$ существует несколько образов y множества B, т.е. $\{y\} \subseteq B$, то такое сопоставление называют *соответствием*.

Например, а) двуязычные словари, когда словам одного языка (множество A) соответствуют несколько слов другого языка (множество B): *capacity* – способность, мощность, емкость, *array* – массив, таблица, расположение, *scanner* - лексический анализатор, устройство для ввода изображений и т. д. б) база данных автоматизированного рабочего места содержит множество атрибутов X_i и создается набор программ Y, реализующий вычисления по заданным значениям атрибутов; какой-то атрибут $x_i \in X_i$ необходимо сопоставить подмножеству программ $\{y\} \subseteq Y$, в) группа программистов (Иванов, Петров, Сидоров) – множество X – разрабатывают четыре программных модуля (n_1, n_2, n_3, n_4,) – множество Y; каждый из программистов принимает участие в разработке двух модулей: (Иванов, n_1), (Иванов, n_2), (Петров, n_1), (Петров, n_3), (Сидоров, n_2), (Сидоров, n_4).

Сопоставление двух множеств, когда одному прообразу $x \in A$ или $(x_1, x_2, ..., x_n) \in (X_1 \otimes X_2 \otimes ... \otimes X_n)$ могут быть сопоставлены два или более образов $\{y\} \subseteq B$ называют соответствием.

На рис. 2.1 показано ориентированным графом соответствие, так как существуют пары (c, 1), (c, 6), (d, 4), (d, 5), у которых одному прообразу соответствуют по два образа. Это соответствие может быть описано перечислением упорядоченных пар:

$$h=\{(a,2),(b,1),(c,1),(c,6),(d,4),(d,5),(f,5)|$$
$$a,b,c,d\ e,f\in A;\ 1,2,3,4,5,6\in B\}\subseteq(A\otimes B)$$

или матрицей инциденции (см. табл. 2.1).

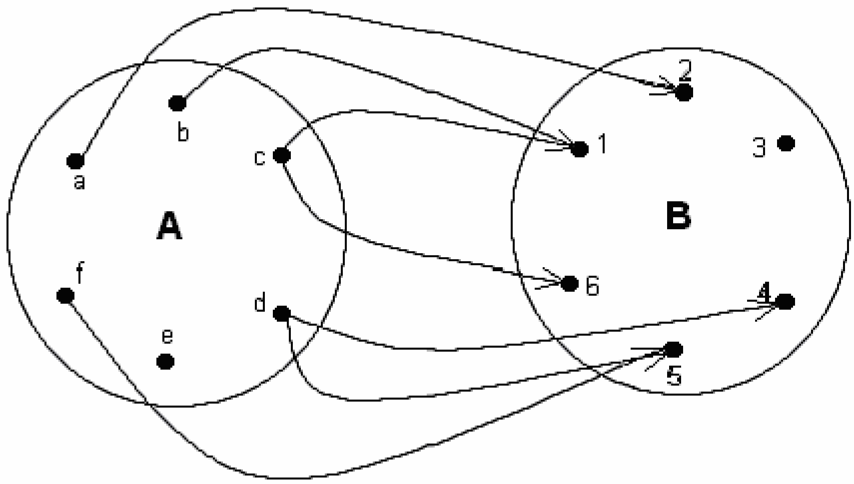


Рис. 2.1. Соответствие множеств A и B

Таблица 2.1

Дуги графа	Вершины графа											
	вершины – прообразы						вершины – образы					
	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	1	2	3	4	5	6
(*a*, 2)	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
(*b*, 1)	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
(*c*, 1)	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
(*c*, 6)	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
(*d*, 4)	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
(*d*, 5)	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
(*f*, 5)	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0

Если при $h: A\to B$ для каждого элемента $x_i\in A$ существует единственный образ $y_j\in B$, то такое сопоставление называют *отображением*.

Например, а) в компьютере каждая буква, цифра или символ находят отображение в уникальной 8-битовой кодовой комбинации: «*F*»:=01000110,…, «*s*»:=01110011,…, «Ф»:=11000100,…, «я»:=11001111,…, «5»:=00110101,…, «+»:=00101011,…, «&»:=00100110,…, «{»:=01111011 и т.п.; б) в базе данных существует некоторое множество атрибутов, необходимых для вычисления по одной программе, т.е. $\{(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_i)|\ x_1, x_2,\ldots, x_m\in A, y_i\in B\}$.

Функцией называют отображение, заданное, как правило, на числовых множествах A и B. В тексте ее обозначают строчными буквами латиницы $f(x)$ или $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ с указанием нижним индексом исполняемой операции.

Например, f_+=(4, 5, 9) есть 9=4+5, f_+=(2, 7, 9) есть 9=2+7, f_+=(6, 3, 9) есть 9=6+3.

Логической функцией (или *предикатом*) называют функцию, аргументами которой являются переменные и предметные постоянные. При подстановке вместо переменных предметных постоянных ($x_i=a_i$) предикат становится высказыванием и принимает значение «истина» или «ложь» (1 или 0). В тексте предикат обозначают прописными буквами латиницы $P_i(x)$ или $P_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Например, если на множестве целых чисел задать логическую функцию $P_1(x)$:=«x – простое число», $P_2(x_i, x_j)$:=«x_i и x_j имеют общий делитель», $P_3(f_+(x_i, x_j), x_k)$:=«x_k больше суммы x_i и x_j», то для x_1=3, x_2=4 и x_3=8 имеем $P_1(3)$=«истина», $P_1(4)$=«ложь», $P_1(8)$=«ложь», $P_2(3, 4)$=«ложь», $P_2(3, 8)$=«ложь», $P_2(4, 8)$=«истина», $P_3(f_+(3, 4), 8)$=«истина». Значения логической функции удобно описывать двухмерными булевыми таблицами, где каждая клеточка содержит «1», если выполняется логическое условие, и «0» в противном случае.

Таблица 2.2

$P_2(x_i, x_j)$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	0	1	0	1	0	1
3	1	0	1	0	0	1	0	0
4	1	1	0	1	0	1	0	1
5	1	0	0	0	1	0	0	0
6	1	1	1	1	0	1	0	1
7	1	0	0	0	0	0	1	0
8	1	1	0	1	0	1	0	1

Например, для логической функции $P_2(x_i, x_j)$ см. табл. 2.2.

Обратное отображение может быть задано обратным оператором

$h^{-1}: Y \to X^n$ или $h^{-1}=\{(y, x_1, x_2, \ldots, x) | x_i \in X, y \in Y\} \subseteq (Y \otimes X^n)$.

Такое отображение удобно использовать в реляционных базах данных (см. табл. 2.3). В «шапке» таблицы указывают для каждого *поля* имя соответствующего *атрибута* - $I_y, I_{x1}, I_{x2}, \ldots, I_{xn}$, а в «теле таблицы» записывают их значения. Строка таблицы называется *записью*.

Таблица 2.3

h^{-1}	I_y	I_{x1}	I_{x2}	...	I_{xn}
	y_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}
	y_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}
	...	...		...	...
	y_m	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mn}

Например, в табл. 2.4 дан фрагмент «Журнала заказов…», где уникальный *код* клиента – y позволяет найти *запись* – ($y_i, x_{1i}, x_{2i}, ,,,, x_{ni}$), содержащую нужные для исполнения заказа *атрибуты* – x_i.

Таблица 2.4

Код	Клиент	Дата	…	Город	…	Индекс	…
1032	Bolido	10-ноя	…	Мадрид	…	28023	…
…	…	…	…	…	…	…	…
1083	Ber-	16-фев	…	Лулео	…	S-958	…
…	…	…	…	…	…	…	…
1085	Blauer	27-фев	…	Ман-	…	68306	…
…	…	…	…	…	…	…	…

Включение отображения h_1 *в отображение* h_2. Если все кортежи $t^1=(x_1, x_2,..., x_n, y) \in h_1$ являются кортежами $t^2=(x_1, x_2,..., x_n, y) \in h_2$, но не наоборот, то отображение h_1 включено в отбражение h_2, т.е. $h_1 \subseteq h_2$. Для этого кортежи h_1 и h_2 должны быть совместимыми по числу и именам компонент (атрибутов).

Пример. Даны отображения h_1 и h_2. Доказать $h_1 \subseteq h_2$.

Таблица 2.5

h_1	y_1	x_{11}	x_{12}
	a_2	b_2	20
	a_3	b_3	30
	a_1	b_1	10

h_2	y_1	x_{11}	x_{12}
	a_1	b_1	10
	a_6	b_3	35
	a_2	b_2	20
	a_5	b_4	30
	a_3	b_3	30
	a_4	b_3	25

Ответ: $h_1 \subseteq h_2$, так как все кортежи отображения h_1 есть в h_2, но не наоборот (см. табл. 2.5).

Равенство отображений h_1 и h_2. Если все кортежи отображения h_1 принадлежат отображению h_2 и все кортежи h_2 принадлежат h_1, то если все кортежи отображения h_1 принадлежат отображению h_2 и все кортежи h_2 принадлежат h_1, то $h_1=h_2$.

Пример. Даны отображения h_1 и h_2. Доказать $h_1=h_2$.

Таблица 2.6*a*

h_1	y_1	x_{11}	x_{12}	y_2	x_{21}	x_{22}
	a_1	b_1	10	c_1	d_1	15
	a_2	b_2	20	c_1	d_1	15
	a_4	b_3	25	c_2	d_2	25
	a_5	b_4	30	c_1	d_1	15
	a_3	b_3	30	c_3	d_3	35

=

Таблица 2.6*b*

h_2	y_1	x_{11}	x_{12}	y_2	x_{21}	x_{22}
	a_3	b_3	30	c_3	d_3	35
	a_2	b_2	20	c_1	d_1	15
	a_5	b_4	30	c_1	d_1	15
	a_1	b_1	10	c_1	d_1	15
	a_4	b_3	25	c_2	d_2	25

Ответ: $h_1=h_2$, так как все кортежи отображения h_1 есть в h_2 и наоборот все кортежи h_2 есть в h_1 (см.табл. 2.6).

Прямое произведение отображений ($h_1 \otimes h_2$). Если даны два отображения h_1 и h_2, то в результате присоединения справа к каждому кортежу h_1 каждого кортежа h_2 формируются кортежи нового отображения h (см. табл. 2.7:

$$h=(h_1 \otimes h_2)=\{(y_1, x_{11},..., x_{1n}, y_2, x_{21},..., x_{2n}) | y \in (Y_1 \cup Y_2), x_{1i} \in X_1, x_{2j} \in X_2\}. \quad (2.3)$$

Число строк прямого произведения h_1 и h_2 равно произведению числа кортежей первого и второго отображений, а число столбцов – сумме числа компонент кортежей первого и второго отображений.

Компьютерная запись прямого произведения имеет вид:

h=product(h_1, h_2), где h_1, h_2 –отображения.

Пример: Даны отображения h_1 и h_2 (см табл. 2.7a и b). Найти $h=(h_1 \otimes h_2)$.

Таблица 2.7a

h_1	y_1	x_{11}	x_{12}
	a_1	b_1	10
	a_2	b_2	20
	a_3	b_3	30

$\otimes$

Таблица 2.7b

h_2	y_2	x_{21}	x_{22}
	c_1	d_1	15
	c_2	d_2	25
	c_3	d_3	35

=

Таблица 2.7c

h	y_1	x_{11}	x_{12}	y_2	x_{21}	x_{22}
	a_1	b_1	10	c_1	d_1	15
	a_1	b_1	10	c_2	d_2	25
	a_1	b_1	10	c_3	d_3	35
	a_2	b_2	20	c_1	d_1	15
	a_2	b_2	20	c_2	d_2	25
	a_2	b_2	20	c_3	d_3	35
	$a3$	b_3	30	c_1	d_1	15
	$a3$	b_3	30	c_2	d_2	25
	$a3$	b_3	30	c_3	d_3	35

Ответ: $h=(h_1 \otimes h_2)$ (см. табл. 2.7c).

2.2. Нечёткие соответствия, отображения и функции

Если на носителях нечетких множеств A и B нечётко определены пары прямого произведения $(x_i, y_j) \in A \otimes B$, то говорят, что дана *функция принадлежности* $\mu_{h'}(x_i, y_j)$ пары (x_i, y_j) нечёткому соответствию или нечёткому отображению:

$$h' : A \xrightarrow{\mu} B, \tag{2.4}$$

$$h' = \{\mu_{h'}(x_i, y_j)/(x_i, y_j) \mid x_i \in A, y_j \in B\}, \tag{2.5}$$

где над знаком «/» записывают значение степени принадлежности нечёткому соответствию или отображению h' пары (x_i, y_j), указанной под знаком «/».

Степенью принадлежности каждой пары называют значение функции принадлежности $\mu_{h'}(x_i, y_j)$.

Нечёткое соответствие – это когда одному прообразу x_i нечётко соответствуют несколько образов y_j с ненулевыми степенями принадлежности $\mu(x_i, y_{j1})$, $\mu(x_i, y_{j2})$,…, $\mu(x_i, y_{jn})$.

На том же примере с двуязычными словарями это можно объяснить так: степень принадлежности образа определяется содержанием переводимого текста и местом в этом тексте прообраза, т. е. перевод слова зависит от контекста.

Пример. Даны чёткие множества $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $Y=\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ и нечёткое соответствие $h=\{0{,}2/(x_1, y_2);\ 0{,}4/(x_1, y_3);\ 0{,}3/(x_1, y_5);\ 0{,}6/(x_2, y_2);\ 0{,}7/(x_2, y_5);\ 1/(x_3, y_2);\ 0{,}6/(x_4, y_3);\ 0{,}2/(x_4, y_5);\ 0{,}1/(x_5, y_1),\ 0{,}8/(x_5, y_4)\}$.

Матрица инцидентности представлена табл. 2.8, а граф – рис 2.2.

Таблица 2.8

h'	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0	0,2	0,4	0	0,3
x_2	0	0,6	0	0	0,7
x_3	0	1	0	0	0
x_4	0	0	0,6	0	0,2
x_5	0,1	0	0	0,8	0

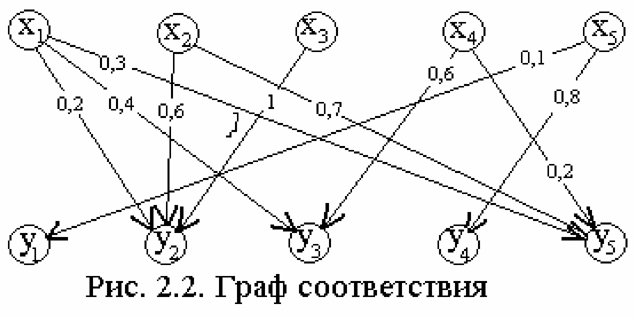


Рис. 2.2. Граф соответствия

Нечёткое отображение – это $h' = \{\mu_{h'}(x_i, y_j)/(x_i, y_j) \mid x_i \in A, y_j \in B\}$, когда каждому прообразу x_i нечётко соответствует единственный образ y_j со степенью принадлежности $\mu(x_i, y_j)$.

Нечёткие соответствия и отображения также можно описывать списками, матрицами или ориентированными графами. При списочном описании указывают степень принадлежности $\mu(x_i, y_j)$ каждой пары $x_i \in A$ и $y_j \in B$, т.е. $h' = \{\mu_{h'}(x_i, y_j)/(x_i, y_j) \mid x_i \in A, y_j \in B\}$. При матричном описании используют матрицы инцидентности, построенные на множествах $x \in A$ и $y \in B$, в каждую клеточку которой записывают $\mu_{h'}(x_i, y_j)$ для соответствующей пары (x_i, y_j). При графовом описании на соответствующих дугах указывают значение $\mu_{h'}(x_i, y_j)$.

Пример. В пределах региона необходимо разместить двенадцать магазинов розничной торговли $X=\{x_1, \ldots, x_{12}\}$, представляющих четыре фирмы оптовой торговли $Z = \{ z_1, \ldots, z_4 \}$.

Для оценивания структуры размещения магазинов эксперты опросили население региона и установили, что наибольший интерес имеют такие признаки: «доступность магазина» (y_1), «высокое качество товара» (y_2), «высокий уровень обслуживания» (y_3) и «низкие цены» (y_4). То есть экспертами принято множество признаков, влияющих на расположение магазинов $Y=\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$.

Эксперты, обсуждая с руководителями магазинов и фирм организацию торговли, установили их нечеткое понимание значимости того или иного признака.

Таблица 2.9

h'_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1	0	0	0
x_2	0	1	0	0
x_3	0	0	1	0
x_4	0	0	0	1
x_5	1	1	1	1
x_6	0,8	0,4	0,5	0,9
x_7	0,7	0,3	0,4	0,8
x_8	0,5	0,8	0,8	0,2
x_9	0,5	0,5	0,5	0,5
x_{10}	0,6	0,7	0,8	0,5
x_{11}	0,1	0,1	0,1	0,1
x_{12}	0	0	1	1

Пусть учет мнений руководителей магазинов по избранным признакам представлен в табл. 2.9 отображением $h_1' : X \xrightarrow{\mu} Y$.

Тогда график нечёткого отображения или нечёткой оценки значимости каждого признака каждым руководителем магазина есть

$$h'_1=\{\mu_h(x_i, y_1)/(x_i, y_1), \mu_h(x_i, y_2)/(x_i, y_2), \mu_h(x_i, y_3)/(x_i, y_3), \mu_h(x_i, y_4)/(x_i, y_4)\}. \quad (2.6)$$

Например, $h'_1(x_6)=\{0,8/y_1; 0,4/y_2; 0,5/y_3; 0,9/y_4\}$.

На рис. 2.3. представлен граф нечёткой оценки значимости того или иного признака руководителями магазинов.

По признаку y_1(«доступность магазина») мнения руководителей магазинов сформировали нечеткое множество:

$$X'(y_1)=\{1,0/x_1, 1,0/x_5, 0,8/x_6, 0,7/x_7, 0,5/x_8, 0,5/x_9, 0,6/x_{10}, 0,1/x_{11}\}, \quad (2.7)$$

а по признаку y_3(«высокий уровень обслуживания») другое нечёткое множество: $X'(y_3)=\{1,0/x_3, 1,0/x_5, 0,5/x_6, 0,4/x_7, 0,8/x_8, 0,5/x_9, 0,8/x_{10}, 0,1/x_{11}, 1/x_{12}\}$.

Анализ табл. 2.9 позволяет выявить наиболее значимые признаки для каждого руководителя магазина. Пусть оценка мнений руководителей фирм $h'_2 : Y \xleftarrow{\mu} Z$ представлена в табл. 2.10.

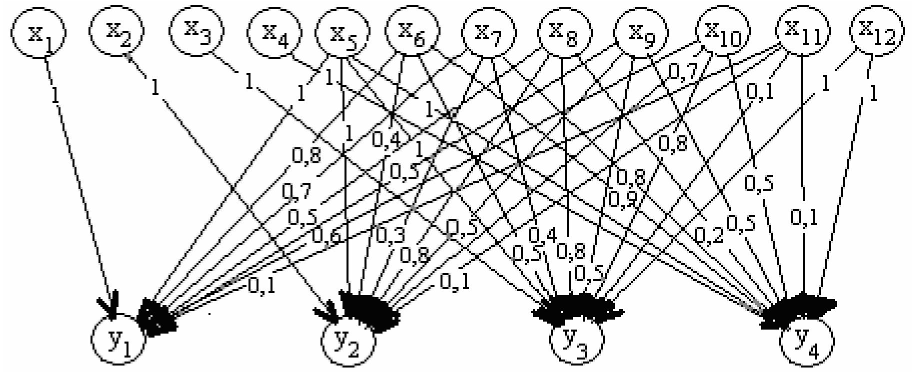


Рис. 2.3. Граф нечёткой оценки значимости признака

Тогда график нечёткого отображения или нечёткой оценки значимости каждого признака каждым руководителем фирмы есть

$$h'_2=\{\mu_h(y_1,z_j)/(y_1,z_j),\ \mu_h(y_2,z_j)/(y_2,z_j),\ \mu_h(y_3,z_j)/(y_3,z_j),\ \mu_h(y_4,z_j)/(y_4,z_j)\}. \quad (2.8)$$

Таблица 2.10

h'_2	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0,9	0,1	0,5	0,7
y_2	0,5	0,9	0,6	0,6
y_3	0,4	0,9	0,5	0,4
y_4	0,8	0,1	0,5	0,6

Например, $h'_2(z_2)=\{0{,}1/y_1;\ 0{,}9/y_2;\ 0{,}9/y_3;\ 0{,}1/y_4\}$ или $h'(z_4)=\{0,\ 7/y_1,\ 0{,}6/y_2,\ 0{,}4/y_3,\ 0{,}6/y_4\}$.

Мнения руководителей фирм по признаку y_1(«доступность магазина») сформировали нечёткое множество: $Z'(y_1)=\{0{,}9/z_1,\ 0{,}1/z_2,\ 0{,}5/z_3,\ 0{,}7/z_4\}$.

Для выбора структуры размещения магазинов в заданном регионе необходимо согласовать оценки руководителей фирм и магазинов и установить порог значимости этого согласия. О выполнении этой задачи см. с.78.

Нечёткое включение нечёткого отображения h'_1 в нечёткое отображение h'_2 определяется **с**тепенью включения каждой пары (x_i,y_j) каждого кортежа, нечётко принадлежащих h'_1 и h'_2, в исполнение операции импликации. Если (x_i, y_j) нечётко принадлежит h'_1 и $0<\mu_{h'1}(x_i, y_j)<\mu_{h'2}(x_i, y_j)$, то он нечётко принадлежит h'_2:

$$\mu(h'_1 \subseteq h'_2)=\underset{i}{\&}(\&(\mu_{h'_1}(x_i,y_j)\rightarrow\mu_{h'_2}(x_i,y_j)))=\underset{i}{\&}(\&(\mu_{\bar{h}'_1}(x_i,y_j)\vee\mu_{h'_2}(x_i,y_j))= \\ \min_i\{\min\{\max\{(1-\mu_{h'_1}(x_i,y_j),\ \mu_{h'_2}(x_i,y_j)\}\}\}. \quad (2.\ 9)$$

Если $\mu(h'_1 \subseteq h'_2)\geq 0{,}5$ то нечёткое отображения h'_1 нечётко включено в нечёткое отображение h'_2 .

<u>Пример</u>. Даны два нечётких отображения h'_1 и h'_2 (см. табл. 2.11*a* и 2.11*b*). Выполняется ли нечёткое включение $(h'_1 \subseteq h'_2)$?

Таблица 2.11*a*

h_1	y_1	y_2	y_3
x_1	0,2	0,1	0,3
x_2	0,1	0,4	0,3
x_3	0,4	0,3	0,2
x_4	0,2	0,5	0,3

Таблица 2.11*b*

h_2	y_1	y_2	y_3
x_1	0,7	0,6	0,5
x_2	0,6	0,5	0,4
x_3	0,9	0,6	0,8
x_4	0,8	0,7	0,5

$$\mu(h_1^{'}\tilde{\subseteq}h_2^{'})=\min\{\min_{x1}\{\max_{y1}\{(1-\mu_{h_1^{'}}(x_1,y_1)),\mu_{h_2^{'}}(x_1,y_1)\},\max_{y2}\{(1-\mu_{h_1^{'}}(x_1,y_2)),\mu_{h_2^{'}}(x_1,y_2)\},$$
$$\max_{y3}\{(1-\mu_{h_1^{'}}(x_1,y_3)),\mu_{h_2^{'}}(x_1,y_3)\}\},\ \min_{x2}\{\max_{y1}\{(1-\mu_{h_1^{'}}(x_2,y_1)),\mu_{h_2^{'}}(x_2,y_1)\},\ \max_{y2}\{(1-\mu_{h_1^{'}}(x_2,y_2)),$$
$$\mu_{h_2^{'}}(x_2,y_2)\},\ \max_{y3}\{(1-\mu_{h_1^{'}}(x_2,y_3)),\mu_{h_2^{'}}(x_2,y_3)\}\},\min_{x3}\{\max_{y1}\{(1-\mu_{h_1^{'}}(x_3,y_1)),\mu_{h_2^{'}}(x_3,y_1)\},$$
$$\max_{y2}\{(1-\mu_{h_1^{'}}(x_3,y_2)),\mu_{h_2^{'}}(x_3,y_2)\},\ \max_{y3}\{(1-\mu_{h_1^{'}}(x_3,y_3)),\mu_{h_2^{'}}(x_3,y_3)\}\},\ \min_{x4}\{\max_{y1}\{(1-\mu_{h_1^{'}}(x_4,y_1)),$$
$$\mu_{h_2^{'}}(x_4,y_1)\},\ \max_{y2}\{(1-\mu_{h_1^{'}}(x_4,y_2)),\mu_{h_2^{'}}(x_4,y_2)\},\max_{y3}\{(1-\mu_{h_1^{'}}(x_4,y_3)),\mu_{h_2^{'}}(x_4,y_3)\}\}=$$
$$=\min\{\min_{x1}\{\max\{0{,}8;0{,}7\},\max\{0{,}9;0{,}6\},\max\{0{,}7;0{,}5\}\},\min_{x2}\{\max\{0{,}9;0{,}6\},\max\{0{,}6;0{,}5\},$$
$$\max\{0{,}7;0{,}4\}\},\min_{x3}\{\max\{0{,}6;0{,}9\},\max\{0{,}7,0{,}6\},\max\{0{,}8;0{,}8\}\},\ \min_{x4}\{\max\{0{,}8;0{,}8\},$$
$$\{\max\{0{,}5;0{,}7\},\ \max\{0{,}7;0{,}5\}\}=\min\{\min_{x1}\{0{,}8;0{,}9;0{,}7\},\ \min_{x2}\{0{,}9;0{,}6;0{,}7\},\min_{x3}\{0{,}9;0{,}7;0{,}8\},$$
$$\min_{x4}\{0{,}8;0{,}7;0{,}7\}=\min\{0{,}9;0{,}9;0{,}9;0{,}8\}=0{,}8.$$

Ответ: Да, нечёткое отображение h'_1 нечётко включено в нечёткое отображение h'_2, так как $\mu(h_1^{'}\tilde{\subseteq}h_2^{'})=0{,}8$.

Нечёткое равенство нечётких отображений h'_1 и h'_2 определяется степенью нечёткого равенства каждой пары (x_i, y_j) каждого кортежа, принадлежащих h'_1 и h'_2, в исполнение операции эквивалентности. Если (x_i,y_j) нечётко принадлежит h'_1, то он нечётко принадлежит h'_2 и, наоборот, если (x_i,y_j) нечётко принадлежит h'_2, то он нечётко принадлежит h'_1:

$$\mu(h_1^{'}\cong h_2^{'})=\underset{i}{\&}((\mu_{h_1^{'}}(x_i,y_j)\leftrightarrow\mu_{h_2^{'}}(x_i,y_j)))=\underset{i}{\&}((\mu_{h_1^{'}}(x_i,y_j)\rightarrow\mu_{h_2^{'}}(x_i,y_j))\underset{j}{\&}$$
$$(\mu_{h_2^{'}}(x_i,y_j)\rightarrow\mu_{h_1^{'}}(x_i,y_j)))=\underset{i}{\&}(\mu_{\overline{h_1^{'}}}(x_i,y_j)\vee\mu_{B'}(x_i,y_j))\underset{j}{\&}(\mu_{\overline{h_2^{'}}}(x_i,y_j)\vee\mu_{h_1^{'}}(x_i,y_j))= \quad (2.10)$$
$$\min_i\{\min_j\{\max\{(1-\mu_{h1'}(x_i,y_j)),\mu_{h2'}(x_i,y_j)\},\max\{(1-\mu_{h2'}(x_i,y_j)),\mu_{h1'}(x_i,y_j)\}\}\}.$$

Если $\mu(h_1^{'}\cong h_2^{'})\geq 0{,}5$ то нечёткое отображения h'_1 нечетко равно нечёткому отображению h'_2 .

<u>Пример</u>. Даны два нечётких отображения h'_1 и h'_2 (см. табл. 2.12*a* и 2.12*b*). Выполняется ли нечёткое равенство $(h_1^{'}\cong h_2^{'})$?

Таблица 2.12*a*

h_1	y_1	y_2	y_3
x_1	0,2	0,1	0,3
x_2	0,1	0,4	0,3
x_3	0,4	0,3	0,8
x_4	0,8	0,6	0,4

Таблица 2.12*b*

h_2	y_1	y_2	y_3
x_1	0,7	0,6	0,6
x_2	0,6	0,3	0,4
x_3	0,2	0,6	0,8
x_4	0,8	0,7	0,5

$$\mu(h_1' \cong h_2')=\min\{\min_{x1}\{\max_{y1}\{(1-\mu_{h_1'}(x_1, y_1), \mu_{h_2'}(x_1, y_1)\}, \max_{y2}\{(1-\mu_{h_1'}(x_1, y_2), \mu_{h_2'}(x_1, y_2)\},$$
$$\max_{y3}\{(1-\mu_{h_1'}(x_1, y_3), \mu_{h_2'}(x_1, y_3)\}\}, \min_{x1}\{\max_{y1}\{(1-\mu_{h_2'}(x_1, y_1), \mu_{h_1'}(x_1, y_1)\}, \max_{y2}\{(1-\mu_{h_2'}(x_1, y_2),$$
$$\max_{y3}\{0{,}6,\ 0{,}3\}\}, \min_{x3}\{\max_{y1}\{0{,}6,\ 0{,}2\}, \max_{y2}\{0{,}7,\ 0{,}6\}, \max_{y3}\{0{,}2,\ 0,\ 8)\}\}, \min_{x3}\{\max_{y1}\{0{,}8,\ 0{,}4\},$$
$$\{0{,}4,\ 0{,}3\}, \max_{y3}\{0{,}2,\ 0{,}8\}\}, \min_{x4}\{\max_{y1}\{0{,}2,\ 0{,}8\}, \max_{y2}\{0{,}4,\ 0{,}7\}, \max_{y3}\{0{,}6,\ 0{,}5\}\}, \min_{x4}\{\max_{y1}\{0{,}2,\ 0{,}8\},$$
$$\max_{y2}\{0{,}3,\ 0{,}6\}, \max_{y3}\{0{,}5,\ 0{,}4\}\}\}=\min\{\min_{x1}\{0{,}8,\ 0{,}9,\ 0{,}7\}, \min_{x1}\{0{,}3,\ 0{,}4,\ 0{,}4\}, \min_{x2}\{0{,}9,\ 0{,}6,\ 0{,}7\},$$
$$\min_{x2}\{0{,}4,\ 0{,}7,\ 0{,}6\}, \min_{x3}\{0{,}6,\ 0{,}7,\ 0{,}8\}, \min_{x3}\{0{,}8,\ 0{,}4,\ 0{,}8\}, \min_{x4}\{0{,}8,\ 0{,}7,\ 0{,}6\}, \min_{x4}\{0{,}8,\ 0{,}6,\ 0{,}5\}\}=$$
$$\min\{0{,}7,\ 0{,}3,\ 0{,}6,\ 0{,}4,\ 0{,}6,\ 0{,}4,\ 0{,}6,\ 0{,}5\}=0{,}3.$$

Ответ: нет, не выполняется нечёткое равенство отображений h'_1 и h'_2.

Глава 3. Отношения

Можно говорить об отношениях между числами – $\Theta_1=\{=, \neq, \geq, >, \subseteq, \subset, \not\subset, \rightarrow \leftrightarrow, \cong, \cancel{\cong}, \tilde{\geq}, \tilde{>},, \tilde{\subseteq}, \tilde{\subset}, \tilde{\not\subset}, \tilde{\rightarrow}, \tilde{\leftrightarrow}\}$ – и «лингвистическими переменными» – Θ_2 ={«…быть причиной…», «…быть следствием…», «…быть частью…», «…быть родственником…», «…быть родителем…», «…быть начальником…», «…быть старшим по званию…», «…находится рядом…», и т. п.}. Например, ‘двигатель’<тип>«быть_частью»‘автомашина’<тип> или ‘судно’<имя> «находится_рядом»‘причал’<номер> и т.п.

Отношения, даже между математическими объектами, могут быть чётким (strong relations) – $\Theta_{11}=\{=, \neq, \geq, >, \subseteq, \subset, \not\subset, \rightarrow \leftrightarrow\}$ и нечёткими (fuzzy relations) – $\Theta_{12}=\{\cong, \cancel{\cong}, \tilde{\geq}, \tilde{>}, \tilde{\subseteq}, \tilde{\subset}, \tilde{\not\subset}, \tilde{\rightarrow}, \tilde{\leftrightarrow}\}$.

3.1. Чёткие отношения

Кортежи, сформированные на элементах одного множества, называют отношением и обозначают r: X→X или r: X^{n-1}→X.

Иначе, отношение есть множество совместимых кортежей:

$$r=\{(x_i, x_j) \mid x_i, x_j \in X\} \subseteq (X \otimes X)=X^2 \text{ или}$$

$$r=\{(x_i, x_j, \ldots x_n) \mid x_i, x_j, \ldots, x_n \in X\} \subseteq (X^{n-1} \otimes X)=X^n.$$

Отношения можно описать с помощью списков, матриц смежности или графов.

Если r: U→X, то отношение называют *унарным*. Такое отношение позволяет выделить на заданном универсальном множестве U подмножество X с заданными свойствами с помощью предиката $P(x)$.

Например, если дано универсальное множество U={1, 2,…, 20} и дан предикат $P(x)$:=«x – простое число», то будет сформировано подмножество простых чисел X={2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}$\subseteq U$. Если на универсальном множестве U задан оператор r: X→X, то отношение называют *бинарным* или двухместным. Такое отношение позволяет устанавливать отношения между двумя элементами одного множества X. Бинарные отношения чаще всего описывают двухмерными булевыми матрицами (X⊗X), элементы которых есть:

$$r(x_i, x_j) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad (x_i, x_j) \in r, \\ 0, & \text{если} \quad (x_i, x_j) \notin r. \end{cases} \tag{3.1}$$

Если r: $X^{n-1} \to X$, то отношение называют *n-арным* или n-местным.

Пример. Даны множество $U=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ и предикат $P_2(x_i, x_j)$:= «x_i имеет общий делитель с x_j». Найти множество пар, удовлетворяющих условию предиката.

Ответ: Список бинарного отношения по заданному предикату $P_2(x_i, x_j)$ есть: $r_2(x_i, x_j)=\{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 3), (3, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (4, 8), (5, 5), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 6), (6, 8), (8, 2), (8, 4), (8, 6), (8, 8)\}$.

Таблица 3.1

r	2	3	4	5	6	7	8
2	1	0	1	0	1	0	1
3	0	1	0	0	1	0	0
4	1	0	1	0	1	0	1
5	0	0	0	1	0	0	0
6	1	1	1	0	1	0	1
7	0	0	0	0	0	1	0
8	1	0	1	0	1	0	1

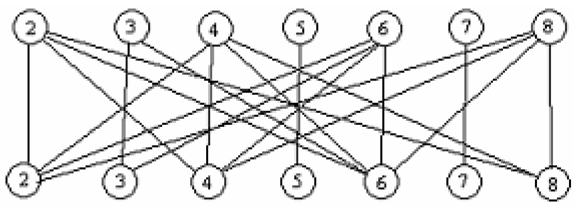


Рис. 3.1. Граф $P_2(x_i, x_j)$:="имеет общий делитель"

Матрица смежности данного бинарного отношения представлена табл. 3.1, а граф рис. 3.1.

Пример. Между пунктами a, b, c, d, e есть транспортная сеть (см. рис. 3.2). Бинарные отношения между пунктами сети изображены в табл. 3.2.

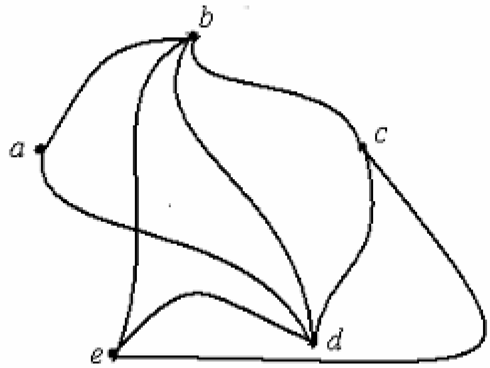


Рис. 3.2. Транспортная сеть

Таблица 3.2

r	a	b	c	d	e
a	0	1	0	1	0
b	1	0	1	1	1
c	0	1	0	1	1
d	1	1	1	0	1
e	0	1	1	1	0

Включение отношения r_1 *в отношение* r_2. Если все $(x_i, x_j) \in r_1$ равны $(x_i, x_j) \in r_2$, но существуют $(x_t, x_s) \in r_2$ не равные $(x_t, x_s) \in r_1$, то отношение r_1 включено в отношение r_2, т.е. ($r_1 \subseteq r_2$).

Пример. Даны r_1 и r_2 (см. табл. 3.3*a* и 3.3*b*). Включено ли r_1 в r_2?

Таблица 3.3*a*

r_1	x_3	x_2	x_5
x_3	0	1	1
x_2	1	0	1
x_5	1	1	0

Таблица 3.3*b*

r_2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	1	0	1	0
x_2	1	0	1	1	1
x_3	0	1	0	1	1
x_4	1	1	1	0	1
x_5	0	1	1	1	0

Ответ: Да, включено, так как каждая $(x_i, x_j) \in r_1$ равна $(x_i, x_j) \in r_2$, но существуют $(x_t, x_s) \in r_2$, не равные $(x_t, x_s) \in r_1$.

Равенство отношений r_1 и r_2. Если даны отношения r_1 и r_2, у которых все $(x_i, x_j) \in r_1$ равны $(x_i, x_j) \in r_2$, т.е. $r_1 \subseteq r_2$, и все $(x_i, x_j) \in r_2$ равны $(x_i, x_j) \in r_1$, т.е. $r_1 \subseteq r_2$, то отношения r_1 и r_2 равны, т.е. ($r_1 = r_2$).

Пример. Даны r_1 и r_2 (см. табл. 3.4*a* и 3.4*b*). Равны ли отношения r_1 и r_2?

Таблица 3.4*a*

r_1	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1
x_5	0	1	1	1	0
x_4	1	1	1	0	1
x_3	0	1	0	1	1
x_2	1	0	1	1	1
x_1	0	1	0	1	0

Таблица 3.4*b*

r_2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	1	0	1	0
x_2	1	0	1	1	1
x_3	0	1	0	1	1
x_4	1	1	1	0	1
x_5	0	1	1	1	0

Ответ: Да, равны, так как каждая $(x_i, x_j) \in r_1$ и $(x_i, x_j) \in r_2$ имеют одинаковые значения для r_1 и r_2 . В результате перестановок строк и столбцов одного из отношений можно сформировать одинаковый вид матриц.

Прямое произведение отношений r_1 и r_2. Если даны отношения r_1 и r_2 то их прямое произведение есть отношение:

$$r=(r_1 \otimes r_2)=\{((x_{1i}, x_{2k}), (x_{1k}, x_{2j}))|\ x_{1i}, x_{1k} \in X_1 \text{ и } x_{2k}, x_{2j} \in X_2\},$$

носителем которого является множество пар $(x_{1i}, x_{2j}) \in (X_1 \otimes X_2)$, а отношения между каждой парой вершин выполняется по условию:

$$r((x_{1i}, x_{2k}), (x_{1k}, x_{2j}))=\begin{cases} 1, \text{ если } r_1(x_{1i}, x_{1k})=1 \text{ и } r_2((x_{2k}, x_{2j})=1, \\ 0, \text{ если } r_1(x_{1i}, x_{1k})=0 \text{ или } r_2((x_{2k}, x_{2j})=0, \end{cases} \quad (3.2)$$

т.е. отношение между каждой парой вершин прямого произведения равно 1 тогда и только тогда, когда $r_1(x_{1i}, x_{1k})=1$ и $r_2((x_{2k}, x_{2j})=1$.

Оператор прямого произведения есть r=product(r_1, r_2).

Пример. Даны r_1 и r_2 (см. табл. 3.5*a* и 3,5*b*). Найти $r=(r_1 \otimes r_2)$.

Для удобства оформления результирующей матрицы введем обозначения: $x_1=(x_{11}, x_{21})$, $x_2=(x_{11}, x_{22})$, $x_3=(x_{11}, x_{23})$, $x_4=(x_{12}, x_{21})$, $x_5=(x_{12}, x_{22})$, $x_6=(x_{12}, x_{23})$, $x_7=(x_{13}, x_{21})$, $x_8=(x_{13}, x_{22})$, $x_9=(x_{13}, x_{23})$.

Таблица 3.5*a*

r_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}
x_{11}	1	0	1
x_{12}	0	1	0
x_{13}	1	0	1

$\otimes$

Таблица 3.5*b*

r_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}
x_{21}	0	1	0
x_{22}	1	0	1
x_{23}	0	1	0

=

Таблица 3.5*c*

r	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_1	0	1	0	0	0	0	0	1	0
x_2	1	0	1	0	0	0	1	0	1
x_3	0	1	0	0	0	0	0	1	0
x_4	0	0	0	0	1	0	0	0	0
x_5	0	0	0	1	0	1	0	0	0
x_6	0	0	0	0	1	0	0	0	0
x_7	0	1	0	0	0	0	0	1	0
x_8	1	0	1	0	0	0	1	0	1
x_9	0	1	0	0	0	0	0	1	0

Ответ: в табл. 3.5*c* приведены результаты вычислений по формуле (3.2).

Свойства бинарных отношений, наличие которых позволяет формировать классы отношений:

отношение рефлексивно, если для каждого $x_i \in X$ имеем $r(x_i, x_i)=1$; такими отношениями являются «=», «$\leftrightarrow$», «быть изоморфным» и т.п.; при матричном задании такого отношения на главной диагонали должны быть только 1;

отношение антирефлексивно, если для каждого $x_i \in X$ имеем $r(x_i, x_i)=0$; такими отношениями являются «>», «<», «быть частью», «быть родителем» и т.п.; при матричном задании такого отношения на главной диагонали должны быть только 0;

отношение симметрично, если для любой пары $(x_i, x_j) \in r$ при $i \neq j$ имеем $r(x_i, x_i)=r(x_j, x_i)$; такими отношениями являются «=», «≠», «$\leftrightarrow$», «...быть родственником…» и т.п.; при матричном задании такого отношения симметрично относительно главной диагонали расположены 1 и 0;

отношение антисимметрично, если для любой $(x_i, x_j) \in r$ при $i \neq j$ имеем $r(x_i, x_i) \neq r(x_j, x_i)$, а при $i=j$ имеем $r(x_i, x_i)=1$; такими отношениями являются «≥», «≤»; при матричном задании такого отношения несимметрично относительно главной диагонали расположены 1 и 0, а на главной диагонали – 1;

отношение асимметрично, если для любой $(x_i, x_j) \in r$ при $i \neq j$ имеем $r(x_i, x_i) \neq r(x_j, x_i)$, а при $i=j$ имеем $r(x_i, x_i)=0$; такими отношениями являются «>», «<», «...быть частью...» и т.п.; если отношение асимметрично, то оно антирефлексивно, при матричном задании такого отношения несимметрично относительно главной диагонали должны быть 1 и 0, а на главной диагонали – 0;

отношение транзитивно, если для любых $x_i, x_j, x_k \in X$ выполняется условие: если $r(x_i, x_j)=1$, $r(x_j, x_k)=1$, то $r(x_i, x_k)=1$; такими отношениями являются «>», «<», «быть родственником» и т.п.

Классы отношений. Наличие различных сочетаний свойств позволяют группировать отношения в классы. Наиболее изученными являются классы отношений эквивалентности, частичного и строгого порядка.

Класс эквивалентности формируют отношения, удовлетворяющие условиям рефлексивности, симметричности и транзитивности**.** Такими отношениями являются «=», «$\leftrightarrow$», «быть изоморфным», «быть родственником» и т.п. Отношения, входящие в класс эквивалентности обозначают $r_{\sim}$ или $\sim(x_i, x_i)$. Эти отношения позволяют выделять на универсальном множестве U подмножества X_α, эквивалентных образцу $x_{\alpha i}$, т.е.

$$X_\alpha = \{x | \, r_{\sim}(x, x_{\alpha i})=1\} \subseteq U.$$

Если отношение на множестве U рефлексивно, симметрично и транзитивно, то существует разбиение множества U на подмножества – классы эквивалентности – по образцу данного класса – $x_{\alpha i}$, т.е. $U=\{X_{\alpha 1}, X_{\alpha 2},..., X_{\alpha k}\}$ при исполнении условий:

$$\begin{cases} X_{\alpha i} \cap X_{\alpha j} = \varnothing \ \text{для } i \neq j; \\ \bigcup_{i=1}^{i=k} X_{\alpha i} = U; \\ X_{\alpha i} \neq \varnothing \ \text{для } 1 \leq i \leq k. \end{cases} \tag{3.3}$$

Отношение эквивалентности при работе на компъютере представляет особый интерес, так как оно ассоциируется с различными алгоритмами, дающими один и тот же результат в обработке одних и тех же данных.

Класс отношений частичного порядка формируют отношения, удовлетворяющие условиям рефлексивности, антисимметричности и транзитивности. Такими отношениями являются «$\leq$», «$\subseteq$», «быть не меньше», «быть не старше» и т.п. Отношение частичного порядка элементов множества обозначают $r_{\leq}$ или $\leq(x_i, x_i)$, а подмножеств множества – $r_{\subseteq}$ или $\subseteq(X_i, X_j)$.

Пример. Даны множества U={1, 2, 3, 4, 5, 6}, X_1={1, 2, 3, 4}, X_2={2, 3, 4, 5}, X_3={2, 3, 4}, X_4={3, 4, 5}, X_5={2, 3}, X_6={3, 4}, X_7={4, 5}, X_8={2, 4}. Какой между ними может быть установлен порядок?

Анализ следует начинать с множеств, имеющих наименьшее число элементов. Тогда $X_8 \subseteq X_3 \subseteq X_2 \subseteq U$ или $X_8 \subseteq X_3 \subseteq X_1 \subseteq U$, $X_7 \subseteq X_4 \subseteq X_2 \subseteq U$, $X_6 \subseteq X_4 \subseteq X_2 \subseteq U$ или $X_6 \subseteq X_3 \subseteq X_2 \subseteq U$ или $X_6 \subseteq X_3 \subseteq X_1 \subseteq U$, $X_5 \subseteq X_3 \subseteq X_2 \subseteq U$, $X_5 \subseteq X_3 \subseteq X_1 \subseteq U$.

Ответ: так установлен частичный порядок на множестве подмножеств.

Класс отношений строго порядка формируют отношения, удовлетворяющее условиям антирефлексивности, асимметричности и транзитивности. Такими отношениями являются «<», «$\subset$», «…быть родителем...», «…быть частью…», «…быть подчиненным…» и т.п. Отношение строгого порядка элементов множества обозначают через $r_{<}$ или $<(x_i, x_i)$, а подмножеств множества через $r_{\subset}$ или $\subset(X_i, X_j)$. Примерами строгого порядка являются целые числа, упорядоченные правилом n=(n+1), или буквы, упорядоченные алфавитом.

Грани множества. Если на универсальном множестве U дано множество X, между элементами которого установлен частичный или строгий порядок, т.е. $\leq\{x_i, x_j\}$ или $<(x_i, x_i)$, то найдется такой элемент x_α, для которого выполняется условие $\leq\{x_i, x_\alpha\}$ или $<\{x_i, x_\alpha\}$, для любого $x_i \in X$ и найдется такой элемент x_β, для которого выполняется условие $\leq\{x_\beta, x_i\}$ или $<\{x_\beta, x_i\}$ для любого $x_i \in X$.

Наименьший элемент из нескольких x_α формирует *верхнюю грань* упорядоченного множества X:

$$\min\{x_\alpha\}=\mathrm{Sup}X, \tag{3.4}$$

а *наибольший элемент* из нескольких x_β формирует *нижнюю грань* упорядоченного множества X:

$$\max\{x_\beta\}=\mathrm{Inf}\,X. \tag{3.5}$$

Если на булеане универсального множества $B_0(U)$ задано множество подмножеств $X=\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, между которыми установлен частичный или строгий порядок, т.е. $\subseteq(X_i, X_j)$ или $\subset(X_i, X_j)$, то найдется такое X_α, для которого выполняется условие $\subseteq(X_i, X_\alpha)$ или $\subset(X_i, X_\alpha)$ для любого $X_i \subseteq X$, и найдется такое X_β, для которого выполняется условие $\subseteq(X_\beta, X_j)$ или $\subset(X_\beta, X_j)$ для любого $X_i \subseteq X$.

Наименьший элемент из нескольких X_α формирует *верхнюю грань* упорядоченного множества X:

$$\min\{X_\alpha\}=\text{Sup}X,$$

а *наибольший элемент* из нескольких X_β формирует ***нижнюю грань*** упорядоченного множества X:

$$\max\{X_\beta\}=\text{Inf}\,X.$$

Для строго упорядоченных множеств наибольший и наименьший элементы не принадлежат множеству X, а для частично упорядоченных множеств – принадлежат. В рассмотренном выше примере верхняя грань частично упорядоченного множества есть U, а нижняя – одно из подмножеств X_5, X_6, X_7, X_8.

3.2. Нечёткие отношения

Для нечётких отношений $r: X \xrightarrow{\mu} X$ чётко заданы элементы областей определения и значения, а функция принадлежности для каждой пары элемен тов $(x_i, x_j) \in (X \otimes X)$ – $\mu_{r'}(x_i, x_j)/(x_i, x_j)$ – выделяет нечеткое отношение:

$$r' = \{\mu_r(x_i, x_j)/(x_i, x_j) \,|\, x_i, x_j \in X\}. \qquad (3.6)$$

Значение функции принадлежности для конкретной пары $(x_i, x_j) \in (X \otimes X)$ называют *степенью принадлежности*.

Нечёткие отношения также можно описывать списками, матрицами смежности, строки которых есть *прообразы нечёткого отношения*, а столбцы – *образы*. Тогда в клетках (x_i, x_j) таблицы будут указаны степени принадлежности каждой пары $\mu_{h'}(x_i, x_j)$.

Пример. В результате стихийного бедствия, по данным службы МЧС, нарушились связи между населенными пунктами так, как это показано на рис. 3.3 и табл. 3.6.

Таблица 3. 6

r	*a*	*b*	*c*	*d*	e
a	0	0,8	0	0,4	0
b	0,8	0	0,3	0,7	0,8
c	0	0,3	0	0,2	0,5
d	0,4	0,7	0,2	0	0,5
e	0	0,8	0,5	0,5	0

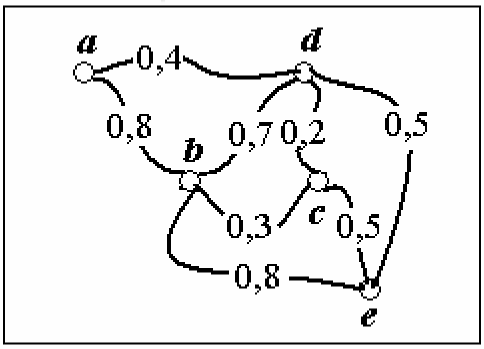


Рис. 3.3. Нечёткая транспортная сеть

Нечёткое включение нечёткого отношения r'_1 ***в нечёткое отношение*** r'_2 определяется **с**тепенью нечёткого включения каждой пары $(u_i, u_j) \in (U \otimes U)$, принадлежащей r'_1 и r'_2, в исполнение операции импликации: «если пара $(u_i,u_j)\in(U\otimes U)$ нечётко принадлежит r'_1, то она нечётко принадлежит r'_2, но не наоборот»:

$$\mu(r'_1 \tilde{\subseteq} r'_2)=\underset{\mathrm{i}}{\&}(\&(\mu_{r'_1}(u_i,u_{\mathrm{j}})\to\mu_{r'_2}(u_{\mathrm{i}},u_j)))=\underset{\mathrm{i}}{\&}(\&(\mu_{\bar{r}'_1}(u_{\mathrm{i}},u_j)\vee\mu_{r'_2}(u_{\mathrm{i}},u_j))=$$

$$\min_{\mathrm{i}}\{\min\{\max\{(1-\mu_{r'_1}(u_{\mathrm{i}},u_j),\ \mu_{r'_2}(u_{\mathrm{i}},u_j)\}\}\}, \qquad (3.\ 7)$$

где $\tilde{\subseteq}$ - символ нечёткого включения.

Если $\mu(r'_1 \tilde{\subseteq} r'_2)\geq 0{,}5$ то нечёткое отношение r'_1 нечётко включено в r'_2 .

<u>Пример</u>. Даны два нечётких отношения r'_1 и r'_2 (см. табл. 3.7a и 3.7b). Включено ли $(r'_1 \tilde{\subseteq} r'_2)$?

Таблица 3.7*a*

h_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0,3	0,5	0,3	0,5
x_2	0,4	0,2	0,3	0,4
x_3	0,1	0,5	1	1
x_4	0,5	0,6	0	0,3

Таблица 3.7*b*

h_2	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0,7	0,6	0,5	0,7
x_2	0,6	0,3	0,6	0,6
x_3	0,2	0,6	0,8	0,8
x_4	0,8	0,7	0,3	0,5

$$\mu(r'_1 \tilde{\subseteq} r'_2)=\min\{\min_{\mathrm{x1}}\{\max_{\mathrm{x1}}\{(1-\mu_{r1'}(x_1,\ x_1)),\ \mu_{r2'}(x_1,x_1)\},\ \max_{x2}\{(1-\mu_{r1'}(x_1,x_2)),\ \mu_{r\mathbf{2}'}(x_1,x_2)\},$$

$$\max_{\mathrm{x3}}\{(1-\mu_{\mathrm{r1'}}(x_1,x_3)),\ \mu_{\mathrm{r1'}}(x_1,x_3)\},\max_{\mathrm{x4}}\{(1-\mu_{\mathrm{r1'}}(x_1,x_4)),\ \mu_{r\mathbf{2}'}(x_1,x_4)\}\},\ \min_{\mathrm{x2}}\{\max_{\mathrm{x1}}\{(1-\mu_{\mathrm{r1'}}(x_2,\ x_1)),$$

$$\mu_{\mathrm{r2'}}(x_2,\ \mathrm{x}_1)\},\ \max_{\mathrm{x2}}\{(1-\mu_{\mathrm{r1'}}(x_2,\ x_2)),\ \mu_{\mathrm{r2'}}(x_2,\ y_2)\},\ \max_{\mathrm{x3}}\{(1-\mu_{\mathrm{r1'}}(x_2,\ x_3)),\ \mu_{\mathrm{r2'}}(x_2,\ x_3)\},$$

$$\max_{\mathrm{x4}}\{(1-\mu_{\mathrm{r1'}}(x_2,\ x_\mathbf{4})),\ \mu_{\mathrm{r2'}}(x_2,\ x_4)\}\},\min_{\mathrm{x3}}\{\max_{\mathrm{x1}}\{(1-\mu_{\mathrm{r1'}}(x_3,\ x_1)),\ \mu_{\mathrm{r2'}}(x_3,\ y_1)\},\ \max_{\mathrm{x2}}\{(1-\mu_{\mathrm{r1'}}(x_3,\ x_2)),$$

$$\mu_{r2'}(x_3,\ y_2)\},\ \max_{\mathrm{x3}}\{(1-\mu_{\mathrm{r1'}}(x_3,\ \mathrm{x}_3)),\ \mu_{\mathrm{r2'}}(x_3,\ x_3),\max_{\mathrm{x4}}\{(1-\mu_{\mathrm{r1'}}(x_3,\ \mathrm{x}_4)),\ \mu_{\mathrm{r2'}}(x_3,\ x_4)\}\},$$

$$\min_{\mathrm{x4}}\{\max_{\mathrm{x1}}\{(1-\mu_{\mathrm{r1'}}(x_4,\ x_1)),\ \mu_{\mathrm{r2'}}(x_4,\ x_1)\},\ \max_{\mathrm{x2}}\{(1-\mu_{h'_1}(x_4,\ x_\mathbf{2}),\ \mu_{r\mathbf{2}'}(x_4,\ x_2)\},\max_{\mathrm{x3}}\{(1-\mu_{\mathrm{r1'}}(x_\mathbf{4},\ \mathrm{x}_3),$$

$$\mu_{\mathrm{r}\,2'}(x_4,\ x_3),\max_{\mathrm{x4}}\{(1-\mu_{\mathrm{r1'}}(x_4,\ x_4),\ \mu_{r\mathbf{2}'}(x_4,\ x_4)\}\}\}=\min\{\min_{\mathrm{x1}}\{\max_{\mathrm{x1}}\{0{,}7,\ 0{,}7\},\max_{x\mathbf{2}}\{0{,}5,\ 0{,}6\},$$

$$\max_{x\mathbf{3}}\{0{,}7,\ 0{,}5\},\max_{x\mathbf{4}}\{0{,}5,\ 0{,}7\}\},\min_{\mathrm{x2}}\{\max_{\mathrm{x1}}\{0{,}6,\ 0{,}6\},\max_{x\mathbf{2}}\{0{,}8,\ 0{,}3\},\max_{\mathrm{x3}}\{0{,}7,\ 0{,}6\},\ \max_{\mathrm{x4}}\{0{,}\mathbf{6},\ 0{,}6\}\},$$

$$\min_{\mathrm{x3}}\{\max_{x\mathbf{1}}\{0{,}9,\ 0{,}2\},\max_{x\mathbf{2}}\{0{,}5,\ 0{,}6\},\max_{x\mathbf{3}}\{0,\ 0{,}8\},\ \max_{\mathrm{x4}}\{0,\ 0{,}8\}\},\min_{\mathrm{x4}}\{\max_{\mathrm{x1}}\{\mathbf{0},\mathbf{5},\ 0{,}8\},\{\max_{x\mathbf{2}}\{0{,}4,\ 0{,}7\},$$

$$\max_{x\mathbf{3}}\{1,\ 0{,}3\},\ \max_{x\mathbf{4}}\{0{,}7,\ 0{,}5\}\}=\min\{\min_{\mathrm{x1}}\{0{,}7,\ 0{,}6,\ 0{,}7,\ 0{,}7\},\ \min_{\mathrm{x2}}\{0{,}6,\ 0{,}8,\ 0{,}7,\ 0{,}6\},$$

$$\min_{\mathrm{x3}}\{0{,}9,\ 0{,}6,\ 0{,}8,\ 0{,}8\},\min_{\mathrm{x4}}\{0{,}8,\ 0{,}7,\ 1,\ 0{,}7\}=\min\{0{,}6,\ 0{,}6,\ 0{,}6,\ 0{,}7\}=0{,}6.$$

Ответ: да, отношение r'_1 нечётко включено в отношение r'_2.

Нечёткое равенство отношений r'_1 и r'_2 определяется степенью нечёткого равенства каждой пары элементов $(u_i,u_j)\in(U\otimes U)$ отношений r'_1 и r'_2, в исполнение операции нечёткой эквивалентности: «если $(u_i,u_j)\in(U\otimes U)$ нечётко принадлежит r'_1, то он нечётко принадлежит r'_2 и, наоборот, если $(u_i,u_j)\in(U\otimes U)$ нечётко принадлежит r'_2, то он нечётко принадлежит r'_1»:

$$\mu(r_1^{'} \cong r_2^{'})=\&(\underset{\mathrm{i}}{\&}(\mu_{\mathrm{r1}}(u_i, u_{\mathrm{j}})\leftrightarrow\mu_{\mathrm{r2}}(u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}})))=\underset{\mathrm{i}}{\&}(\&((\mu_{\mathrm{r1}}(u_i, u_{\mathrm{j}})\rightarrow\mu_{\mathrm{r2}}(u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}))\&$$

$$((\mu_{r2}(u_i, u_{\mathrm{j}})\rightarrow\mu_{\mathrm{r1}}(u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}))=\underset{\mathrm{i}}{\&}(\mu_{\overline{\mathrm{r1}}}(u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}})\vee\mu_{\mathrm{r2}}(u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}))\&(\mu_{\overline{\mathrm{r2}}}(u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}})\vee\mu_{r1}(u_{\mathrm{i}}))= \qquad (3.8)$$

$$\min_{\mathrm{i}}\{\min\{\max\{(1\text{-}\mu_{\mathrm{r1}}(u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}})), \mu_{\mathrm{r2}}(u_i, u_{\mathrm{j}}\},\ \max\{(1\text{-}\mu_{\mathrm{r2}}(u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}})), \mu_{r1}(u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}})\}\}\}.$$

Если $\mu(r_1^{'} \cong r_2^{'}) \geq 0{,}5$, то отображения h'_1 нечётко равно отображению h'_2 .

<u>Пример</u>. Даны два нечётких отношения r'_1 и r'_2 (табл. 3.8*a* и 3.8*b*). Равны ли нечётко эти отношения?

Таблица 3.8*a*

r'_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0,3	0,5	0,3	0,5
x_2	0,4	0,2	0,3	0,4
x_3	0,1	0,5	1	1
x_4	0,5	0,6	0	0,3

Таблица 3.8*b*

r'_2	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0,7	0,6	0,5	0,7
x_2	0,6	0,3	0,6	0,6
x_3	0,2	0,6	0,8	0,8
x_4	0,8	0,7	0,3	0,5

$$\mu(r_1^{'} \cong r_2^{'})=\min\{\min_1\{\max\{0{,}7,\ 0{,}6,\ 0{,}7\ 0{,}7\},\ \max\{0{,}3,\ 0{,}5,\ 0{,}5,\ 0{,}5\}\}, \min_2\{\max\{0{,}6,\ 0{,}8,\ 0{,}7\ 0{,}6\},$$

$$\max\{0{,}4,\ 0{,}7,\ 0{,}4,\ 0{,}4\}\}, \min_3\{\max\{0{,}9,\ 0{,}6,\ 0{,}8\ 0{,}8\},\ \max\{0{,}8,\ 0{,}5,\ 1,\ 1\}\}, \min_4\{\max\{0{,}8,\ 0{,}7,\ 1\ 0{,}7\},$$

$$\max\{0{,}5,\ 0{,}6,\ 0{,}7,\ 0{,}5\}\}\}=\min\{\min\{0{,}7,\ 0{,}5,\ 0{,}8,\ 0{,}7,\ 0{,}9,\ 1,\ 1,\ 0{,}7\}\} = \min\{0{,}5\}=0{,}5.$$

Ответ: да, отношения r'_1 и r'_2 нечётко равны.

Нечёткое прямое произведение нечётких отношений r'_1 и r'_2 есть $r'=(r'_1\otimes r'_2)\cong\{\mu_{r'}((x_{1\mathrm{i}}, x_{2\mathrm{k}}), (x_{1\mathrm{k}}, x_{2\mathrm{j}}))\ /((x_{1\mathrm{i}}, x_{2\mathrm{k}}), (x_{1\mathrm{k}}, x_{2\mathrm{j}}))|\ x_{1\mathrm{i}}, x_{1\mathrm{k}}\in X_1$ и $x_{2\mathrm{k}}, x_{2\mathrm{j}}\in X_2\}$, носителем которого являются пары $(x_{1\mathrm{i}}, x_{2\mathrm{j}})\in(X_1\otimes X_2)$, а степень принадлежности отношения между парами вершин определяется выражением:

$$\mu_{\mathrm{r'}}((x_{1\mathrm{i}}, x_{2\mathrm{k}}), (x_{1\mathrm{k}}, x_{2\mathrm{j}}))=\mu_{\mathrm{r1'}}(x_{1\mathrm{i}}, x_{1\mathrm{k}})\,\&\mu_{\mathrm{r'}}(x_{2\mathrm{k}}, x_{2\mathrm{j}})=\min\{\mu_{\mathrm{r1'}}(x_{1\mathrm{i}}, x_{1\mathrm{k}}),\ \mu_{\mathrm{r2'}}(x_{2\mathrm{k}}, x_{2\mathrm{j}})\}. \qquad (3.9)$$

<u>Пример</u>. Даны два нечётких отношения r'_1 и r'_2 (см. табл. 3.9). Найти нечёткое прямое произведение нечётких отношений.

Для удобства формирования результирующей матрицы введем новые обозначения: $x_1=(x_{11}, x_{21})$, $x_2=(x_{11}, x_{22})$, $x_3=(x_{11}, x_{23})$, $x_4=(x_{12}, x_{21})$, $x_5=(x_{12}, x_{22})$, $x_6=(x_{12}, x_{23})$, $x_7=(x_{13}, x_{21})$, $\mathrm{x}_8=(x_{13}, x_{22})$, $\mathrm{x}_9=(x_{13}, x_{23})$.

Таблица 3.9a

r'_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}
x_{11}	0,3	0,5	0,3
x_{12}	0,4	0,2	0,3
x_{13}	0,1	0,5	1

$\otimes$

Таблица 3.9b

r'_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}
x_{21}	0,7	0,6	0,5
x_{22}	0,6	0,3	0,6
x_{23}	0,2	0,6	0,8

$\cong$

Таблица 3.9*c*

r'	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_1	0,3	0,3	0,3	0,5	0,5	0,5	0,3	0,3	0,3
x_2	0,3	0,3	0,3	0,5	0,3	0,5	0,3	0,3	0,3
x_3	0,3	0,3	0,3	0,2	0,5	0,5	0,2	0,3	0,3
x_4	0,4	0,4	0,4	0,2	0,2	0,2	0,3	0,3	0,3
x_5	0,4	0,3	0,4	0,2	0,2	0,2	0,3	0,3	0,3
x_6	0,2	0,4	0,4	0,2	0,2	0,2	0,2	0,3	0,3
x_7	0,1	0,1	0,1	0,5	0,5	0,5	0,7	0,6	0,5
x_8	0,1	0,1	0,1	0,5	0,3	0,5	0,6	0,3	0,6
x_9	0,1	0,1	0,1	0,2	0,5	0,5	0,2	0,6	0,8

Свойства бинарных нечётких отношений:

Отношение нечётко рефлексивно, если для всех $x_i \in X$ имеем:

$$\alpha(r')_{ref} = \underset{i}{\&}(\mu_{r'}(x_i, x_i)) = \min_i\{\mu_{r'}(x_i, x_i)\} \geq 0{,}5. \qquad (3.10)$$

Степень принадлежности каждого элемента главной диагонали матрицы нечёткой смежности не меньше 0,5.

Отношение нечётко антирефлексивно, если для всех $x_i \in X$ имеем:

$$\beta(r')_{ref} = \underset{i}{\&}(\overline{\mu_{r'}(x_i, x_i)}) = \min_i\{(1-\mu_{r'}(x_i, x_i))\} \geq 0{,}5. \qquad (3.11)$$

Степень принадлежности дополнения каждого элемента главной диагонали матрицы нечёткой смежности не меньше 0,5.

Отношение нечётко симметрично, если для любой пары $(x_i, x_j) \in r$ при $i \neq j$ имеем:

$$\begin{aligned}&\alpha(r')_{sym} = \underset{i}{\&}(\mu_{r'}(x_i, x_j) \rightarrow \mu_{r'}(x_j, x_i)) = \underset{i}{\&}((\overline{\mu}_{r'}(x_i, x_j)) \vee \mu_{r'}(x_j, x_i)) = \\ &\min_i\{\max\{(1-\mu_{r'}(x_i, x_j)), \mu_{r'}(x_j, x_i)\}\} \geq 0{,}5.\end{aligned} \qquad (3.12)$$

Отношение нечётко антисимметрично, если для любой $(x_i, x_j) \in r$ при $i \neq j$ имеем:

$$\begin{aligned}&\beta(r')_{sym} = \underset{i}{\&}\left(\overline{\mu_{r'}\left(x_i, x_j\right) \& \mu_{r'}\left(x_j, x_i\right)}\right) = \underset{i}{\&}\left(\overline{\mu}_{r'}\left(x_i, x_j\right) \vee \overline{\mu}_{r'}\left(x_j, x_i\right)\right) = \\ &\min_i\{\max\{(1-\mu_{r'}(x_i, x_j)), (1-\mu_{r'}(x_j, x_i)\}\} \geq 0{,}5.\end{aligned} \qquad (3.13)$$

Отношение нечётко транзитивно, если для любых $x_i, x_j, x_k \in X$ при $i \neq j \neq k$ имеем:

$$\begin{aligned}&\alpha(r')_{tr} = \underset{i}{\&}(\mu_{r'}(x_i, x_j) \& \mu_{r'}(x_j, x_k) \longrightarrow \mu_{r'}(x_i, x_k)) = \\ &\underset{i}{\&}\left(\overline{(\mu_{r'}(x_i, x_j) \& \mu_{r'}(x_j, x_k)} \vee \mu_{r'}(x_i, x_k)\right) = \\ &\underset{i}{\&}\left(\overline{(\mu_{r'}}(x_i, x_j) \vee \overline{\mu_{r'}}(x_j, x_k) \vee \mu_{r'}(x_i, x_k)\right) = \\ &\min_i\{\max\{\max\{(1-\mu_{r'}(x_i, x_j)), (1-\mu_{r'}(x_j, x_k)\}, \mu_{r'}(x_i, x_k)\}\} \geq 0{,}5.\end{aligned} \qquad (3.14)$$

Класс нечётких отношений. Наличие различных сочетаний свойств у нечётких отношений позволяет группировать их в классы, что может быть использовано позднее в решении прикладных задач:

Класс нечёткой эквивалентности формируют отношения, удовлетворяющие условиям нечётких рефлексивности $\alpha(r'_1)_{ref} \geq 0{,}5$, симметричности $\alpha(r'_1)_{sym} \geq 0{,}5$ и транзитивности $\alpha(r'_1)_{tr} \geq 0{,}5$. Степень нечёткой эквивалентности определяется выражением:

$$\eta(r') = \alpha(r')_{ref} \& \alpha(r')_{sym} \& \alpha(r')_{tr} = \min\{\alpha(r')_{ref}, \alpha(r')_{sym}, \alpha(r')_{tr}\} \geq 0{,}5 \qquad (3.15)$$

Класс нечёткого нестрогого порядка формируют отношения, удовлетворяющие условиям нечётких рефлексивности $\alpha(r'_1)_{ref} \geq 0{,}5$, антисимметричности $\beta(r')_{sym} \geq 0{,}5$ и транзитивности $\alpha(r'_1)_{tr} \geq 0{,}5$. Степень нечёткого нестрогого порядка определяется выражением:

$$\eta(r')=\alpha(r')_{ref}\&\beta(r')_{sym}\&\alpha(r')_{tr}=\min\{\alpha(r')_{ref}, \beta(r')_{sym}, \alpha(r')_{tr}\}\geq 0{,}5. \qquad (3.16)$$

Класс нечёткого строгого порядка формируют отношения, удовлетворяющие условиям нечётких антирефлексивности $\beta(r'_1)_{ref} \geq 0{,}5$, антисимметричности $\beta(r')_{sym} \geq 0{,}5$ и транзитивности $\alpha(r'_1)_{tr} \geq 0{,}5$. Степень нечёткого строгого порядка определяется выражением:

$$\eta(r')=\beta(r')_{ref}\&\beta(r')_{sym}\&\alpha(r')_{tr}=\min\{\beta(r')_{ref}, \beta(r')_{sym}, \alpha(r')_{tr}\}\geq 0{,}5. \qquad (3.17)$$

Пример. Даны отношения r'$_1$ и r'$_2$ (см.табл. 3.10). К какому классу относятся отношения?

Таблица 3.10a

r'_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0,8	0,2	0,7	0,2
x_2	0,4	0,6	0,6	0,2
x_3	0,6	0,7	0,8	0,3
x_4	0,3	0,1	0,3	0,7

Таблица 3.10b

r'_2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	0	0	0	0,2
x_2	0,7	0,3	0,6	0,8	0,9
x_3	0,7	0,4	0,2	0,8	0,9
x_4	0,8	0	0	0	0,3
x_5	1	0	0,1	0,7	0

$\alpha(r'_1)_{ref} = \min\limits_{i}\{\mu_{r'_1}(x_1,x_1), \mu_{r'_1}(x_2,x_2), \mu_{r'_1}(x_3,x_3), \mu_{r'_1}(x_4,x_4)\}=\min\{0{,}8;\ 0{,}6;\ 0{,}8;\ 0{,}7\}=$
$=0{,}6;$

$\beta(r'_1)_{ref} = \min\limits_{i}\{(1\text{-}\mu_{r'1}(x_1,x_1)), (1\text{-}\mu_{r'1}(x_2,x_2)), (1\text{-}\mu_{r'1}(x_3,x_3)), (1\text{-}\mu_{r'1}(x_4,x_4))\}=\min\limits_{i}\{0{,}2;$
$0{,}4;\ 0{,}2;\ 0{,}3\}=0{,}2;$

$\alpha(r_1')_{sym}=\min\{\max\limits_{1,2}\{(1\text{-}\mu_{r'1}(x_1,x_2)), \mu_{r'1}(x_2,x_1)\}, \max\limits_{1,3}\{(1\text{-}\mu_{r'1}(x_1,x_3)), \mu_{r'1}(x_3,x_1)\},$
$\max\limits_{1,4}\{(1\text{-}\mu_{r'1}(x_1,x_4)), \mu_{r'1}(x_4,x_1)\}, \max\limits_{2,3}\{(1\text{-}\mu_{r'1}(x_2,x_3)), \mu_{r'1}(x_3,x_2)\},$
$\max\limits_{2,4}\{(1\text{-}\mu_{r'1}(x_2,x_4)), \mu_{r'1}(x_4,x_2)\}, \max\limits_{3,4}\{(1\text{-}\mu_{r'1}(x_3,x_4)), \mu_{r'1}(x_4,x_3)\}\}=$
$=\min\{\max\limits_{1,2}\{0{,}8;\ 0{,}4\}, \max\limits_{1,3}\{0{,}3;\ 0{,}6\}, \max\limits_{1,4}\{0{,}8;\ 0{,}3\}, \max\limits_{2,3}\{0{,}4;\ 0{,}7\}, \max\limits_{2,4}\{0{,}8;\ 0{,}1\},$
$\max\limits_{3,4}\{0{,}7;\ 0{,}3\}\}=\min\{0{,}8;\ 0{,}6;\ 0{,}8,\ 0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}7\}=0{,}6;$

$\beta(r_1')_{sym}=\min\{\max\limits_{ij}\{(1\text{-}\mu_{r_1'}(x_i,x_j)), (1\text{-}\mu_{r_1'}(x_j,x_i)\}\}==\min\{\max\limits_{1,2}\{0{,}8;\ 0{,}6\}, \max\limits_{1,3}\{0{,}3;\ 0{,}4\},$
$\max\limits_{1,4}\{0{,}8;\ 0{,}7\}, \max\limits_{2,3}\{0{,}4;\ 0{,}3\}, \max\limits_{2,4}\{0{,}8;\ 0{,}9\}, \max\limits_{3,4}\{0{,}7,\ 0{,}7\}=\min\{0{,}8;\ 0{,}4;\ 0{,}8;\ 0{,}4;$
$0{,}9;\ 0{,}7\}=0{,}4;$

$\alpha(r'_1)_{tr}=\min\limits_{i}\{\min\{\max\{\max\{(1\text{-}\mu_{r'}(x_i,x_j)), (1\text{-}\mu_{r'}(x_j,x_k)\}, \mu_{r'}(x_i,x_k)\}\}.$

Для вычисления степени нечёткой транзитивности в табл. 3.11 для каждой пары (x_i, x_j) приведены значения $\mu_{r_1'}(x_i,x_k)$ и $(1\text{-}\mu_{r_1'}(x_i,x_j))$.

Таблица 3.11

(i,j)	$1\text{-}\mu_{r'1}(i,j)$	$\mu_{r'1}(i,k)$	(i,j)	$1\text{-}\mu_{r'1}(i,j)$	$\mu_{r'1}(i,k)$
1,2	0,8	0,2	3,1	0,4	0,6
1,3	0,3	0,7	3,2	0,3	0,7
1,4	0,8	0,2	3,4	0,7	0,3
2,1	0,6	0.4	4,1	0,7	0,3
2,3	0,4	0,6	4,2	0,9	0,1
2,4	0,8	0,2	4,3	0,7	0,3

Ниже представлена одна из возможных схем расчетов (3.18) по определению $max\{\ldots\}$ и $\min\{\ldots\}$ для всех наборов i, j и k при $i\neq j\neq k$.

$$\min_1\left\{\begin{array}{l}\max\limits_2\left\{\begin{array}{l}1\text{-}\mu_{r1}(1,3),\ 1\text{-}\mu_{r1}(3,2),\ \mu_{r1}(1,2)\\ 1\text{-}\mu_{r1}(1,4),\ 1\text{-}\mu_{r1}(4,2),\ \mu_{r1}(1,2)\end{array}\right\}\\ \max\limits_3\left\{\begin{array}{l}1\text{-}\mu_{r1}(1,2),\ 1\text{-}\mu_{r1}(2,3),\ \mu_{r1}(1,3)\\ 1\text{-}\mu_{r1}(1,4),\ 1\text{-}\mu_{r1}(4,3),\ \mu_{r1}(1,3)\end{array}\right\}\\ \max\limits_4\left\{\begin{array}{l}1\text{-}\mu_{r1}(1,2),\ 1\text{-}\mu_{r1}(2,4),\ \mu_{r1}(1,4)\\ 1\text{-}\mu_{r1}(1,3),\ 1\text{-}\mu_{r1}(3,4),\ \mu_{r1}(1,4)\end{array}\right\}\end{array}\right\}=\min_1\left\{\begin{array}{l}\max\limits_2\left\{\begin{array}{l}0{,}3,\ 0{,}3,\ 0{,}2\\ 0{,}8,\ 0{,}9,\ 0{,}2\end{array}\right\}=0{,}9\\ \max\limits_3\left\{\begin{array}{l}0{,}8,\ 0{,}4,\ 0{,}7\\ 0{,}8,\ 0{,}7,\ 0{,}7\end{array}\right\}=0{,}8\\ \max\limits_4\left\{\begin{array}{l}0{,}8,\ 0{,}8,\ 0{,}2\\ 0{,}3,\ 0{,}7,\ 0{,}2\end{array}\right\}=0{,}8\end{array}\right\}=0{,}8,$$

$$\min_2\left\{\begin{array}{l}\max\limits_1\left\{\begin{array}{l}1\text{-}\mu_{r1}(2,3),\ 1\text{-}\mu_{r1}(3,1),\ \mu_{r1}(2,1)\\ 1\text{-}\mu_{r1}(2,4),\ 1\text{-}\mu_{r1}(4,1),\ \mu_{r1}(2,1)\end{array}\right\}\\ \max\limits_3\left\{\begin{array}{l}1\text{-}\mu_{r1}(2,1),\ 1\text{-}\mu_{r1}(1,3),\ \mu_{r1}(2,3)\\ 1\text{-}\mu_{r1}(2,4),\ 1\text{-}\mu_{r1}(4,3),\ \mu_{r1}(2,3)\end{array}\right\}\\ \max\limits_4\left\{\begin{array}{l}1\text{-}\mu_{r1}(2,1),\ 1\text{-}\mu_{r1}(1,4),\ \mu_{r1}(2,4)\\ 1\text{-}\mu_{r1}(2,3),\ 1\text{-}\mu_{r1}(3,4),\ \mu_{r1}(2,4)\end{array}\right\}\end{array}\right\}=\min_2\left\{\begin{array}{l}\max\limits_1\left\{\begin{array}{l}0{,}4,\ 0{,}4,\ 0{,}4\\ 0{,}8,\ 0{,}7,\ 0{,}4\end{array}\right\}=0{,}8\\ \max\limits_3\left\{\begin{array}{l}0{,}6,\ 0{,}3,\ 0{,}6\\ 0{,}8,\ 0{,}7,\ 0{,}6\end{array}\right\}=0{,}8\\ \max\limits_4\left\{\begin{array}{l}0{,}6,\ 0{,}8,\ 0{,}2\\ 0{,}4,\ 0{,}7,\ 0{,}2\end{array}\right\}=0{,}8\end{array}\right\}=0{,}8 \qquad (3.18)$$

$$\min_3\left\{\begin{array}{l}\max\limits_1\left\{\begin{array}{l}1\text{-}\mu_{r1}(3,2),\ 1\text{-}\mu_{r1}(2,1),\ \mu_{r1}(3,1)\\ 1\text{-}\mu_{r1}(3,4),\ 1\text{-}\mu_{r1}(4,1),\ \mu_{r1}(3,1)\end{array}\right\}\\ \max\limits_2\left\{\begin{array}{l}1\text{-}\mu_{r1}(3,1),\ 1\text{-}\mu_{r1}(1,2),\ \mu_{r1}(3,2)\\ 1\text{-}\mu_{r1}(3,4),\ 1\text{-}\mu_{r1}(4,2),\ \mu_{r1}(3,2)\end{array}\right\}\\ \max\limits_4\left\{\begin{array}{l}1\text{-}\mu_{r1}(3,1),\ 1\text{-}\mu_{r1}(1,4),\ \mu_{r1}(3,4)\\ 1\text{-}\mu_{r1}(3,2),\ 1\text{-}\mu_{r1}(2,4),\ \mu_{r1}(3,4)\end{array}\right\}\end{array}\right\}=\min_3\left\{\begin{array}{l}\max\limits_1\left\{\begin{array}{l}0{,}3,\ 0{,}6,\ 0{,}6\\ 0{,}7,\ 0{,}7,\ 0{,}6\end{array}\right\}=0{,}7\\ \max\limits_2\left\{\begin{array}{l}0{,}4,\ 0{,}8,\ 0{,}7\\ 0{,}7,\ 0{,}9,\ 0{,}7\end{array}\right\}=0{,}9\\ \max\limits_4\left\{\begin{array}{l}0{,}4,\ 0{,}8,\ 0{,}2\\ 0{,}3,\ 0{,}8,\ 0{,}2\end{array}\right\}=0{,}8\end{array}\right\}=0{,}7,$$

$$\min_4\left\{\begin{array}{l}\max\limits_1\left\{\begin{array}{l}1\text{-}\mu_{r1}(4,2),\ 1\text{-}\mu_{r1}(2,1),\ \mu_{r1}(4,1)\\ 1\text{-}\mu_{r1}(4,3),\ 1\text{-}\mu_{r1}(3,1),\ \mu_{r1}(4,1)\end{array}\right\}\\ \max\limits_2\left\{\begin{array}{l}1\text{-}\mu_{r1}(4,1),\ 1\text{-}\mu_{r1}(1,2),\ \mu_{r1}(4,2)\\ 1\text{-}\mu_{r1}(4,3),\ 1\text{-}\mu_{r1}(3,2),\ \mu_{r1}(4,2)\end{array}\right\}\\ \max\limits_3\left\{\begin{array}{l}1\text{-}\mu_{r1}(4,1),\ 1\text{-}\mu_{r1}(1,3),\ \mu_{r1}(4,3)\\ 1\text{-}\mu_{r1}(4,2),\ 1\text{-}\mu_{r1}(2,3),\ \mu_{r1}(4,3)\end{array}\right\}\end{array}\right\}=\min_4\left\{\begin{array}{l}\max\limits_1\left\{\begin{array}{l}0{,}9,\ 0{,}6,\ 0{,}3\\ 0{,}7,\ 0{,}4,\ 0{,}3\end{array}\right\}=0{,}9\\ \max\limits_2\left\{\begin{array}{l}0{,}7,\ 0{,}8,\ 0{,}1\\ 0{,}7,\ 0{,}3,\ 0{,}1\end{array}\right\}=0{,}8\\ \max\limits_3\left\{\begin{array}{l}0{,}7,\ 0{,}3,\ 0{,}3\\ 0{,}9,\ 0{,}4,\ 0{,}3\end{array}\right\}=0{,}9\end{array}\right\}=0{,}8.$$

$\alpha(r'_1)_{tr}$=min{0,8; 0,8; 0,7; 0,8}=0,7.

Тогда $\eta(r')=\min\{\alpha(r')_{ref}, \alpha(r')_{sym}, \alpha(r')_{tr}\}=\min\{0{,}6, 0{,}6, 0{,}7\}=0{,}6$.

Ответ: нечёткое отношение r'_1 принадлежит классу нечёткой эквивалентности.

Для отношения r'_2 имеем

$\alpha(r'_2)_{ref} = \min_i\{\mu_{r'_2}(x_1,x_1), \mu_{r'_2}(x_2,x_2), \mu_{r'_2}(x_3,x_3), \mu_{r'2}(x_4,x_4), \mu_{r'2}(x_5,x_5)\}=$

$\min\{0,; 0,3; 0,2; 0; 0\}=0,$

$\beta(r'_2)_{ref} = \min_i\{(1\text{-}\mu_{r'2}(x_1,x_1)), (1\text{-}\mu_{r'2}(x_2,x_2)), (1\text{-}\mu_{r'2}(x_3,x_3)), (1\text{-}\mu_{r'2}(x_4,x_4)),$

$(1\text{-}\mu_{r'2}(x_5,x_5))\}=\min_i\{1; 0,7; 0,8; 1; 1\}=0,7,$

$\alpha(r_2')_{sym}=\min\{\max_{1,2}\{(1\text{-}\mu_{r'2}(x_1,x_2)), \mu_{r'2}(x_2,x_1)\}, \max_{1,3}\{(1\text{-}\mu_{r'2}(x_1,x_3)), \mu_{r'2}(x_3,x_1)\},$

$\max_{1,4}\{(1\text{-}\mu_{r'2}(x_1,x_4)), \mu_{r'2}(x_4,x_1)\}, \max_{1,5}\{(1\text{-}\mu_{r'2}(x_1,x_5)), \mu_{r'2}(x_5,x_1)\},$

$\max_{2,3}\{(1\text{-}\mu_{r'2}(x_2,x_3)), \mu_{r'2}(x_3,x_2)\}, \max_{2,4}\{(1\text{-}\mu_{r'2}(x_2,x_4)), \mu_{r'2}(x_4,x_2)\},$

$\max_{2,5}\{(1\text{-}\mu_{r'2}(x_2,x_5)), \mu_{r'2}(x_5,x_2)\}, \max_{3,4}\{(1\text{-}\mu_{r'2}(x_3,x_4)), \mu_{r'2}(x_4,x_3)\},$

$\max_{3,5}\{(1\text{-}\mu_{r'2}(x_3,x_5)), \mu_{r'2}(x_5,x_3)\}, \max_{4,5}\{(1\text{-}\mu_{r'2}(x_4,x_5)), \mu_{r'2}(x_5,x_4)\}\}=$

$=\min\{\max_{1,2}\{1,0; 0,7\}, \max_{1,3}\{1,0; 0,7\}, \max_{1,4}\{1,0; 0,8\}, \max_{1,5}\{0,8; 1,0\}, \max_{2,3}\{0,4; 0,4\},$

$\max_{2,4}\{0,2; 0,0\}, \max_{2,5}\{0,1; 0,0\}, \max_{3,4}\{0,2; 0,0\}, \max_{3,5}\{0,1; 0,1\}, \max_{4,5}\{0,7; 0,7\}\}=$

$\min\{1,0; 1,0; 1,0; 1,0; 0,4; 0,2; 0,1; 0,7\}=0,1.$

$\beta(r_2')_{sym}=\min\{\max_{ij}\{(1\text{-}\mu_{r_2'}(x_i,x_j)), (1\text{-}\mu_{r_2'}(x_j,x_i)\}\}==\min\{\max_{1,2}\{1; 0,3\},$

$\max_{1,3}\{1; 0,3\}, \max_{1,4}\{1; 0,2\}, \max_{1,5}\{0,8; 0\}, \max_{2,3}\{0,4; 0,6\}, \max_{2,4}\{0,2; 1\},$

$\max_{2,5}\{0,1; 1\}, \max_{3,4}\{0,2, 1\}, \max_{3,5}\{0,1; 0,9\}, \max_{4,5}\{0,7; 0,3\}=$

$=\min\{1; 1; 1; 0,8; 0,6; 1; 1; 1; 0,9; 0,7\}=0,6,$

$\alpha(r'_2)_{tr}=\min_i\{\min\{\max\{\max\{(1\text{-}\mu_{r_2'}(x_i,x_j)), (1\text{-}\mu_{r_2'}(x_j,x_k)\}, \mu_{r_2'}(x_i,x_k)\}\}.$

$\alpha(r'_2)_{tr}=0,7.$

Для вычисления степени нечёткой транзитивности в табл. 3.12 для каждой пары (x_i, x_j) приведены значения $\mu_{r_2'}(x_i,x_k)$ и $(1\text{-}\mu_{r_2'}(x_i,x_j))$.

Таблица 3.12

(i,j)	$1\text{-}\mu_{r'2}(i,j)$	$\mu_{r'2}(i,k)$	(i,j)	$1\text{-}\mu_{r'2}(i,j)$	$\mu_{r'2}(i,k)$
1,2	1	0	3,1	0,3	0,7
1,3	1	0	3,2	0,6	0,4
1,4	1	0	3,4	0,2	0,8
1,5	0,8	0,2	3,5	0,1	0,9
2,1	0,3	0.7	4,1	0,2	0,8
2,3	0,4	0,6	4,2	1	0
2,4	0,2	0,8	4,3	1	0
2,5	0,1	0,9	4,5	0,7	0,3

Ниже представлена одна из возможных схем расчетов (3.18) по определению *max*{…} и min{…} для всех наборов *i*, *j* и *k* при $i\neq j\neq k$.

$$
\min_{1}\left\{\begin{array}{l}
\max\limits_{2}\left\{\begin{array}{l}
1\text{-}\mu_{r2}(1,3),\ 1\text{-}\mu_{r2}(3,2),\ \mu_{r2}(1,2)\\
1\text{-}\mu_{r2}(1,4),\ 1\text{-}\mu_{r2}(4,2),\ \mu_{r2}(1,2)\\
1\text{-}\mu_{r2}(1,5),\ 1\text{-}\mu_{r2}(5,2),\ \mu_{r2}(1,2)
\end{array}\right\}\\
\max\limits_{3}\left\{\begin{array}{l}
1\text{-}\mu_{r2}(1,2),\ 1\text{-}\mu_{r2}(2,3),\ \mu_{r2}(1,3)\\
1\text{-}\mu_{r2}(1,4),\ 1\text{-}\mu_{r2}(4,3),\ \mu_{r2}(1,3)\\
1\text{-}\mu_{r2}(1,5),\ 1\text{-}\mu_{r2}(5,3),\ \mu_{r2}(1,3)
\end{array}\right\}\\
\max\limits_{4}\left\{\begin{array}{l}
1\text{-}\mu_{r2}(1,2),\ 1\text{-}\mu_{r2}(2,4),\ \mu_{r2}(1,4)\\
1\text{-}\mu_{r2}(1,3),\ 1\text{-}\mu_{r2}(3,4),\ \mu_{r2}(1,4)\\
1\text{-}\mu_{r2}(1,5),\ 1\text{-}\mu_{r2}(5,4),\ \mu_{r2}(1,4)
\end{array}\right\}\\
\max\limits_{5}\left\{\begin{array}{l}
1\text{-}\mu_{r2}(1,2),\ 1\text{-}\mu_{r2}(2,5),\ \mu_{r2}(1,5)\\
1\text{-}\mu_{r2}(1,3),\ 1\text{-}\mu_{r2}(3,5),\ \mu_{r2}(1,5)\\
1\text{-}\mu_{r2}(1,4),\ 1\text{-}\mu_{r2}(4,5),\ \mu_{r2}(1,5)
\end{array}\right\}
\end{array}\right\}
=\min_{1}\left\{\begin{array}{l}
\max\limits_{2}\left\{\begin{array}{l}
1,0,\ 0,6,\ 0,0\\
1,0,\ 1,0,\ 0,0\\
0,8,\ 1,0,\ 0,0
\end{array}\right\}=1\\
\max\limits_{3}\left\{\begin{array}{l}
1,0,\ 0,4,\ 0,0\\
1,0,\ 1,0,\ 0,0\\
0,8,\ 0,9,\ 0,0
\end{array}\right\}=1\\
\max\limits_{4}\left\{\begin{array}{l}
1,0,\ 0,2,\ 0,0\\
1,0,\ 0,2,\ 0,0\\
0,2,\ 0,3,\ 0,0
\end{array}\right\}=1\\
\max\limits_{5}\left\{\begin{array}{l}
1,0,\ 0,1,\ 0,2\\
1,0,\ 0,1,\ 0,2\\
1,0,\ 0,7,\ 0,2
\end{array}\right\}=1
\end{array}\right\}=1,0
$$

$$
\min_{2}\left\{\begin{array}{l}
\max\limits_{1}\left\{\begin{array}{l}
1\text{-}\mu_{r2}(2,3),\ 1\text{-}\mu_{r2}(3,1),\ \mu_{r2}(2,1)\\
1\text{-}\mu_{r2}(2,4),\ 1\text{-}\mu_{r2}(4,1),\ \mu_{r2}(2,1)\\
1\text{-}\mu_{r2}(2,5),\ 1\text{-}\mu_{r2}(5,1),\ \mu_{r2}(2,1)
\end{array}\right\}\\
\max\limits_{3}\left\{\begin{array}{l}
1\text{-}\mu_{r2}(2,1),\ 1\text{-}\mu_{r2}(1,3),\ \mu_{r2}(2,3)\\
1\text{-}\mu_{r2}(2,4),\ 1\text{-}\mu_{r2}(4,3),\ \mu_{r2}(2,3)\\
1\text{-}\mu_{r2}(2,5),\ 1\text{-}\mu_{r2}(5,3),\ \mu_{r2}(2,3)
\end{array}\right\}\\
\max\limits_{4}\left\{\begin{array}{l}
1\text{-}\mu_{r2}(2,1),\ 1\text{-}\mu_{r2}(1,4),\ \mu_{r2}(2,4)\\
1\text{-}\mu_{r2}(2,3),\ 1\text{-}\mu_{r2}(3,4),\ \mu_{r2}(2,4)\\
1\text{-}\mu_{r2}(2,5),\ 1\text{-}\mu_{r2}(5,4),\ \mu_{r2}(2,4)
\end{array}\right\}\\
\max\limits_{5}\left\{\begin{array}{l}
1\text{-}\mu_{r2}(2,1),\ 1\text{-}\mu_{r2}(1,5),\ \mu_{r2}(2,5)\\
1\text{-}\mu_{r2}(2,3),\ 1\text{-}\mu_{r2}(3,5),\ \mu_{r2}(2,5)\\
1\text{-}\mu_{r2}(2,4),\ 1\text{-}\mu_{r2}(4,5),\ \mu_{r2}(2,5)
\end{array}\right\}
\end{array}\right\}
=\min_{1}\left\{\begin{array}{l}
\max\limits_{2}\left\{\begin{array}{l}
0,4,\ 0,3,\ 0,7\\
0,2,\ 0,2,\ 0,7\\
0,1,\ 0,0,\ 0,7
\end{array}\right\}=0,7\\
\max\limits_{3}\left\{\begin{array}{l}
0,3,\ 1,0,\ 0,6\\
0,2,\ 1,0,\ 0,6\\
0,1,\ 0,9,\ 0,6
\end{array}\right\}=1\\
\max\limits_{4}\left\{\begin{array}{l}
0,3,\ 1,0,\ 0,8\\
0,4,\ 0,2,\ 0,8\\
0,1,\ 0,3,\ 0,8
\end{array}\right\}=0,8\\
\max\limits_{5}\left\{\begin{array}{l}
0,3,\ 0,8,\ 0,9\\
0,4,\ 0,1,\ 0,9\\
0,2,\ 0,7,\ 0,9
\end{array}\right\}=0,9
\end{array}\right\}=0,7
$$

$$
\min_{3}\left\{\begin{array}{l}
\max\limits_{1}\left\{\begin{array}{l}
1\text{-}\mu_{r2}(3,2),\ 1\text{-}\mu_{r2}(2,1),\ \mu_{r2}(3,1)\\
1\text{-}\mu_{r2}(3,4),\ 1\text{-}\mu_{r2}(4,1),\ \mu_{r2}(3,1)\\
1\text{-}\mu_{r2}(3,5),\ 1\text{-}\mu_{r2}(5,1),\ \mu_{r2}(3,1)
\end{array}\right\}\\
\max\limits_{2}\left\{\begin{array}{l}
1\text{-}\mu_{r2}(3,1),\ 1\text{-}\mu_{r2}(1,2),\ \mu_{r2}(3,2)\\
1\text{-}\mu_{r2}(3,4),\ 1\text{-}\mu_{r2}(4,2),\ \mu_{r2}(3,2)\\
1\text{-}\mu_{r2}(3,5),\ 1\text{-}\mu_{r2}(5,2),\ \mu_{r2}(3,2)
\end{array}\right\}\\
\max\limits_{4}\left\{\begin{array}{l}
1\text{-}\mu_{r2}(3,1),\ 1\text{-}\mu_{r2}(1,4),\ \mu_{r2}(3,4)\\
1\text{-}\mu_{r2}(3,2),\ 1\text{-}\mu_{r2}(2,4),\ \mu_{r2}(3,4)\\
1\text{-}\mu_{r2}(3,5),\ 1\text{-}\mu_{r2}(5,4),\ \mu_{r2}(3,4)
\end{array}\right\}\\
\max\limits_{5}\left\{\begin{array}{l}
1\text{-}\mu_{r2}(3,1),\ 1\text{-}\mu_{r2}(1,5),\ \mu_{r2}(3,5)\\
1\text{-}\mu_{r2}(3,2),\ 1\text{-}\mu_{r2}(2,5),\ \mu_{r2}(3,5)\\
1\text{-}\mu_{r2}(3,4),\ 1\text{-}\mu_{r2}(4,5),\ \mu_{r2}(3,5)
\end{array}\right\}
\end{array}\right\}
=\min_{3}\left\{\begin{array}{l}
\max\limits_{1}\left\{\begin{array}{l}
0,6,\ 0,3,\ 0,7\\
0,2,\ 0,2,\ 0,7\\
0,1,\ 0,0,\ 0,7
\end{array}\right\}=0,7\\
\max\limits_{2}\left\{\begin{array}{l}
0,3,\ 1,0,\ 0,4\\
0,2,\ 1,0,\ 0,4\\
0,1,\ 1,0,\ 0,4
\end{array}\right\}=1,0\\
\max\limits_{4}\left\{\begin{array}{l}
0,3,\ 1,0,\ 0,8\\
0,6,\ 0,2,\ 0,8\\
0,1,\ 0,3,\ 0,8
\end{array}\right\}=1,0\\
\max\limits_{5}\left\{\begin{array}{l}
0,3,\ 0,8,\ 0,9\\
0,6,\ 0,1,\ 0,9\\
0,2,\ 0,7,\ 0,9
\end{array}\right\}=0,9
\end{array}\right\}=0,7
$$

$$\min_4\left\{\begin{array}{l}
\max_1\begin{Bmatrix}1-\mu_{r2}(4,2), & 1-\mu_{r2}(2,1), & \mu_{r2}(4,1)\\ 1-\mu_{r2}(4,3), & 1-\mu_{r2}(3,1), & \mu_{r2}(4,1)\\ 1-\mu_{r2}(4,5), & 1-\mu_{r2}(5,1), & \mu_{r2}(4,1)\end{Bmatrix}\\
\max_2\begin{Bmatrix}1-\mu_{r2}(4,1), & 1-\mu_{r2}(1,2), & \mu_{r2}(4,2)\\ 1-\mu_{r2}(4,3), & 1-\mu_{r2}(3,2), & \mu_{r2}(4,2)\\ 1-\mu_{r2}(4,5), & 1-\mu_{r2}(5,2), & \mu_{r2}(4,2)\end{Bmatrix}\\
\max_3\begin{Bmatrix}1-\mu_{r2}(4,1), & 1-\mu_{r2}(1,3), & \mu_{r2}(4,3)\\ 1-\mu_{r2}(4,2), & 1-\mu_{r2}(2,3), & \mu_{r2}(4,3)\\ 1-\mu_{r2}(4,5), & 1-\mu_{r2}(5,3), & \mu_{r2}(4,3)\end{Bmatrix}\\
\max_5\begin{Bmatrix}1-\mu_{r2}(4,1), & 1-\mu_{r2}(1,5), & \mu_{r2}(4,5)\\ 1-\mu_{r2}(4,2), & 1-\mu_{r2}(2,5), & \mu_{r2}(4,5)\\ 1-\mu_{r2}(4,3), & 1-\mu_{r2}(3,5), & \mu_{r2}(4,5)\end{Bmatrix}
\end{array}\right\}
=\min_4\left\{\begin{array}{l}
\max_1\begin{Bmatrix}1{,}0, & 0{,}3, & 0{,}8\\ 1{,}0, & 0{,}3, & 0{,}8\\ 1{,}0, & 0{,}0, & 0{,}8\end{Bmatrix}=1{,}0\\
\max_2\begin{Bmatrix}0{,}2, & 1{,}0, & 0{,}0\\ 1{,}0, & 0{,}6, & 0{,}0\\ 0{,}7, & 1{,}0, & 0{,}0\end{Bmatrix}=1{,}0\\
\max_3\begin{Bmatrix}0{,}2, & 1{,}0, & 0{,}0\\ 1{,}0, & 0{,}4, & 0{,}0\\ 0{,}7, & 0{,}9, & 0{,}0\end{Bmatrix}=1{,}0\\
\max_5\begin{Bmatrix}0{,}2, & 0{,}8, & 0{,}3\\ 1{,}0, & 0{,}1, & 0{,}3\\ 1{,}0, & 0{,}1, & 0{,}3\end{Bmatrix}=1{,}0
\end{array}\right\}=1{,}0$$

$$\min_5\left\{\begin{array}{l}
\max_1\begin{Bmatrix}1-\mu_{r2}(5,2), & 1-\mu_{r2}(2,1), & \mu_{r2}(5,1)\\ 1-\mu_{r2}(5,3), & 1-\mu_{r2}(3,1), & \mu_{r2}(5,1)\\ 1-\mu_{r2}(5,4), & 1-\mu_{r2}(4,1), & \mu_{r2}(5,1)\end{Bmatrix}\\
\max_2\begin{Bmatrix}1-\mu_{r2}(5,1), & 1-\mu_{r2}(1,2), & \mu_{r2}(5,2)\\ 1-\mu_{r2}(5,3), & 1-\mu_{r2}(3,2), & \mu_{r2}(5,2)\\ 1-\mu_{r2}(5,4), & 1-\mu_{r2}(4,2), & \mu_{r2}(5,2)\end{Bmatrix}\\
\max_3\begin{Bmatrix}1-\mu_{r2}(5,1), & 1-\mu_{r2}(1,3), & \mu_{r2}(5,3)\\ 1-\mu_{r2}(5,2), & 1-\mu_{r2}(2,3), & \mu_{r2}(5,3)\\ 1-\mu_{r2}(5,4), & 1-\mu_{r2}(4,3), & \mu_{r2}(5,3)\end{Bmatrix}\\
\max_4\begin{Bmatrix}1-\mu_{r2}(5,1), & 1-\mu_{r2}(1,5), & \mu_{r2}(5,4)\\ 1-\mu_{r2}(5,2), & 1-\mu_{r2}(2,5), & \mu_{r2}(5,4)\\ 1-\mu_{r2}(5,3), & 1-\mu_{r2}(3,5), & \mu_{r2}(5,4)\end{Bmatrix}
\end{array}\right\}
=\min_5\left\{\begin{array}{l}
\max_1\begin{Bmatrix}1{,}0, & 0{,}3, & 1{,}0\\ 0{,}9, & 0{,}3, & 1{,}0\\ 0{,}3, & 0{,}2, & 1{,}0\end{Bmatrix}=1{,}0\\
\max_2\begin{Bmatrix}0{,}0, & 1{,}0, & 0{,}0\\ 0{,}9, & 0{,}6, & 0{,}0\\ 0{,}3, & 1{,}0, & 0{,}0\end{Bmatrix}=1{,}0\\
\max_3\begin{Bmatrix}0{,}0, & 1{,}0, & 0{,}1\\ 1{,}0, & 0{,}4, & 0{,}1\\ 0{,}3, & 1{,}0, & 0{,}1\end{Bmatrix}=1{,}0\\
\max_4\begin{Bmatrix}0{,}0, & 0{,}8, & 0{,}7\\ 1{,}0, & 0{,}1, & 0{,}7\\ 0{,}9, & 0{,}1, & 0{,}7\end{Bmatrix}=1{,}0
\end{array}\right\}=1{,}0$$

Тогда $\eta(r'_2)=\min\{1{,}0;\ 0{,}7;\ 0{,}7;\ 1{,}0;\ 1{,}0\}=0{,}7$.

Ответ: r'_2 есть отношение нечёткого строгого порядка.

Глава 4. Булева алгебра

Теория булевых алгебр является классическим разделом дискретной математики. Булева алгебра возникла в трудах английского математика Дж. Буля в 50-х годах XIX века.

Пусть дано множество X, элементы которого принимают значения на множестве $\{0;\,1\}$. Частичное упорядочивание такого множества можно изобразить так:

$$\left\{\begin{array}{l} x_i, \quad x_j, \quad \ldots, \quad x_n, \quad x_m, \quad \ldots, \quad x_s, \quad x_t \\ \underbrace{\sigma_i=0, \quad \sigma_j=0,}_{\le}\underbrace{\ldots,}_{\le}\ \underbrace{\sigma_n=0, \quad \sigma_m=1,}_{\le}\underbrace{\ldots,}_{\le}\ \underbrace{\sigma_s=1, \quad \sigma_t=1}_{\le}\end{array}\right\}, \tag{4.1}$$

где в верхней строке – булевы переменные $x_i, x_j,\ldots, x_n, x_m,\ldots, x_s, x_t$, ниже – их значения, а в самой нижней строке – отношение частичного порядка между каждой парой булевых переменных.

Так можно изобразить графически частично упорядоченное множество X, элементы которого принимают значения на множестве $\{0; 1\}$.

Операцию поиска верхней грани такого множества на универсальном множестве $\{0; 1\}$ называют *дизъюнкцией*, а оператор дизъюнкции обозначают так «$\vee$». Наибольшее значение или верхняя грань для каждой пары элементов подмножества $\{x_n, x_m, \ldots, x_s, x_t\}$ равна 1, а для пары элементов подмножества $\{x_i, x_j, \ldots, x_n\}$ равна 0. Точной верхней гранью множества является наибольшее среди верхних граней заданного подмножества, т.е. $\mathrm{Sup}X=\{(x_u \vee x_v)\}$.

Операцию поиска нижней грани такого множества X на универсальном множестве $\{0; 1\}$ называют ***конъюнкцией***, а оператор конъюнкции обозначают так «$\cdot$», «$*$», «$\wedge$» или «&».Наименьшее значение или нижняя грань для каждой пары элементов подмножества $\{x_i, x_j, \ldots, x_n\}$ равна 0. Точной нижней гранью множества является наименьшее значение среди нижних граней заданного подмножества, т.е. $\mathrm{Inf}X=(x_i \cdot x_j)=(x_i * x_j)=(x_i \wedge x_j)=(x_i \& x_j)$.

В настоящем пособии этот оператор будем записывать только так «$\cdot$»;

Операцию поиска дополнения элементу x на универсальном множестве $\{0; 1\}$, называют *отрицанием*, а оператор отрицания обозначают так «$\bar{x}$» или так «$\neg x$». Если x имеет значение 1, то $\bar{x}=0$. Если x имеет значение 0, то $\bar{x}=1$. Операторная запись отрицания имеет вид: $\mathrm{not}(x)=\bar{x}=\neg x$. В настоящем пособии этот оператор будем записывать только так «$\bar{x}$».

Множество $X=\{x_1, x_2,\ldots, x_n\}$, элементы которого принимают значения на множестве $\{0, 1\}$, и операции над элементами этих множеств (дизъюнкции, конъюнкции и отрицания) формируют *булевую алгебру*:

$$A=\langle X, \vee, \cdot, \bar{\ }, 0, 1\rangle, \quad (4.2)$$

где X – *носитель* булевой алгебры, $\{\vee, \cdot, \bar{\ }\}$ – *операции* булевой алгебры.

4.1. Булевы операции

Дизъюнкция – $f(x_1, x_2)=(x_1 \vee x_2)$ – есть бинарная операция, значение которой равно 0 в том и только в том случае, когда оба операнда равны 0.

При других значениях операндов она равна 1 (см. табл. 4.1).

Таблица 4.1

$\vee$	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
	0	0	0
	0	1	1
	1	0	1
	1	1	1

В программировании схема операции имеет вид $f(x_1, x_2)=\mathrm{disjunction}(x_1, x_2)$.

Операцию дизъюнкции можно выполнять на произвольном числе элементов множества X, опираясь на аксиому ассоциативности.

Например, $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)=(x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n)=\bigvee_{i=1}^{n} x_i$. (4.3)

Конъюнкция – $f(x_1, x_2)=(x_1 \cdot x_2)$ – есть бинарная операция, значение которой равно 1 в том и только в том случае, когда оба операнда равны 1. При значении равном 0 хотя бы одного операнда значение функции равно 0 (см. табл. 4.2).

В программировании схема операции имеет вид $f(x_1, x_2)$=conjunction(x_1, x_2).

Операцию конъюнкции можно выполнять над произвольным числом элементов множества X.

Например, $f(x_1, x_2,..., x_n)= (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)= \mathop{\&}\limits_{i=1}^{i=n} x_i$. (4.4)

Таблица 4.2

·	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
	0	0	0
	0	1	0
	1	0	0
	1	1	1

Отрицание – $f(x)=\overline{x}$ – есть унарная операция, значение которой на универсальном множестве {0; 1} противоположно значению операнда (см. табл. 4.3).

В программировании схема операции имеет вид $f(x)$=not(x).

Таблица 4.3

x	$f(x)$
1	0
0	1

Операцию отрицания можно выполнять над произвольным числом элементов множества X. Это – закон булевой алгебры или закон де Моргана.

Например,

$f(x_1,x_2,..., x_n)=\overline{(x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n)} = (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot ... \cdot \overline{x_n})$, ………(4.5)

$f(x_1, x_2,..., x_n)= \overline{(x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n)} = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee ... \vee \overline{x_n})$. (4.6)

4.2. Формулы и их эквивалентные преобразования

Функцию y=f(x1, x2,..., xn), значение которой и значения компонент аргумента принадлежат множеству {0, 1}, называют *булевой*, а многокомпонентный аргумент – *булевым* вектором. Компоненты булевого вектора называют *булевыми переменными*. Аналитическое выражение булевой функции, использующее только булевые переменные и операторы конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, называют *формулой* булевой функции.

При табличном описании функции необходимо для каждого набора двоичного переменных булевого вектора указывать её значение (см. табл. 4.4).

Если значение функции найдено для всех наборов булевого вектора, то функцию называют *детерминированной* или полностью определенной.

Если значение функции найдено не для всех наборов булевого вектора, то функцию называют *недетерминированной* или *частично определённой*.

Таблица 4.4

x_1	x_2	…	x_n	$f(x_1,x_2,\ldots\ldots x_n)$
0	0	……	0	0
1	0	……	0	0
0	1	…	0	1
1	1		0	1
…	…		…	……
1	1		1	0

Число строк таблицы детерминированной функции от n компонентов аргумента равно 2^n.

Число булевых функций для n компонентов аргумента определяется числом $|f(x_1, x_2,\ldots, x_n)|= 2^p$, где $p=2^n$.

Для n=1 число возможных булевых функций равно 4. Таблица истинности четырех булевых функций $f(x)$ изображена на табл. 4.5. Анализ этой таблицы позволяет дать имя каждой из функций:

– $f_0(x)$ – *константа* «0», так как она не изменяет своего значения при изменении значения аргумента, т.е. (y = 0),

Таблица 4.5

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

– $f_1(x)$ – *повторитель*, так как она принимает значения, равные значению аргумента, т.е. ($y = x$),

– $f_2(x)$ – отрицание, так как она принимает значения противоположные значению аргумента, т.е. ($y = \bar{x}$),

– $f_3(x)$ – *константа* «1», так как она не изменяет своего значения при изменении значения аргумента, т.е. (y = 1).

Для n=2 число возможных булевых функций равно $2^{2^2}=16$. Таблица истинности функций $f(x_1, x_2)$ изображена на табл. 4.6.

Таблица 4.6

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Эта таблица показывает, что булева функция $f(x_1,x_2)$ может быть описана шестнадцатью базовыми формулами, используя только две булевы переменные и операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания (см. табл. 4.7).

Обратите внимание: формулы булевых функций $f_2, f_4, f_6, f_9, f_{11}, f_{13}$ в базисе булевой алгебры не именованы, т.к. имеют достаточно сложное описание.

Были введены дополнительные операторы: импликации (символ «$\rightarrow$»), эквивалентности (символ «$\leftrightarrow$»), сложения по модулю 2 (символ «$\oplus$»), стрелка Пирса (символ «$\downarrow$»), штрих Шеффера (символ «$|$»):

- *импликация* – $y=f_{13}(x_1, x_2)=(x_1\rightarrow x_2)$ – есть бинарная операция, значение которой равно 0 в том и только в том случае, когда x_1=1 и x_2=0; при других значениях операндов значение функции равно 1 (см. табл. 4.8). В программировании схема операции имеет вид: $f(x_i, x_j)$=implication(x_i, x_j).
- *эквивалентность* – $y=f_9(x_1, x_2)=(x_1\leftrightarrow x_2)$ – есть бинарная операция, значение которой равно 1 в том и только в том случае, когда $x_1=x_2$; при $x_1\neq x_2$ значение функции равно 0 (см. табл. 4.8). В программировании схема операции имеет вид: $f(x_i, x_j)$=iff(x_i, x_j) или $f(x_i, x_j)$=equivalence(x_i, x_j).
- *сложение по модулю 2* – $y=f_6(x_1, x_2)=(x_1\oplus x_2)$ – есть бинарная операция, значение которой равно 0 в том и только в том случае, когда $x_1=x_2$; при $x_1\neq x_2$ значение функции равно 1 (см. табл. 4.8). В программировании схема операции имеет вид: $f(x_i, x_j)$=not(iff (x_i, x_j)).

- *стрелка Пирса* $y=f_8(x_1, x_2)=\overline{(x_1 \vee x_2)}=(x_1 \downarrow x_2)$ есть бинарная операция, значение которой равно 1 в том и только в том случае, когда $x_1=x_2=0$; при других значениях операндов значение функции равно 0 (см. табл. 4.8). В программировании схема операции имеет вид: $f(x_i, x_j)$=not(disjunction(x_i, x_j)).
- *штрих Шеффера* – $y=f_{14}(x_1, x_2)=\overline{(x_1 \cdot x_2)}= (x_1 \mid x_2)$ – есть бинарная операция, значение которой равно 0 в том и только в том случае, когда $x_1=x_2=1$; при других значениях операндов значение функции равно 1 (см. табл. 4.8). В программировании схема операции имеет вид: $f(x_i, x_j)$=not(conjunction(x_i, x_j)).

Таблица 4.7

$f(0,0)$	$f(0,1)$	$f(1,0)$	$f(1,1)$	Имя и формула функции
0	0	0	0	$y=f_0(x_1, x_2)=0$ – константа «0»,
0	0	0	1	$y=f_1(x_1, x_2)=(x_1 \cdot x_2)$ – конъюнкция,
0	0	1	0	$y=f_2(x_1, x_2)=\overline{(\bar{x}_1 \vee x_2)} = (x_1 \cdot \bar{x}_2)$,
0	0	1	1	$y=f_3(x_1, x_2)=x_1$ – повторитель x_1,
0	1	0	0	$y=f_4(x_1, x_2)= \overline{(\bar{x}_2 \vee x_1)} = (x_2 \cdot \bar{x}_1)$,
0	1	0	1	$y=f_5(x_1, x_2)=x_2$ – повторитель x_2,
0	1	1	0	$y=f_6(x_1, x_2)=(x_1 \cdot \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \cdot x_2)$,
0	1	1	1	$y=f_7(x_1, x_2)=x_1 \vee x_2$ – дизъюнкция,
1	0	0	0	$y=f_8(x_1, x_2)=\overline{(x_1 \vee x_2)}$– отрицание дизъюнкции,
1	0	0	1	$y=f_9(x_1, x_2)=$ $\overline{(x_1 \cdot \bar{x}_2) \& (\bar{x}_1 \cdot x_2)} = (x_1 \cdot x_2) \vee (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2)$,
1	0	1	0	$y=f_{10}(x_1, x_2)= \bar{x}_2$ – инверсия x_2,
1	0	1	1	$y=f_{11}(x_1, x_2)=x_1 \vee \bar{x}_2 = \overline{(\bar{x}_1 \cdot x_2)}$,
1	1	0	0	$y=f_{12}(x_1, x_2)= \bar{x}_1$ – инверсия x_1,
1	1	0	1	$y=f_{13}(x_1, x_2)= \bar{x}_1 \vee x_2 = \overline{(x_1 \cdot \bar{x}_2)}$,
1	1	1	0	$y=f_{14}(x_1, x_2)=\overline{(x_1 \cdot x_2)}$ –отрицание конъюнкции,
1	1	1	1	$y=f_{15}(x_1, x_2)=1$ – константа «1».

Расширенное множество символов унарных и бинарных операций есть:

$$\Sigma_0 = \{ \bar{\ }, \cdot, \vee, \oplus, \leftrightarrow, \rightarrow, \downarrow, \mid \}. \qquad (4.7)$$

Анализ таблиц 4.5, 4.6, 4.7 показывает, что существуют функции, зависящие от меньшего числа переменных. Например, $f_0(x_1, x_2)$ и $f_{15}(x_1, x_2)$ вообще не зависят от двоичных переменных, а $f_3(x_1, x_2)$, $f_5(x_1, x_2)$, $f_{10}(x_1, x_2)$ и $f_{12}(x_1, x_2)$ зависят только от одной двоичной переменной.

Функция, которая сводится к зависимости от меньшего числа двоичных переменных, называется *вырожденной*, а функция, существенно зависящая от всех двоичных переменных, - *невырожденной*.

В табл. 4.8 приведены алгебраические выражения булевых функций, использующих Σ_0.

Таблица 4.8

Значения $y=f(x_1, x_2)$				Формула $y=f_i(x_1, x_2)$,
$f(0,0)$	$f(0,1)$	$f(1,0)$	$f(1,1)$	использующие сигнатуру алгебры логики – Σ_0
0	0	0	0	$y=f_0(x_1, x_2)=0$ – константа «0»,
0	0	0	1	$y=f_1(x_1, x_2)=(x_1 \cdot x_2)$ – конъюнкция,
	0	1	0	$y=f_2(x_1, x_2)=\overline{(x_1 \to x_2)}$ – отрицание прямой импликации,
0	0	1	1	$y=f_3(x_1, x_2)=x_1$ – повторитель x_1,
0	1	0	0	$y=f_4(x_1, x_2)=\overline{(x_2 \to x_1)}$ –отрицание обратной импликации,
0	1	0	1	$y=f_5(x_1, x_2)=x_2$ – повторитель x_2,
0	1	1	0	$y=f_6(x_1, x_2)=\overline{(x_1 \leftrightarrow x_2)}=(x_1 \oplus x_2)$ – сложение по модулю 2,
0	1	1	1	$y=f_7(x_1, x_2)=(x_1 \vee x_2)$ – дизъюнкция,
1	0	0	0	$y=f_8(x_1, x_2)=\overline{(x_1 \vee x_2)}=(x_1 \downarrow x_2)$ – стрелка Пирса,
1	0	0	1	$y=f_9(x_1, x_2)=(x_1 \leftrightarrow x_2)$ – эквивалентность,
1	0	1	0	$y=f_{10}(x_1, \mathrm{x}_2)=\overline{x_2}$ – инверсия x_2,
1	0	1	1	$y=f_{11}(x_1, x_2)=x_2 \to x_1$ – обратная импликация,
1	1	0	0	$y=f_{12}(x_1, x_2)=\overline{x_1}$ – инверсия x_1,
1	1	0	1	$y=f_{13}(x_1, x_2)=x_1 \to x_2$ – прямая импликация,
1	1	1	0	$y=f_{14}(x_1, x_2)=\overline{(x_1 \cdot x_2)}=(x_1 \mid x_2)$ – штрих Шеффера,
1	1	1	1	$y=f_{15}(x_1, x_2)=1$ – константа «1».

Формулы, представляющие одно и то же значение булевой функции при одинаковом наборе булевых переменных, называются *эквивалентными* или *равносильными*. Эквивалентность формул обозначают символом «$\leftrightarrow$», а равносильность – «=».

Если даны булевы переменные x_i и x_j, то $F=\overline{x}_i$, $F=\overline{x}_j$, $F=(x_i \vee x_j)$, $F=(x_i \cdot x_j)$ называют *элементарными* формулами, а $F=\overline{F}_i$, $F=\left(F_i \vee F_j\right)$, $F=\left(F_i \cdot F_j\right)$– *производными.*

4.3 Законы булевой алгебры

Правило подстановки: если даны равносильные формулы F_i и F_j, т.е. $(F_\mathrm{i}=F_\mathrm{j})$, которые содержат булеву переменную x, и если всюду вместо x подставить произвольную формулу F, то можно получить также равносильные формулы F_m и F_n, т. е. $F_\mathrm{m}=F_\mathrm{n}$.

Правило замещения: если даны две равносильные формулы F_i и F_j, т.е. $(F_\mathrm{i}=F_\mathrm{j})$, и существует формула F_k, равносильная формуле F_i, т. е. $(F_\mathrm{i}=F_\mathrm{k})$, то формулу F_i можно заместить формулой F_k и получить новую формулу $(F_\mathrm{k}=F_\mathrm{j})$.

Не обязательно замещение всюду в алгебраическом выражении булевой функции.

Законы булевой алгебры:

$$\left.\begin{array}{l}
\textit{коммутативности}: (F_i \vee F_j) = (F_j \vee F_i),\ (F_i \cdot F_j) = (F_j \cdot F_i),\\
\textit{ассоциативности}: \begin{array}{l} F_i \vee (F_j \vee F_k) = (F_j \vee F_i) \vee F_k,\\ F_i \cdot (F_j \cdot F_k) = (F_j \cdot F_i) \cdot F_k,\end{array}\\
\textit{дистрибутивности}: \begin{cases} F_i \vee (F_j \cdot F_k) = (F_i \vee F_j)\cdot(F_i \vee F_k),\\ F_i \cdot (F_j \vee F_k) = (F_i \cdot F_j) \vee (F_i \cdot F_k),\end{cases}\\
\textit{идемпотентности}: (F_i \vee F_i) = F_i,\ (F_i \cdot F_i) = F_i,\\
\textit{поглощения}: F_i \vee (F_i \cdot F_j) = F_i,\ F_i \cdot (F_i \vee F_j) = F_i,\\
\textit{третьего не дано}: F_i \vee \overline{F_i} = 1,\\
\textit{противоречия}: F_i \cdot \overline{F_i} = 0_i,\\
\textit{двойного отрицания}: \overline{\overline{F}}_i = F_i,\\
\textit{обобщенного склеивания}: x \cdot F \vee \overline{x} \cdot F = F,\ \left(x \vee F\right)\cdot\left(\overline{x} \vee F\right) = F,\\
\textit{де Моргана}: \overline{(F_i \vee F_j)} = \overline{F_i} \cdot \overline{F}_j,\ \overline{\left(F_i \cdot F_j\right)} = \overline{F_i} \vee \overline{F}_j,\\
\textit{Порецкого}: F_i \cdot (\overline{F}_i \vee F_j) = F_i \cdot F_j,\ F_i \vee (\overline{F}_i \cdot F_j) = F_i \vee F_j,\\
\textit{свойства универсальных констант}: \begin{array}{l} F_i \cdot 0 = 0,\ F_i \vee 0 = F_i,\\ F_i \cdot 1 = F_i,\ F_i \vee 1 = 1.\end{array}
\end{array}\right\} \quad (4.8)$$

По каждой формуле можно восстановить таблицу истинности булевой функции, но не наоборот, так как каждой булевой функции можно представить несколько эквивалентных формул.

Так, эквивалентными или равносильными формулами булевых функций двух булевых переменных являются:

$$\begin{array}{l}
1.\ f_2(x_1, x_2) = (x_1 \cdot \overline{x}_2) = \overline{\left(\overline{x_1} \vee x_2\right)} = \overline{\left(x_1 \to x_2\right)},\\
2.\ f_6(x_1, x_2) = \left(\overline{x}_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \overline{x}_2\right) = \overline{\left(x_1 \leftrightarrow x_2\right)} = (x_1 \oplus x_2),\\
3.\ f_8(x_1, x_2) = (\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2) = \overline{\left(x_1 \vee x_2\right)} = (x_1 \downarrow x_2),\\
4.\ f_9(x_1, x_2) = ((\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2) \vee (x_1 \cdot x_2) = \overline{(x_1 \oplus x_2)} = (x_1 \leftrightarrow x_2),\\
5.\ f_{13}(x_1, x_2) = (\overline{x}_1 \vee x_2) = \overline{(x_1 \cdot \overline{x}_2)} = (x_1 \to x_2),\\
6.\ f_{14}(x_1, x_2) = (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2) = \overline{\left(x_1 \cdot x_2\right)} = (x_1 \mid x_2).
\end{array} \quad (4.9)$$

Используя законы булевой алгебры и правила подстановки и замещения, можно выполнять суперпозицию базовых булевых функций двух булевых переменных $f_0, f_1, \ldots, f_{15}$ для получения формул булевых функций от n переменных и выполнять их эквивалентные преобразования.

При выполнении эквивалентных преобразований следует помнить, что:

- ✓ операция конъюнкции «·» сильнее операции дизъюнкции «∨»,

- ✓ если в формуле есть символы операций $\{\oplus, \leftrightarrow, \to, \downarrow, |\}$, то их заменить по правилам булевой алгебры на $\{\bar{\ }, \cdot, \vee\}$.
- ✓ если « ‾ » относится к формуле ($F_i \cdot F_j$) или ($F_i \vee F_j$), то прежде всего выполнить эти преобразования по закону де Моргана $\overline{\left(F_i \cdot F_j\right)} = \overline{F}_i \vee \overline{F}_j$ или $\overline{\left(F_i \vee F_j\right)} = \overline{F}_i \cdot \overline{F}_j$.

<u>Пример.</u> Упростить алгебраическое выражение:

$F = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x}_4 \vee \overline{x}_1 \cdot x_3 \vee \overline{x}_2 \cdot x_3 \vee x_3 \cdot x_4$.

- По закону коммутативности:

$F = x_3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_4 \vee x_3 \cdot \overline{x}_1 \vee x_3 \cdot \overline{x}_2 \vee x_3 \cdot x_4$,

- по закону дистрибутивности:

$F = x_3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_4 \vee x_3 \cdot \overline{x}_1 \vee x_3 \cdot (\overline{x}_2 \vee x_4)$,

- по закону дистрибутивности:

$F = x_3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_4 \vee x_3 \cdot (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_4)$,

- по закону дистрибутивности:

$F = x_3 \cdot ((x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_4) \vee (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_4))$,

- по закону де Моргана:

$F = x_3 \cdot ((x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_4) \vee \overline{\left(x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_4\right)})$,

- по закону противоречия:

$F = x_3 \cdot 1 = x_3$.

То есть $F = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x}_4 \vee \overline{x}_1 \cdot x_3 \vee \overline{x}_2 \cdot x_3 \vee x_3 \cdot x_4 = x_3$.

<u>Пример.</u> Упростить алгебраическое выражение:

$F = \left(x_1 \cdot \overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 \cdot x_2\right) \cdot \overline{\left(x_1 \cdot x_2\right)} \vee \left(x_1 \cdot x_2\right) \cdot \overline{\left(x_1 \cdot \overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 \cdot x_2\right)}$.

- По закону де Моргана:

$F = (x_1 \cdot \overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 \cdot x_2) \cdot (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2) \vee (x_1 \cdot x_2) \cdot (\overline{x}_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee \overline{x}_2)$,

- по закону дистрибутивности:

$F = x_1 \cdot \overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot x_2$,

- по законам коммутативности и дистрибутивности:

$F = \overline{x}_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot (\overline{x}_2 \vee x_2)$,

- по закону противоречия:

$F = \overline{x}_1 \cdot x_2 \vee x_1$,

- по закону Порецкого:

$F = x_1 \vee x_2$.

То есть $F = \left(x_1 \cdot \overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 \cdot x_2\right) \cdot \overline{\left(x_1 \cdot x_2\right)} \vee \left(x_1 \cdot x_2\right) \cdot \overline{\left(x_1 \cdot \overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 \cdot x_2\right)} = (x_2 \vee x_1)$.

<u>Пример.</u> Упростить алгебраическое выражение:

$F = \overline{\left(\overline{x}_1 \vee x_2\right) \vee \left(\left(\overline{x}_1 \vee x_3\right) \cdot x_2\right)}$.

- По закону де Моргана:

$F=\overline{\left(\bar{x}_1 \vee x_2\right)} \cdot \overline{\left(\left(\bar{x}_1 \vee x_3\right) \cdot x_2\right)}$,

- по закону де Моргана:

$F=x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot (\overline{\left(\bar{x}_1 \vee x_3\right)} \vee \bar{x}_2)$,,

- по закону де Моргана:

$F=x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot (x_1 \cdot \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2)$,

- по закону дистрибутивности:

$F=x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2$,

- по закону поглощения:

$F=x_1 \cdot \bar{x}_2$.

То есть $F=\overline{\left(\bar{x}_1 \vee x_2\right) \vee \left(\left(\bar{x}_1 \vee x_3\right) \cdot x_2\right)}=x_1 \cdot \bar{x}_2$.

<u>Пример.</u> Упростить алгебраическое выражение:

$F=\overline{\left(x_1 \rightarrow x_2\right)} \cdot \left(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4\right) \vee \left(x_1 \downarrow x_2\right) \cdot \overline{\left(x_3 \cdot x_4\right)}$.

- Преобразовать выражение в базис булевой алгебры:

$F=\overline{\left(\bar{x}_1 \vee x_2\right)} \cdot \left(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4\right) \vee \overline{\left(x_1 \vee x_2\right)} \cdot \overline{\left(x_3 \cdot x_4\right)}$,

- по закону де Моргана:

$F=(x_1 \cdot \bar{x}_2) \cdot (\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4) \vee (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2) \cdot (\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$,

- по закону дистрибутивности:

$F=(x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_4) \vee (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_4)$,

- по закону дистрибутивности:

$F=\bar{x}_2 \cdot (x_1 \cdot \bar{x}_3 \vee x_1 \cdot \bar{x}_4) \vee (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_4)$,

- по закону дистрибутивности:

$F=\bar{x}_2 \cdot (\bar{x}_3 \cdot (x_1 \vee \bar{x}_1) \vee \bar{x}_4 \cdot (x_1 \vee \bar{x}_1))$,

- по закону противоречия:

$F=\bar{x}_2 \cdot (\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$.

То есть $F=\overline{\left(x_1 \rightarrow x_2\right)} \cdot \left(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4\right) \vee \left(x_1 \downarrow x_2\right) \cdot \overline{\left(x_3 \cdot x_4\right)}=\bar{x}_2 \cdot (\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$.

4.4. Функционально полные системы

Многие базовые функций двух булевых переменных $f_0, f_1, \ldots, f_{15}$ обладают свойствами, которые ограничивают их использование при формировании формул булевой функции от n булевых переменных. Поэтому необходимо определить условия для создания функционально полной системы базовых функций, позволяющей аналитически описывать любую булеву функцию.

✓ *Свойство самодвойственности*. Функция $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ называется *самодвойственной*, если при изменении знаков каждой компоненты аргумента она изменяет свое значение, т.е.

$$f(x_1, x_2,\ldots, x_n)=\overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2,\ldots, \overline{x}_n).$$

Например (см. табл. 4.7), $f_3(x_1, x_2)=x_1$ и $f_{12}(x_1, x_2)=\overline{x}_1$, $f_5(x_1, x_2)=x_2$ и $f_{10}(x_1, x_2)=\overline{x}_2$ являются самодвойственными функциями, так как при изменении значения одной булевой переменной они изменяют свое значение.

Любая функция, полученная с помощью операций суперпозиции только из самодвойственных булевых функций, сама будет самодвойственной. Поэтому самодвойственные булевые функции не позволяют формировать не самодвойственные функции.

✓ *Свойство монотонности*. Функция $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ называется *монотонной*, если при сравнении ее значений для двух булевых векторов $(\sigma_{11}, \sigma_{12},\ldots, \sigma_{1i},\ldots, \sigma_{1n})$ и $(\sigma_{21},\sigma_{22},\ldots, \sigma_{1i},\ldots, \sigma_{2n})$ и при $\sigma_{1i}\le\sigma_{2i}$ выполняется условие:

$f(\sigma_{11}, \sigma_{12},\ldots, \sigma_{1i},\ldots, \sigma_{1n})\le f(\sigma_{21}, \sigma_{22},\ldots, \sigma_{2i},\ldots, \sigma_{2n})$, где $\sigma_i, \sigma_j\in\{0, 1\}$.

Например, для булевых функции двух булевых переменных это:

если $(0. 0)\le(0, 1)$, то $f(0, 0)\le f(0, 1)$,
если $(0, 0)\le(1, 0)$, то $f(0, 0)\le f(1, 0)$,
если $(0, 1)\le(1, 1)$, то $f(0, 1)\le f(1, 1)$,
если $(1, 0)\le(1, 1)$, то $f(1, 0)\le f(1, 1)$.

Эти условия выполняют для $f_0(x_1, x_2)=0$, $f_1(x_1, x_2)=(x_1\cdot x_2)$, $f_3(x_1, x_2)=x_1$, $f_5(x_1, x_2)=x_2$, $f_7(x_1, x_2)=(x_1\vee x_2)$, $f_{15}(x_1, x_2)=1$ (см. табл. 4.7).

Любая функция, полученная с помощью операции суперпозиции только из монотонных булевых функций, сама является монотонной. Поэтому множество монотонных функций не позволяет формировать немонотонные функции.

✓ *Свойство линейности*. Функция $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ называется *линейной*, если полиномы Жегалкина, не содержат конъюнкции двух или нескольких булевых переменных, т.е. имеет вид:

$$f(x_1, x_2,\ldots, x_n)=P(x_1, x_2,\ldots, x_n)=\beta_0\cdot 1\oplus\beta_1\cdot x_1\oplus\ldots\oplus\beta_n\cdot x_n. \qquad (4.10)$$

Линейность булевых функций удобно проверить, опираясь на алгебру Жегалкина.

Основные законы алгебры Жегалкина:

Таблица 4.9

Имя закона	Равносильные формулы
o *коммутативности*	$x_1\oplus x_2=x_2\oplus x_1$
o *ассоциативности*	$x_1\oplus(x_2\oplus x_3)=(x_1\oplus x_2)\oplus x_3$,
o *дистрибутивности*	$x_1\cdot(x_2\oplus x_3)=x_1\cdot x_2\oplus x_1\cdot x_3$,
o *сложения по модулю2*	$x\oplus x=0$, $x\oplus\overline{x}=1$,
o *свойство* «1»	$x\oplus 1=\overline{x}$,
o *свойство* «0»	$x\oplus 0=x$.

Алгебра Жегалкина позволяет любую булеву функцию представить полиномом вида:

$$P(x_1, x_2,\ldots, x_n)=\beta_0\cdot 1 \bigoplus^{\binom{n}{1}} \beta_{1i}\cdot x_i \bigoplus^{\binom{n}{2}}_{i\neq j} \beta_{2j}\cdot x_j\cdot x_j \bigoplus^{\binom{n}{3}}_{i\neq j\neq m} \beta_{3k}\cdot x_i\cdot x_j\cdot x_m \oplus \ldots \bigoplus^{\binom{n}{n}}_{i\neq j\neq\ldots\neq n} \beta_{3s}\cdot x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n, \quad (4.11)$$

где $\binom{n}{i}$ – сочетания из n булевых переменных по i.

Если полином Жегалкина для конкретной булевой функции имеет вид $P(x_1, x_2,\ldots, x_n)=\beta_0\cdot 1\oplus\beta_1\cdot x_1\oplus\beta_2\cdot x_2\oplus\ldots\oplus\beta_n\cdot x_n$, то булева функция *линейная*.

Если булева функция задана таблицей (см. табл. 4.6), то можно вычислить все коэффициенты β_i, составив систему уравнений для каждого набора булевых переменных. Если же она задана формулой, то можно вычислить полином Жегалкина, преобразовав ее в конъюнктивный базис $F_2=\{\cdot, \bar{\ }\}$ и учитывая свойство $\bar{x}=(x\oplus 1)$ или $\bar{F}=(F\oplus 1)$.

Пример. Дана булева функция $f_7(x_1, x_2)=(x_1\vee x_2)$.

- Формирование полинома Жегалкина по таблице 4.6:

– вычислить β_i по известным значениям булевой функции:

$$\begin{cases} f_7(0, 0)=0=\beta_0\cdot 1\oplus \beta_1\cdot 0 \oplus \beta_2\cdot 0 \oplus \beta_3\cdot 0\cdot 0, \text{ откуда } \beta_0=0,\\ f_7(0, 1)=1=\beta_0\cdot 1\oplus \beta_1\cdot 0 \oplus \beta_2\cdot 1\oplus \beta_3\cdot 0\cdot 1, \text{ откуда } \beta_2=1,\\ f_7(1, 0)=1=\beta_0\cdot 1\oplus \beta_1\cdot 1\oplus \beta_2\cdot 0\oplus \beta_3\cdot 1\cdot 0, \text{ откуда } \beta_1=1,\\ f_7(1, 1)=1=\beta_0\cdot 1\oplus \beta_1\cdot 1\oplus \beta_2\cdot 1\oplus \beta_3\cdot 1\cdot 1, \text{ откуда } \beta_3=1. \end{cases}$$

Следовательно, $P_7(x_1, x_2)=x_1\oplus x_2\oplus x_1\cdot x_2$.

- Формирование полинома Жегалкина по формуле булевой функции:

– преобразовать формулу в конъюнктивный базис:

$(x_1\vee x_2)=\overline{\left(\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\right)}$,

– преобразовать формулу $\overline{\left(\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\right)}$ по законам алгебры Жегалкина:

$\overline{\left(\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\right)}=((x_1\oplus 1)\cdot(x_2\oplus 1))\oplus 1=x_1\cdot x_2\oplus x_1\cdot 1\oplus x_2\cdot 1\oplus 1\cdot 1\oplus 1=(x_1\oplus x_2\oplus x_1\cdot x_2)$.

Ответ: $P_7(x_1, x_2)=(x_1\oplus x_2\oplus x_1\cdot x_2)$, т.е. $f_7(x_1, x_2)$ – нелинейная булева функция.

Пример. Дана булева функция $f_{13}(x_1, x_2)=(x_1\rightarrow x_2)$.

- Формирование полинома Жегалкина по таблице 4.6:

– вычислить β_i по известным значениям булевой функции:

$$\begin{cases} f_{13}(0, 0)=1=\beta_0\cdot 1\oplus \beta_1\cdot 0 \oplus \beta_2\cdot 0 \oplus \beta_3\cdot 0\cdot 0, \text{ откуда } \beta_0=1,\\ f_{13}(0, 1)=1=\beta_0\cdot 1\oplus \beta_1\cdot 0 \oplus \beta_2\cdot 1\oplus \beta_3\cdot 0\cdot 1, \text{ откуда } \beta_2=0,\\ f_{13}(1, 0)=0=\beta_0\cdot 1\oplus\beta_1\cdot 1\oplus\beta_2\cdot 0\oplus\beta_3\cdot 1\cdot 0, \text{ откуда } \beta_1=1,\\ f_{13}(1, 1)=1=\beta_0\cdot 1\oplus\beta_1\cdot 1\oplus\beta_2\cdot 1\oplus\beta_3\cdot 1\cdot 1, \text{ откуда } \beta_3=1. \end{cases}$$

Следовательно, $P_{13}(x_1, x_2)=1\oplus x_1\oplus x_1\cdot x_2$.

- Формирование полинома Жегалкина по формуле булевой функции:

– преобразовать формулу в конъюнктивный базис:

$(x_1 \to x_2) = (\bar{x}_1 \vee x_2) = \overline{\left(x_1 \cdot \bar{x}_2\right)}$,

– преобразовать формулу $\overline{\left(x_1 \cdot \bar{x}_2\right)}$ по законам алгебры Жегалкина:

$\overline{\left(x_1 \cdot \bar{x}_2\right)} = x_1 \cdot (x_2 \oplus 1) \oplus 1 = x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \cdot 1 \oplus 1 = 1 \oplus x_1 \oplus x_1 \cdot x_2$.

Ответ: $P_{13}(x_1, x_2) = 1 \oplus x_1 \oplus x_1 \cdot x_2$, т.е. $f_{13}(x_1, x_2)$ – нелинейная булева функция.

Пример. Дана булева функция $f_9(x_1, x_2) = (x_1 \leftrightarrow x_2)$.

- Формирование полинома Жегалкина по таблице 4.6:

– вычислить β_i по известным значениям булевой функции и булевых переменных:

$$\begin{cases} f_9(0, 0) = 1 = \beta_0 \cdot 1 \oplus \beta_1 \cdot 0 \oplus \beta_2 \cdot 0 \oplus \beta_3 \cdot 0 \cdot 0, \text{ откуда } \beta_0 = 1, \\ f_9(0, 1) = 0 = \beta_0 \cdot 1 \oplus \beta_1 \cdot 0 \oplus \beta_2 \cdot 1 \oplus \beta_3 \cdot 0 \cdot 1, \text{ откуда } \beta_2 = 1, \\ f_9(1, 0) = 0 = \beta_0 \cdot 1 \oplus \beta_1 \cdot 1 \oplus \beta_2 \cdot 0 \oplus \beta_3 \cdot 1 \cdot 0, \text{ откуда } \beta_1 = 1, \\ f_9(1, 1) = 1 = \beta_0 \cdot 1 \oplus \beta_1 \cdot 1 \oplus \beta_2 \cdot 1 \oplus \beta_3 \cdot 1 \cdot 1, \text{ откуда } \beta_3 = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $P_9(x_1, x_2) = 1 \oplus x_1 \oplus x_2$.

- Формирование полинома Жегалкина по формуле булевой функции:

– преобразовать формулу в конъюнктивный базис:

$(x_1 \leftrightarrow x_2) = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \vee x_1 \cdot x_2) = \overline{\left(\overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2}\right) \cdot \overline{\left(x_1 \cdot x_2\right)}}$,

– преобразовать формулу $\overline{\left(\overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2}\right) \cdot \overline{\left(x_1 \cdot x_2\right)}}$, по законам алгебры Жегалкина:

$\overline{\left(\overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2}\right) \cdot \overline{\left(x_1 \cdot x_2\right)}} = (((x_1 \oplus 1) \cdot (x_2 \oplus 1)) \oplus 1) \cdot (x_1 \cdot x_2 \oplus 1) \oplus 1 =$

$(x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1 \oplus 1) \cdot (x_1 \cdot x_2 \oplus 1) \oplus 1 = x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \oplus x_1 \cdot x_2 \oplus x_2 \oplus 1 = (1 \oplus x_1 \oplus x_2)$.

Ответ: $P_9(x_1, x_2) = 1 \oplus x_1 \oplus x_2$, т.е. $f_9(x_1, x_2)$ – линейная булева функция.

Булева функция, полученная с помощью операции суперпозиции только из линейных булевых функций, сама является линейной. Поэтому множество линейных функций не позволяет формировать нелинейные функции.

✓ *Свойство сохранения* 0. Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *сохраняющей* «0», если для булевых переменных аргумента булевой функции, равных (0, 0,..., 0), функция принимает значение $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$.

Например, $f_0(0. 0) = 0$, $f_3(0, 0) = 0$, $f_7(0, 0) = 0$ и др.

Любая функция, полученная с помощью операции суперпозиции только из функций, сохраняющих 0, сама является функцией, сохраняющей 0. Поэтому множество функций, обладающих этим свойством, не позволяет формировать функции, не сохраняющие 0.

✓ *Свойство сохранения* 1. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *сохраняющей* «1», если для булевых переменных аргумента булевой функции, равных (1, 1,…, 1), функция принимает значение $f(1, 1, \ldots, 1) = 1$.

Например, $f_1(1, 1) = 1$, $f_3(1, 1) = 1$, $f_5(1, 1) = 1$ и др.

Любая функция, полученная с помощью операции суперпозиции только из функций, сохраняющих 1, сама является сохраняющей 1. Поэтому множество функций, обладающих этим свойством, не позволяет формировать функции, не сохраняющие 1.

Булевы функции, представленные в табл. 4.6 и обладающие вышерассмотренными свойствами, отмечены в таблице 4.10 символом «1».

Таблица 4.10

Аргумент		Значения функций															
x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
с в о й с т в а ф у н к ц и й																	
сохраняющая «0»		1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
сохраняющая «1»		0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
самодвойственная		0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
монотонная		1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
линейная		1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1

Итак, чтобы описать любую булеву функцию от n булевых переменных необходимо найти среди множества базовых функций от двух булевых переменных $f_0, f_1, \ldots f_{15}$, по крайней мере, одну функцию, не сохраняющую «1», одну функцию, не сохраняющую «0», одну функцию не самодвойственную, одну функцию немонотонную и одну нелинейную функцию. Набор таких базовых функций формирует *функционально полную систему*, которая позволяет описывать любые сколь угодно сложные булевы функции. Анализ таблицы 4.10 показывает, что таких наборов базовых функций $\{f_i, f_j, \ldots, f_k\}$ может быть много.

Набор символов алгебраических операций функционально полной системы порождает базис самостоятельной алгебраической системы Σ_i.

Ниже приведены некоторые базисы Σ_i.

$\Sigma_0=\{\cdot, \vee, \bar{\ }, \oplus, \leftrightarrow, \rightarrow, |, \downarrow\}$ – базис алгебры логики,

$\Sigma_1=\{\cdot, \vee, \bar{\ }\}$ – базис алгебры Буля,

$\Sigma_2=\{\cdot, \bar{\ }\}$ – базис конъюнктивный,

$\Sigma_3=\{\vee, \bar{\ }\}$ – базис дизъюнктивный,

$\Sigma_4=\{\cdot, \oplus, 1\}$ – базис алгебры Жегалкина,

$\Sigma_5=\{\downarrow\}$ – базис алгебры Вебба,

$\Sigma_6=\{\,|\,\}$ – базис алгебры Шеффера и т.д.,

$\Sigma_7=\{\rightarrow, \bar{\ }\}$ – импликативный базис.

В таблицах 4.11 – 4.15 приведены эквивалентные формулы в некоторых функционально полных базисах.

Таблица 4.11

f_i	Формулы в базисах Σ_0 и Σ_2
f_1	$(x_1 \cdot x_2)$.
f_6	$(x_1 \oplus x_2)=\overline{(\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2)} \cdot \overline{(x_1 \cdot x_2)}$.
f_7	$(x_1 \vee x_2)= \overline{(\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2)}$.
f_8	$(x_1 \downarrow x_2)=(\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2)$.
f_9	$(x_1 \leftrightarrow x_2)=\overline{(x_1 \cdot \bar{x}_2)} \cdot \overline{(\bar{x}_1 \cdot x_2)}$.
f_{13}	$(x_1 \rightarrow x_2)=\overline{(x_1 \cdot \bar{x}_2)}$.
f_{14}	$(x_1 \mid x_2)= \overline{(x_1 \cdot x_2)}$.

Таблица 4.12

f_i	Формулы в базисах Σ_0 и Σ_3
f_1	$(x_1 \cdot x_2)=\overline{(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)}$.
f_6	$(x_1 \oplus x_2)=\overline{(\bar{x}_1 \vee x_2)} \vee \overline{(x_1 \vee \bar{x}_2)}$.
f_7	$(x_1 \vee x_2)$.
f_8	$(x_1 \downarrow x_2)=\overline{(x_1 \vee x_2)}$.
f_9	$(x_1 \leftrightarrow x_2)= \overline{\overline{(\bar{x}_1 \vee x_2)} \vee \overline{(x_1 \vee \bar{x}_2)}}$.
f_{13}	$(x_1 \rightarrow x_2)=(\bar{x}_1 \vee x_2)$.
f_{14}	$(x_1 \mid x_2)=(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$.

Таблица 4.13

f_i	Формулы в базисах Σ_0 и Σ_4	f_i	Формулы в базисах Σ_0 и Σ_4
f_1	$(x_1 \cdot x_2)$.	f_{12}	$\bar{x} = 1 \oplus x$,
f_7	$(x_1 \vee x_2)=(x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 \cdot x_2)$,	f_{13}	$(x_1 \rightarrow x_2)=(1 \oplus x_1 \oplus x_2)$,
f_8	$(x_1 \downarrow x_2)=(1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 \cdot x_2)$,	f_{14}	$(x_1 \mid x_2)=(1 \oplus x_1 \cdot x_2)$.
f_9	$(x_1 \leftrightarrow x_2)=(1 \oplus x_1 \oplus x_2)$,		

Таблица 4.14

f_i	Формулы в базисах Σ_0 и Σ_5
f_1	$(x_1 \cdot x_2)=(x_1 \downarrow x_1) \downarrow (x_2 \downarrow x_2)$.
f_6	$(x_1 \oplus x_2)=[(x_1 \downarrow x_1) \downarrow (x_2 \downarrow x_2)] \downarrow$ $\downarrow (x_1 \downarrow x_2) \downarrow [(x_1 \downarrow x_1) \downarrow (x_2 \downarrow x_2)]$.
f_7	$(x_1 \vee x_2)=(x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2)$.
f_9	$(x_1 \leftrightarrow x_2)=[x_1 \downarrow (x_2 \downarrow x_2)] \downarrow [x_2 \downarrow (x_1 \downarrow x_1)]$.
f_{13}	$(x_1 \rightarrow x_2)=[x_2 \downarrow (x_1 \downarrow x_1)] \downarrow [x_2 \downarrow (x_1 \downarrow x_1)]$.
f_{14}	$(x_1 \mid x_2)=[(x_1 \downarrow x_1) \downarrow (x_2 \downarrow x_2)] \downarrow$ $\downarrow [(x_1 \downarrow x_1) \downarrow (x_2 \downarrow x_2)]$.

Таблица 4.15

f_i	Формулы в базисах Σ_0 и Σ_6
f_1	$(x_1 \cdot x_2)=(x_1 \mid x_2) \mid (x_1 \mid x_2)$.
f_6	$(x_1 \oplus x_2)=[x_1 \mid (x_2 \mid x_2)] \mid [x_2 \mid (x_1 \mid x_1)]$.
f_7	$(x_1 \vee x_2)=(x_1 \mid x_2) \mid (x_1 \mid x_2)$.
f_8	$(x_1 \downarrow x_2)=[(x_1 \mid x_1) \mid (x_2 \mid x_2)] \mid (x_2 \mid x_2)$.
f_9	$(x_1 \leftrightarrow x_2)=[(x_1 \mid x_1) \mid (x_2 \mid x_2)] \mid (x_1 \mid x_2)$.
f_{13}	$(x_1 \rightarrow x_2)=(x_1 \mid (x_2 \mid x_2))$.

4.5. Нормальные формы формул

Если компоненты булева вектора принимают значения $\sigma_i \in \{0, 1\}$, то справедлива запись:

$$x_i^{\sigma_i} = \begin{cases} x_i, & \text{если} \quad \sigma = 1, \\ \bar{x}_i, & \text{если} \quad \sigma = 0. \end{cases} \tag{4.12}$$

При такой записи булевых переменных возможно описание булевой функции в дизъюнктивной или конъюнктивной нормальной формах.

➢ *Дизъюнктивная нормальная форма*. Конъюнкция $x_i^{\sigma_i}$ всех компонент аргумента представляет формулу вида $K_i = (x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n})$, которую называют *элементарной конъюнкцией*. Дизъюнкция всех элементарных конъюнкций K_i по известным наборам значений компонент булевого вектора есть *дизъюнктивная нормальная форма формулы* булевой функции или сокращенно – ДНФ.

Тогда всякая булевая функция $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ может быть представлена в виде:

$$f(x_1, x_2,..., x_m,..., x_n) = \bigvee_m \left(x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_m^{\sigma_m} \cdot f\left(\sigma_1, \sigma_2,..., \sigma_m, x_{m+1}, x_{m+2},..., x_n\right)\right),$$
(4.13)

где $f(\sigma_1, \sigma_2,\ldots, \sigma_m, x_{m+1}, x_{m+2},\ldots, x_n)$ – *остаточная булевая функция*, а дизъюнкция берётся по всем возможным наборам компонент булевого вектора $(\sigma_1, \sigma_2,\ldots, \sigma_m)$.

Пусть m=1.

Тогда $f(x_1, x_2,\ldots, x_n) = x_1 \cdot f(1, x_2,..., x_n) \vee \bar{x}_1 \cdot f(0, x_2,..., x_n)$.

Так как значение булевой функции может быть только 0 или 1, то одна из остаточных функций $f(1, x_2,..., x_n)$ или $f(0, x_2,\ldots, x_n)$ должна иметь значение 1, а вторая – 0.

Например, $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)=x_1\cdot 1\vee \bar{x}_1\cdot 0=x_1$ или $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)= x_1\cdot 0\vee \bar{x}_1\cdot 1= \bar{x}_1$.

Пусть m=2. Тогда

$$f(x_1,x_2,...,x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot f(1, 1, x_3,..., x_n) \vee x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot f(1, 0, x_3,..., x_n) \vee$$
$$\vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot f(0, 1, x_3,..., x_n) \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot f(0, 0, x_3,..., x_n).$$

Среди всех остаточных функций только одна равна 1.

Например,

$$f(x_1, x_2,..., x_n)=x_1 \cdot x_2 \cdot 1 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot 0 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot 0 \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot 0= x_1 \cdot x_2 \text{ или}$$
$$f(x_1, x_2,..., x_n)=x_1 \cdot x_2 \cdot 0 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot 1 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot 0 \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot 0= \bar{x}_1 \cdot x_2, \text{ или}$$
$$f(x_1, x_2,..., x_n)=x_1 \cdot x_2 \cdot 0 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot 0 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot 1 \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot 0= x_1 \cdot \bar{x}_2, \text{ или}$$
$$f(x_1, x_2,..., x_n)=x_1 \cdot x_2 \cdot 0 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot 0 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot 0 \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot 1=\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2.$$

Пусть m=n. Тогда $f(x_1, x_2,..., x_n) = \bigvee_n \left(x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n} \cdot f\left(\sigma_1, \sigma_2,..., \sigma_n\right)\right)$.

Если $f(\sigma_1, \sigma_2,\ldots, \sigma_n)=1$, то функцию $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ представляет элементарная конъюнкция $(x_1^{\sigma 1}\cdot x_2^{\sigma 2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\sigma n}\cdot 1)=(x_1^{\sigma 1}\cdot x_2^{\sigma 2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\sigma n})$, а если $f(\sigma_1, \sigma_2,\ldots, \sigma_n)=0$, то $(x_1^{\sigma 1}\cdot x_2^{\sigma 2}\cdot\ldots\cdot x_n\cdot 0)= 0$.

Итак, разложение в дизъюнктивную нормальную форму (ДНФ) есть:

$$f(x_1, x_2,..., x_n) = \bigvee_n (x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n}) \text{ для всех } f\left(\sigma_1, \sigma_2,..., \sigma_n\right) = 1. \qquad (4.14)$$

Если элементарные конъюнкции в разложении имеют одинаковое число и одинаковые имена булевых переменных, то такое разложение есть *совершенная дизъюнктивная нормальная форма формулы* булевой функции (СДНФ).

Например, $F=x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 \cdot \overline{x}_4$.

Таблица 4.15

Аргумент				Булева функция
x_1	x_2	x_3	x_4	$y=f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
0	0	0	1	$f(0, 0, 0, 1)=0$
1	0	1	0	$f(1, 0, 1, 0)=1$
1	1	0	0	$f(1, 1, 0, 0)=1$
0	1	1	0	$f(0, 1, 1, 0)=0$
...	...	...	...	...

Если булева функция задана таблицей, то формулу СДНФ можно записать по значениям булевых переменных для булевой функции, имеющей значение «1».

Например, по табл. 4.15 имеем

$$y=x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4} \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4}=1.$$

Алгоритм преобразования булевой формулы в СДНФ:

Шаг 1: преобразовать формулу так, чтобы исполнялись только операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания,

Шаг 2: преобразовать формулу так, чтобы операция отрицания были применимы только к булевым переменным,

Шаг 3: если в некоторую элементарную конъюнкцию $(x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot ... \cdot x_k^{\sigma_k})$ не входит переменная x_i, то выполнить операцию конъюнкции $(x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot ... \cdot x_k^{\sigma_k})$ и $(x^{\sigma_i} \vee x^{\overline{\sigma_i}})$ и преобразовать формулу по закону дистрибутивности:

$$F=(x_1^{\sigma 1} \cdot x_2^{\sigma 2} \cdot ... \cdot x_k^{\sigma k}) \cdot (x_i^{\sigma i} \vee x_i^{\overline{\sigma i}})=x_1^{\sigma 1} \cdot x_2^{\sigma 2} \cdot ... \cdot x_k^{\sigma k} \cdot x_i^{\sigma i} \vee x_1^{\sigma 1} \cdot x_2^{\sigma 2} \cdot ... \cdot x_k^{\sigma k} \cdot x_i^{\overline{\sigma i}},$$

Шаг 4: если в некоторую конъюнкцию не входит переменная x_j, то повторить шаг 3, иначе - конец.

Пример. Преобразовать формулу булевой функции $F=\overline{x_1} \vee x_1 \cdot x_2 \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_4$ к виду СДНФ.

- Выполнить операцию конъюнкции однобуквенной элементарной конъюнкции $\overline{x_1}$ и $(x_2 \vee \overline{x_2})=1$:

$$F=\overline{x_1} \cdot (x_2 \vee \overline{x_2}) \vee x_1 \cdot x_2 \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_4,$$

- преобразовать F по закону дистрибутивности:

$$F=\overline{x_1} \cdot x_2 \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \vee x_1 \cdot x_2 \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_4,$$

- выполнить операцию конъюнкции двухбуквенных элементарных конъюнкций $(\overline{x_1} \cdot x_2)$, $(\overline{x_1} \cdot \overline{x_2})$, $(x_1 \cdot x_2)$ и $(x_2 \vee \overline{x_2})=1$:

$$F=\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot (x_3 \vee \overline{x_3}) \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot (x_3 \vee \overline{x_3}) \vee x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 \vee \overline{x_3}) \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_4,$$

- преобразовать F по закону дистрибутивности:

$$F=\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \vee \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \vee$$
$$\vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_4,$$

- выполнить операцию конъюнкции трехбуквенных элементарных конъюнкций $(\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3)$, $(\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3})$, $(\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3)$, $(\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3})$, $(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)$ и $(x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3})$ и $(x_4 \vee \overline{x_4})=1$:

$F = \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 \vee \bar{x}_4) \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot (x_4 \vee \bar{x}_4) \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 \vee \bar{x}_4) \vee$

$\vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot (x_4 \vee \bar{x}_4) \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 \vee \bar{x}_4) \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot (x_4 \vee \bar{x}_4) \vee \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot x_4,$

преобразовать F по закону дистрибутивности:

$F = \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4) \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee$

$\vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4 \vee \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4 \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4 \vee$

$\vee x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 \vee \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot x_4,$

Так сформирована СДНФ формулы булевой функции.

➢ *Конъюнктивная нормальная форма.* Дизъюнкция $x_i^{\bar{\sigma}_i}$ всех компонент аргумента определяет другую формулу $D_i = (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee \ldots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n})$, которую называют *элементарной дизъюнкцией*. Обратите внимание: значения всех компонент булевого вектора должны быть инвертированы. Конъюнкция элементарных дизъюнкций по известным наборам значений компонент булевого вектора есть конъюнктивная нормальная форма формулы булевой функции или сокращенно – КНФ, т.е.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots, x_n) = \underset{m}{\&} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee \ldots \vee x_m^{\bar{\sigma}_m} \vee f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n)), \tag{4.15}$$

где $f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n)$ – *остаточная булева функция*, а конъюнкция берётся по всем наборам булевых переменных $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$.

Пусть $m=1$.

Тогда $f(x_1, x_2 \ldots, x_n) = (\bar{x}_1 \vee f(1, x_2, \ldots, x_n)) \cdot (x_1 \vee f(0, x_2, \ldots, x_n))$.

Так как значение булевой функции может быть только 0 или 1, то одна из остаточных функций $f(1, x_2, \ldots, x_n)$ или $f(0, x_2, \ldots, x_n)$ должна иметь значение 1, а вторая – 0.

Например, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\bar{x}_1 \vee 1) \cdot (x_1 \vee 0) = 1 \cdot x_1 = x_1$ или

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\bar{x}_1 \vee 0) \cdot (x_1 \vee 1) = \bar{x}_1 \cdot 1 = \bar{x}_1$.

Пусть $m=2$, тогда

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee f(1, 1, x_3, \ldots, x_n)) \cdot (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee f(1, 0, x_3, \ldots, x_n)) \cdot$

$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee f(0, 1, x_3, \ldots, x_n)) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee f(0, 0, x_3, \ldots, x_n))$.

Среди остаточных функций только одна имеет значение 0.

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 \vee x_2 \vee 0) \cdot (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee 1) \cdot (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee 1) \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee 1) = (x_1 \vee x_2)$ или

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 \vee x_2 \vee 1) \cdot (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee 0) \cdot (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee 1) \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee 1) = (x_1 \vee \bar{x}_2)$, или

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 \vee x_2 \vee 1) \cdot (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee 1) \cdot (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee 0) \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee 1) = (\bar{x}_1 \vee x_2)$, или

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 \vee x_2 \vee 1) \cdot (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee 1) \cdot (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee 1) \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee 0) = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$.

Пусть $m=n$.

Тогда $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \&(x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee \ldots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n} \vee f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n))$.

Если $f(\sigma_1, \sigma_2,\ldots, \sigma_n)=0$, то булеву функцию представляет элементарная дизъюнкция булевых переменных, т.е $f(x_1, x_2,..., x_n)=(x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee x_2^{\overline{\sigma_2}} \vee ... \vee x_n^{\overline{\sigma_n}})$.

Итак, конъюнктивная нормальная форма формулы есть конъюнкция элементарных дизъюнкций *инвертированных булевых переменных*, для которых булева функция имеет значение 0:

$$f(x_1, x_2,..., x_n)=\underset{n}{\&}(x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee x_2^{\overline{\sigma_2}} \vee ... \vee x_n^{\overline{\sigma_n}}) \text{ для всех } f(\sigma_1, \sigma_2,..., \sigma_n)=0. \qquad (4.16)$$

Если элементарные дизъюнкции в разложении имеют одинаковое число и одинаковые имена булевых переменных, то разложение представляет *совершенную конъюнктивную нормальную форму формулы* булевой функции (СКНФ).

Например, $F=(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)\cdot(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4})\cdot(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})$.

Таблица 4.16

Аргумент				Булева функция
x_1	x_2	x_3	x_4	
0	0	0	1	f(0, 0, 0, 1)=0
1	0	1	0	f(1, 0, 1, 0)=1
1	1	0	0	f(1, 1, 0, 0)=1
0	1	1	0	f(0, 1, 1, 0)=0
...	...	...	...	...

Если функция задана таблицей (например, табл. 4.16), то формулу СКНФ можно записать по инвертированным значениям булевых переменных для функции, равной 0. Например, для функции, заданной табл. 26, имеем: $F=(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4})\cdot(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4)$.

Алгоритм преобразования формулы в СКНФ:

Шаг 1: преобразовать формулу так, чтобы исполнялись только операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания,

Шаг 2: преобразовать формулу так, чтобы операция отрицания была применима только к булевым переменным,

Шаг 3: если в некоторую элементарную дизъюнкцию $(x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee x_2^{\overline{\sigma_2}} \vee ... \vee x_k^{\overline{\sigma_k}})$ не входит переменная x_i, то выполнить операцию дизъюнкции $(x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee x_2^{\overline{\sigma_2}} \vee ... \vee x_k^{\overline{\sigma_k}})$ и $(x_i^{\sigma_i}\cdot x_i^{\overline{\sigma_i}})$ и преобразовать формулу по закону дистрибутивности:

$$F=(x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee x_2^{\overline{\sigma_2}} \vee ... \vee x_k^{\overline{\sigma_k}}) \vee (x_i^{\sigma_i}\cdot x_i^{\overline{\sigma_i}})=$$

$$=(x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee x_2^{\overline{\sigma_2}} \vee ... \vee x_k^{\overline{\sigma_k}} \vee x_i^{\sigma_i})\cdot(x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee x_2^{\overline{\sigma_2}} \vee ... \vee x_k^{\overline{\sigma_k}} \vee x_i^{\overline{\sigma_i}}),$$

Шаг 4: если в некоторую дизъюнкцию не входит переменная x_j, то повторить шаг 3, иначе конец.

<u>Пример</u>. Преобразовать формулу $F=\overline{x_1}\cdot(x_1 \vee x_2)\cdot(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4)$ к виду СКНФ.

- выполнить операцию дизъюнкции однобуквенной элементарной дизъюнкции $\overline{x_1}$ и $(x_2\cdot\overline{x_2})$:

$F=(\bar{x}_1 \vee x_2 \cdot \bar{x}_2)\cdot(x_1 \vee x_2)\cdot(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4)$,

- преобразовать F по закону дистрибутивности:

$F=(\bar{x}_1 \vee x_2)\cdot(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)\cdot(x_1 \vee x_2)\cdot(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4)$,

- выполнить операцию дизъюнкции двухбуквенных элементарных дизъюнкций $(\bar{x}_1 \vee x_2)$, $(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$, $(x_1 \vee x_2)$ и $(x_3 \cdot \bar{x}_3)$:

$F=(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \cdot \bar{x}_3)\cdot(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \cdot \bar{x}_3)\cdot(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \cdot \bar{x}_3)\cdot(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4)$,

- преобразовать F по закону дистрибутивности:

$F=(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)\cdot(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)\cdot(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)\cdot(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)\cdot(x_1 \vee x_2 \vee x_3)\cdot$

$\cdot(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)\cdot(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4)$,

- выполнить операцию дизъюнкции трехбуквенных элементарных дизъюнкций $(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$, $(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$, $(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$, $(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$, $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$, $(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$ и $(x_4 \cdot \bar{x}_4)$:

$F=(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \cdot \bar{x}_4)\cdot(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \cdot \bar{x}_4)\cdot(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4 \cdot \bar{x}_4)\cdot$

$(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \cdot \bar{x}_4)\cdot(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \cdot \bar{x}_4)\cdot(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \cdot \bar{x}_4)\cdot$

$\cdot(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4)$,

- преобразовать F по закону дистрибутивности:

$F=(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)\cdot(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)\cdot(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)\cdot(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)\cdot$

$(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4)\cdot(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)\cdot(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)\cdot(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)\cdot$

$(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)\cdot(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)\cdot(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)\cdot(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \cdot\bar{x}_4)\cdot$

$\cdot(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4)$

Такова СКНФ формулы булевой функции.

4.5. Минимизация булевых функций

Задача минимизации булевой функций сводится к построению формулы в базисе алгебры Буля, содержащей минимальное число булевых переменных. Поэтому на первом этапе осуществляется переход к совершенной нормальной форме формулы, а на следующих этапах осуществляется поиск сокращённых и тупиковых нормальных форм, среди которых осуществляется выбор минимальной формы.

Сокращённая нормальная форма формулы булевой функции есть результат поиска элементарных конъюнкций ДНФ формулы (дизъюнкций КНФ формулы), равносильных с элементарными конъюнкциями СДНФ (дизъюнкциями СКНФ), но имеющих меньшее число булевых переменных или результат поиска среди сокращенных ДНФ (КНФ), сформированных на предыдущем этапе минимизации.

Тупиковая нормальная форма есть результат поиска элементарных конъюнкций для ДНФ (дизъюнкций для КНФ), равносильных с конъюнкциями сокращенных ДНФ (дизъюнкциями сокращенных КНФ), но имеющих наименьшее число булевых переменных. Любое последующее уменьшение числа булевых переменных ведёт к разрушению булевой функции хотя бы для одного возможного набора булевых переменных.

При поиске сокращённых и тупиковых форм используют *импликанты* формулы булевой функции для ДНФ и *имплиценты* - для КНФ, которые *покрывают* элементарные конъюнкций (дизъюнкций) совершенных и сокращенных нормальных форм меньшим числом булевых переменных.

Импликанта ДНФ. Если существуют булевы функций $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ и $f'(x_1, x_2,\dots, x_n)$, которые при одном и том же наборе булевых переменных $(\sigma_1, \sigma_2,\dots, \sigma_n)$ имеют одинаковые значения $f(x_1, x_2,\dots, x_n)=1$ и $f'(x_1, x_2,\dots, x_n)=1$, но формула функции $f'(x_1, x_2,\dots, x_n)$ имеет меньшее число булевых переменных, чем формула функции $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$,то говорят, что $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ имплицирует $f'(x_1, x_2,\dots, x_n)$.

Это означает, что $(f(x_1, x_2,\dots, x_n)\to f'(x_1, x_2,\dots, x_n))=1$.

В этом случае формулу фунции $f'(x_1, x_2,\dots, x_n)$ называют импликантой. Она покрывает формулу функции $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ для нескольких наборов булевых переменных. Импликанту, содержащую наименьшее число булевых переменных, называют *простой импликантой*.

Например, дана формула булевой функции:

$$f(x_1, x_2, x_3)=x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \vee \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \vee \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}.$$

Используя законы идемпотентности и дистрибутивности, можно выполнить эквивалентные преобразования формулы $f(x_1, x_2, x_3)$ и получить новую формулу:

$$f_1(x_1, x_2, x_3)=x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 \vee \overline{x_3}) \vee \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot (x_3 \vee \overline{x_3}) \vee x_2 \cdot x_3 \cdot (x_1 \vee \overline{x_1}) \vee x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot (x_1 \vee \overline{x_1}).$$

Так как $(x_1 \vee \overline{x_1})=1$ и $(x_3 \vee \overline{x_3})=1$, то формула $f_1(x_1, x_2, x_3)$ эквивалентна формуле $f_1'(x_1, x_2, x_3)=x_1 \cdot x_2 \vee \overline{x_1} \cdot x_2 \vee x_2 \cdot x_3 \vee x_2 \cdot \overline{x_3}$, каждая элементарная конъюнкция которой покрывает две элементарные конъюнкции формулы $f(x_1, x_2, x_3)$.

Следовательно, $f(x_1, x_2, x_3)\to f'_1(x_1, x_2, x_3)=1$, т.е. формула $f_1'(x_1, x_2, x_3)$ является импликантой для формулы $f(x_1, x_2, x_3)$.

Если повторить эквивалентные преобразования формулы $f_1'(x_1, x_2, x_3)$, то получим $f_1'(x_1, x_2, x_3)=x_2 \cdot (x_1 \vee \overline{x_1}) \vee x_2 \cdot (x_3 \vee \overline{x_3})$. Так как $(x_1 \vee \overline{x_1})=1$ и $(x_3 \vee \overline{x_3})=1$, то $f_1'(x_1, x_2, x_3)$ эквивалентна $f_2'(x_1, x_2, x_3)=x_2$, которая, в свою очередь, покрывает все элементарных конъюнкции функции $f(x_1, x_2, x_3)$.

Следовательно, $f(x_1, x_2, x_3)\to f'_2(x_1, x_2, x_3)=1$, т.е. формула $f_2'(x_1, x_2, x_3)$ является *простой импликантой* для формулы $f(x_1, x_2, x_3)$.

Имплиценты КНФ. Если существуют булевы функции $\mathrm{f}(x_1, x_2,\dots, x_n)$ и $\mathrm{f}'(x_1, x_2,\dots, x_n)$, которые при одном и том же наборе булевых переменных $(\sigma_1, \sigma_2,\dots, \sigma_n)$ имеют одинаковые значения $f(x_1, x_2,\dots, x_n)=0$ и $f'(x_1, x_2,\dots, x_n)=0$, но формула функции $f'(x_1, x_2,\dots, x_n)$ имеет меньшее число булевых переменных, чем формула функции $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$, то говорят, что $f'(x_1, x_2,\dots, x_n)$ имплицирует $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$.

Это означает, что $(f'(x_1, x_2,\dots, x_n) \to f(x_1, x_2,\dots, x_n))=1$.

В этом случае формулу фунции $f'(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ называют имплицентой. Она покрывает формулу функции $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ для нескольких наборов булевых переменных.

Имплицента, содержащая наименьшее число булевых переменных, есть *простая имплицента*.

Например, дана формула булевой функции:

$$f(x_1, x_2, x_3)=(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)\cdot(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})\cdot(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})\cdot(x_1 \vee x_2 \vee x_3).$$

Выполнив эквивалентные преобразования по закону дистрибутивности формулы $f(x_1, x_2, x_3)$, получим новую формулу:

$$f_1'(x_1, x_2, x_3)=(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3\cdot\overline{x_3})\cdot(x_1 \vee x_2 \vee x_3\cdot\overline{x_3})\cdot(x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_1\cdot\overline{x_1})\cdot(x_2 \vee x_3 \vee x_1\cdot\overline{x_1}).$$

Так как $x_1\cdot\overline{x_1}=0$ и $x_3\cdot\overline{x_3}=0$, то формула $f_1'(x_1, x_2, x_3)$ эквивалентна формуле $f_1'(x_1, x_2, x_3)=(\overline{x_1} \vee x_2)\cdot(x_1 \vee x_2)\cdot(x_2 \vee \overline{x_3})\cdot(x_2 \vee x_3)$, каждая элементарная дизъюнкция которой покрывает две элементарных дизъюнкции $f(x_1, x_2, x_3)$.

Следовательно, $f'_1(x_1, x_2, x_3)\to f(x_1, x_2, x_3)=1$, т. е. формула $f_1'(x_1, x_2, x_3)$ является имплицентой для формулы $f(x_1, x_2, x_3)$.

Если повторить эквивалентные преобразования по закону дистрибутивности функции $f_1'(x_1, x_2, x_3)$, то получим

$$f_1'(x_1, x_2, x_3)=(x_2 \vee x_1\cdot\overline{x_1})\cdot(x_2 \vee x_1\cdot\overline{x_1})\cdot(x_2 \vee x_3\cdot\overline{x_3})\cdot(x_2 \vee x_3\cdot\overline{x_3}).$$

Так как $x_1\cdot\overline{x_1}=0$ и $x_3\cdot\overline{x_3}=0$, то формула $f_1'(x_1, x_2, x_3)$ эквивалентна формуле

$f_2'(x_1, x_2, x_3)=x_2\cdot x_2=x_2$, единственная булева переменная покрывает все элементарные дизъюнкции функции $f(x_1, x_2, x_3)$.

Следовательно, $f'_2\,(x_1, x_2, x_3)\to f(x_1, x_2, x_3)=1$, т. е. формула $f_2'(x_1, x_2, x_3)$ является *простой имплицентой* для формулы $f(x_1, x_2, x_3)$.

4.5.1 Минимизация ДНФ булевой функции

Если в СДНФ булевой функции есть элементарные конъюнкции вида $x_i\cdot F_i$ и $\overline{x_i}\cdot F_i$, то следует, прежде всего, выполнить операции обобщённого склеивания $(x_i\cdot F_i \vee \overline{x_i}\cdot F_i=x_i\cdot F_i \vee \overline{x_i}\cdot F_i \vee F_i)$ для каждой булевой переменной x_i каждой элементарной конъюнкции последовательно слева-направо, а затем операции поглощения ($x_i\cdot F_i \vee F_i = F_i$ и $\overline{x_i}\cdot F_i \vee F_i = F_i$). Так будет получена сокращённая ДНФ. На втором этапе выполняются такие же операции обобщённого склеивания и поглощения для функций F_i, содержащих n или $(n-1)$ булевых переменных. Эти операции повторяются до тех пор, пока можно получать импликанты от меньшего числа булевых переменных.

<u>Пример</u>. Дано дискретное устройство, имеющее четыре входных канала (четыре булевых переменных булевого вектора – x_1, x_2, x_3, x_4) и один – выходной (значение булевой функции –y). Таблица поведения дискретного устройства представлена таблицей 4.17.

Таблица 4.17

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$	x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
0	0	0	0	$f(0, 0, 0, 0)=0$	1	0	0	0	$f(1, 0, 0, 0)=0$
0	0	0	1	$f(0, 0, 0,1)=1$	1	0	0	1	$f(1, 0, 0, 1)=0$
0	0	1	0	$f(0, 0, 1, 0)=0$	1	0	1	0	$f(1, 0, 1, 0)=0$
0	0	1	1	$f(0, 0, 1, 1)=1$	1	0	1	1	$f(1, 0, 1, 1)=0$
0	1	0	0	$f(0, 1, 0, 0)=0$	1	1	0	0	$f(1, 1, 0, 0)=1$
0	1	0	1	$f(0, 1, 0, 1)=1$	1	1	0	1	$f(1, 1, 0, 1)=0$
0	1	1	0	$f(0, 1, 1, 0)=0$	1	1	1	0	$f(1, 1, 1, 0)=1$
0	1	1	1	$f(0, 1, 1, 1)=1$	1	1	1	1	$f(1, 1, 1, 1)=1$

Для формирования СДНФ следует выделить строки, для которых значение булевой функции равно 1. Выписать элементарные конъюнкции значений всех булевых переменных для каждой выделенной строки. И наконец, выполнить операцию дизъюнкции всех элементарных конъюнкций:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4 \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot \mathrm{x}_4 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee$$
$$\vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$$

Минимизация ДНФ булевой функции:

- первый этап обобщённого склеивания $x_i \cdot F \vee \bar{x}_i \cdot F = x_i \cdot F \vee \bar{x}_i \cdot F \vee F$ выполняется с каждой булевой переменной x_i каждой элементарной конъюнкции последовательно слева-направо:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4 \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot \mathrm{x}_4 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee$$
$$\vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee$$
$$\vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \vee x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3.$$

- первый этап поглощения $x \cdot F_i \vee F_i = F_i$ и $\bar{x} \cdot F_i \vee F_i = F_i$ выполняется для каждой F_i:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4 \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_4 \vee \bar{x}_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \vee x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee$$
$$\vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3.$$

- второй этап обобщённого склеивания также выполняется с каждой булевой переменной x_i каждой элементарной конъюнкции последовательно слева-направо:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4 \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_4 \vee \bar{x}_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \vee x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee$$
$$\vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_4.$$

- второй этап поглощения выполняется также для каждой F_i:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_4 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee \bar{x}_1 \cdot x_4.$$

Элементарные конъюнкции, для которых не выполняется операция обобщенного склеивания, сохраняют число булевых переменных n, а для которых выполняется – число булевых становится равным (n–1).

Следующий этап обобщённого склеивания не уменьшает длину элементарных конъюнкций и число булевых переменных. На втором этапе получены простые импликанты тупиковой ДНФ.

Для поиска минимальной ДНФ составляется таблица простых импликант, столбцами которой являются элементарные конъюнкции СДНФ булевой функции – $K^{(i)}$, а строками – простые импликанты тупиковой ДНФ – K_j. Если $K_j^{(i)}$ входит в число элементов $K^{(i)}$, то на пересечении строки и столбца ставится 1, в противном случае 0. Для каждого значения K_j проверяется условие: если $K_j^{(i)} \to \underset{s \neq j}{\vee} K_s^{(i)} \equiv 0,$, то $K_j^{(i)}$ является *ядерной импликантой* минимальной ДНФ. Этому условию соответствует одна «1» в столбце для $K^{(i)}$. Если в столбце несколько «1», то $K_j^{(i)} \to \underset{s \neq j}{\vee} K_l^{(i)} = 1.$Следовательно, $K_j^{(i)}$ не является ядерной импликантой.

Удаляя строки, содержащие ядерные импликанты и столбцы $K^{(i)}$, в которых есть «1», получим сокращённую таблицу для неядерных импликант, из числа которых следует выбрать простые импликанты с минимальным числом булевых переменных.

Ядерные импликанты и минимальный набор неядерных, но покрывающих оставшиеся элементарные конъюнкции СДНФ, формируют минимальную ДНФ.

В табл. 4.18 представлены простые импликанты и элементарные конъюнкции СДНФ для рассматриваемого примера. Элементами этой таблицы являются «1», если простая импликанта входит в состав элементарной конъюнкции СДНФ, и «0» – в противном случае. Квадратными скобками выделены «1», для которых выполняется условие ядерной импликанты.

Таблица 4.18

Простые импликанты K_j	Элементарные конъюнкции - $K^{(i)}$						
	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4$	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot x_4$	$\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4$	$\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$	$x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4$	$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4$	$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$
$\bar{x}_1 \cdot x_4$	[1]	[1]	[1]	1	0	0	0
$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$	0	0	0	0	0	1	1
$x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_4$	0	0	0	0	[1]	1	0
$x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$	0	0	0	1	0	0	1

Ядерными импликантами являются $\bar{x}_1 \cdot x_4$ и $x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_4$ (в табл. 4.18 выделены заливкой), которые покрывают шесть элементарных конъюнкций СДНФ $\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4$, $\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot x_4$, $\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4$, $\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$, $x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4$ и $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4$. Осталась непокрытой только одна элементарная конъюнкция – $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$ и не использованы две неядерных импликанты – $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ и $x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$.

Ответ: возможны два варианта минимальной ДНФ:

$f^{min}{}_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_4,$

$f^{min}{}_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 \cdot x_4 \vee x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_4.$

Выбор одной из двух минимальных формул булевой функции определяется условиями уже другой задачи.

4.5.2. Минимизация КНФ булевой функции

Если в СКНФ формулы булевой функции есть элементарные дизъюнкции вида $(x_i \vee F_i)$ и $(\overline{x_i} \vee F_i)$, то следует, прежде всего, выполнить операции обобщенного склеивания ($(x_i \vee F_i)\cdot(\overline{x_i} \vee F_i) = (x_i \vee F_i)\cdot(\overline{x_i} \vee F_i)\cdot F_i$) каждой булевой переменной x_i каждой элементарной дизъюнкции последовательно слева-направо, а затем операции поглощения ($(x_i \vee F_i)\cdot F_i = F_i$ и $(\overline{x_i} \vee F_i)\cdot F_i = F_i$). Так будет получена сокращённая КНФ. На втором этапе выполняются также операции обобщённого склеивания и поглощения для функций F_i, содержащих n и (n-1) булевы переменные. Эти операции повторяются, пока можно получать имплиценты от меньшего числа булевых переменных.

Пример. Дано дискретное устройство, имеющее четыре входных канала и один – выходной. Поведение устройства описано в табл. 4.19.

Для формирования СКНФ следует выделить строки, для которых значение булевой функции равно 0. Выписать элементарные дизъюнкции инвертированных булевых переменных для каждой выделенной строки. И наконец, выполнить операцию конъюнкции всех элементарных дизъюнкций:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)\cdot(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4)\cdot(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4)\cdot$$
$$\cdot(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4)\cdot(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)\cdot(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4})\cdot(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}).$$

Таблица 4.19

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$	x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
0	0	0	0	f(0, 0, 0, 0)=0	1	0	0	0	f(1, 0, 0, 0)=0
0	0	0	1	f(0, 0, 0,1)=1	1	0	0	1	f(1, 0, 0, 1)=0
0	0	1	0	f(0, 0, 1, 0)=0	1	0	1	0	f(1, 0, 1, 0)=1
0	0	1	1	f(0, 0, 1, 1)=1	1	0	1	1	f(1, 0, 1, 1)=0
0	1	0	0	f(0, 1, 0, 0)=0	1	1	0	0	f(1, 1, 0, 0)=1
0	1	0	1	f(0, 1, 0, 1)=1	1	1	0	1	f(1, 1, 0, 1)=1
0	1	1	0	f(0, 1, 1, 0)=0	1	1	1	0	f(1, 1, 1, 0)=1
0	1	1	1	f(0, 1, 1, 1)=1	1	1	1	1	f(1, 1, 1, 1)=1

Минимизация КНФ формулы булевой функции:

- первый этап обобщенного склеивания $(x_i \vee F)\cdot(\overline{x_i} \vee F) = (x_i \vee F)\cdot(\overline{x_i} \vee F)\cdot F$ выполняется с каждой булевой переменной x_i каждой элементарной дизъюнкции последовательно слева-направо:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)\cdot(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4)\cdot(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4)\cdot$$
$$\cdot(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4)\cdot(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)\cdot(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4})\cdot(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})\cdot$$
$$(x_2 \vee x_3 \vee x_4)\cdot(x_1 \vee x_3 \vee x_4)\cdot(x_1 \vee x_2 \vee x_4)\cdot(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_4)\cdot(x_1 \vee \overline{x_3} \vee x_4)\cdot$$
$$\cdot(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)\cdot(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4}),$$

- первый этап поглощения $(x \vee F_i) \cdot F_i = F_i$ и $(\bar{x} \vee F_i) \cdot F_i = F_i$ выполняется для каждой F_i:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_2 \vee x_3 \vee x_4) \cdot (x_1 \vee x_3 \vee x_4) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \cdot (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4) \cdot$$
$$\cdot (x_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \cdot (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \cdot (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4),$$

- второй этап обобщённого склеивания также выполняется с каждой булевой переменной каждой элементарной дизъюнкции последовательно слева-направо:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_2 \vee x_3 \vee x_4) \cdot (x_1 \vee x_3 \vee x_4) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \cdot (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4) \cdot$$
$$\cdot (x_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \cdot (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \cdot (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4) \cdot (x_1 \vee x_4) \cdot (x_1 \vee x_4),$$

- второй этап поглощения выполняется также для каждой F_i:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_2 \vee x_3 \vee x_4) \cdot (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \cdot (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4) \cdot (x_1 \vee x_4).$$

Элементарные дизъюнкции, для которых не выполняется операция обобщенного склеивания, сохраняют число булевых переменных n, а для которых выполняется – число булевых переменных становится равным (n–1).

Следующий этап обобщенного склеивания не уменьшает длину элементарных дизъюнкций и число булевых переменных. Следовательно, были получены простые имплиценты тупиковой КНФ.

Для поиска минимальной КНФ

составляется таблица простых имплицент (см. табл. 4.20), столбцами которой являются элементарные дизъюнкции СКНФ – $D^{(i)}$, а строками – простые имплиценты тупиковой КНФ – D_j.

Если D_j входят в число элементов $D^{(i)}$, то на пересечении строки и столбца ставится «1», в противном случае «0». Для каждого D_j проверяется условие: если $\mathrm{D}_j^{(i)} \to \underset{s \neq j}{\vee} \mathrm{D}_s^{(i)} \equiv 0$, то $D_j^{(i)}$ является ядерной имплицентой минимальной КНФ. Этому условию соответствует «[1]» в столбце для D_j. Если в столбце несколько «1», то $\mathrm{D}_j^{(i)} \to \underset{s \neq j}{\vee} \mathrm{D}_s^{(i)} \equiv 1$. $D_j^{(i)}$ не является ядерной имплицентой.

Ядерными имплицентами являются $(x_1 \vee x_4)$ и $(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4)$, которые покрывают элементарные дизъюнкции СКНФ $(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)$, $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4)$, $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)$, $(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)$, $(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)$ и $(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$.

Удаляя строки, содержащие ядерные имплиценты и столбцы D^{i}, в которых есть «1», получим сокращённую таблицу для неядерных имплицент, из числа которых следует выбрать простые имплиценты с минимальным числом булевых переменных. Ядерные имплиценты и минимальный набор неядерных, но покрывающих оставшиеся элементарные дизъюнкции СКНФ, формирует минимальную КНФ. Остались непокрытой одна элементарная дизъюнкция –

$\left(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4\right)$ и не использованы две неядерных импликценты – $\left(x_2 \vee x_3 \vee x_4\right)$ и $\left(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3\right)$.

Таблица 4.20

Простые импликценты D_{i}	Элементарные дизъюнкты - D^{i}						
	$\left(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4\right)$	$\left(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3 \vee x_4\right)$	$\left(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_4\right)$	$\left(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_4\right)$	$\left(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4\right)$	$\left(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x}_4\right)$	$\left(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_4\right)$
$\left(x_1 \vee x_4\right)$	1	[1]	[1]	[1]	0	0	0
$\left(x_2 \vee x_3 \vee x_4\right)$	1	0	0	0	1	0	0
$\left(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3\right)$	0	0	0	0	1	1	0
$\left(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_4\right)$	0	0	0	0	0	1	[1]

Ответ: возможны два варианта минимальной КНФ:

$f^{\min}{}_1(x_1, x_2, x_3, x_4)= \left(x_1 \vee x_4\right)\cdot\left(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_4\right)\cdot\left(x_2 \vee x_3 \vee x_4\right)$,

$f^{\min}{}_2(x_1, x_2, x_3, x_4)= \left(x_1 \vee x_4\right)\cdot\left(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_4\right)\cdot\left(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3\right)$.

Выбор одной из двух минимальных формул булевой функции определяется условиями уже другой задачи.

Глава 5. Алгебра чётких множеств

Пусть подмножества булеана универсального множества $B(U)$ упорядочены отношением частичного порядка $\subseteq(X_{\text{i}}, X_{\text{j}})$. Тогда верхней гранью булеана будет универсальное множество U, а нижней – $\varnothing$.

Бинарную операцию поиска верхней грани двух подмножеств частично упорядоченного множества $\subseteq(X_{\text{i}}, X_{\text{j}})$ называют *объединением*, а оператор объединения обозначают так «$\cup$». Тогда $\text{Sup}X=(X_{\text{i}}\cup X_{\text{j}})$, где $X=\{X_{\text{i}}, X_{\text{j}}\}$.

Бинарную операцию поиска нижней грани двух подмножеств частично упорядоченного множества $\subseteq(X_{\text{i}}, X_{\text{j}})$ называют *пересечением*, а оператор пересечения обозначают так «$\cap$». Тогда $\text{Inf}X==(X_{\text{i}} \cap X_{\text{j}})$, где $X=\{X_{\text{i}}, X_{\text{j}}\}$.

Унарную операцию поиска элементов универсального множества U, не принадлежащих подмножеству X, называют *дополнением*, а оператор дополнения обозначают «$\overline{..}$» или «$\neg$». Тогда $\overline{\overline{X}}=\{x|\ x\notin X_{\text{i}}$ и $x\in U\}$ или $\neg X=\{x|\ x\notin X_{\text{i}}$ и $x\in U\}$.

Множество всех подмножеств универсального множества U вместе с двумя бинарными операциями и одной унарной представляют *алгебру множеств* (или *алгебраическую структуру*), т. е.

$$A=<B(U),\ \overline{..},\ \cup,\ \cap > \text{ или } A=<B(U),\ \neg,\ \cup,\ \cap >, \qquad (5.1)$$

где $B(U)$ – *носитель* алгебры, а $\{\overline{..},\ \cup,\ \cap\}$ или $\{\neg,\ \cup,\ \cap\}$ – алгебраические операции.

5.1. Операции над множествами

Для графического изображения исполнения операций обозначим прямоугольником универсальное множество U, а внутри него – кругами его подмножества A, B, C,… Круги называют кругами Эйлера.

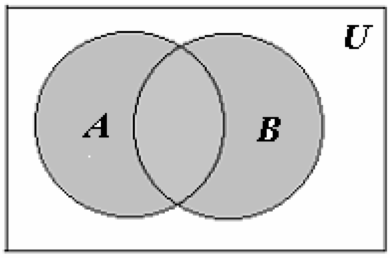
Поскольку соответствия, отображения и отношения есть множества совместимых кортежей, т. е. $h=\{(x_1,\ x_2,\ \ldots x_n,\ y_j)|\ x_1\in X_1,\ x_2\in X_2,\ldots x_n\in X_n,\ y\in Y\}$ и $r=\{(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)|\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n\in X\ \}\subseteq X^n$, то к ним применимы все теоретико-множественные операции.

Объединение множеств A и B есть множество, состоящее из элементов, которые принадлежат хотя бы одному множеству A или B (см. рис. 5.1):

$$C=(A\cup B)=\{x|\ x\in A \text{ или } x\in B\}. \qquad (5.2)$$

В программировании оператор объединения есть union(A, B).

Если $B=\varnothing$, то $A\cup B=A\cup\varnothing=A$. Если $B=U$, то $A\cup B=A\cup U=U$.



Если $A\subseteq C$ и $B\subseteq C$, то $A\cup B\subseteq C$.

Операцию объединения можно распространить на произвольное число подмножеств универсального множества.

Например, если A_1, A_2, …, $A_n\subseteq U$, то

$$(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=\bigcup_{i=1}^{n}A_i\subseteq U.$$

Рис. 5.1 Объединение множеств

<u>Пример.</u> Даны множества $A=\{a,\ b,\ c\}$ и $B=\{b,\ c,\ d,\ e\}$. Найти $C=(A\cup B)$.

Ответ: $C=\{a, b, c, d, e\}$.

<u>Пример</u>. Даны множества, содержащие подмножества $A=\{\{a,\ b\},\ c\}$, $B=\{\{b,\ c,\ d\},\ c,\ d\}$. Найти $C=(A\cup B)$.

Ответ: $C=\{\{a, b\}, \{b, c, d\}, c, d\}$, так как $\{a, b\}\in A$ и $\{b, c, d\}\in B$.

<u>Пример</u>. Даны множества несовместимых кортежей $A=\{(a,\ b),\ (b,\ c)\}$, $B=\{(b, c), (b, c, d), (c, d)\}$. Найти $C=(A\cup B)$.

Ответ: $C=\{(a, b), (b, c), (b, c, d,), (c, d)\}$.

<u>Пример</u>. Даны отображения h_1 и h_2, представляющие множества совместимых кортежей (см. табл. 5.1*a* и 5.1*b*). Найти $h=(h_1\cup h_2)$.

Ответ: кортежи, имеющие одинаковые значения всех атрибутов, представлены в результируемом отображении h одним кортежем. В таблицах 5.1 приведены результаты этой операции.

Таблица 5.1*a*

h_1	y	x_1	x_2	x_3
	2	*b*	*c*	6
	3	*c*	*e*	5
	5	*c*	*b*	2
	4	*a*	*e*	5

$\cup$

Таблица 5.1*b*

h_2	y	x_1	x_2	x_3
	3	*c*	*e*	2
	5	*c*	*b*	2
	4	*a*	*e*	5
	2	*a*	*e*	6

=

Таблица 5.1c

h	y	x_1	x_2	x_3
	2	*b*	*c*	6
	3	*c*	*e*	5
	5	*c*	*b*	2
	4	*a*	*e*	5
	3	*c*	*e*	2
	2	*a*	*e*	6

Пример. Даны отношения r_1 и r_2 (см. табл. 5.2*a* и 5.2*b*). Найти $r=(r_1\cup r_2)$.

Ответ: каждая позиция матрицы r есть $r(x_i, x_j)=(r_1(x_i, x_j)\vee r_2(x_i, x_j))$. В таблицах 5.2 приведены результаты этой операции.

Таблица 5.2*a*

r_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	0	0
x_2	0	1	0	1
x_3	1	0	1	0
x_4	0	1	1	1

$\cup$

Таблица 5.2*b*

r_2	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1	1	1
x_2	1	1	0	0
x_3	0	1	1	0
x_4	0	0	0	0

=

Таблица 5.2*c*

r	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	1	1
x_2	1	1	0	1
x_3	1	1	1	0
x_4	0	1	1	1

Пример. Даны отношения r_1 и r_2 (см. табл. 5.3*a* и 5.3*b*). Найти $r=(r_1\cup r_2)$.

Ответ: если строки и столбцы матриц разноименны, то дополнить матрицы строками и столбцами с недостающими именами. Вновь введенные строки и столбцы заполнить нулями. Каждая позиция результирующей матрицы *r* есть $r(x_i, x_j)=(r_1(x_i, x_j)\vee r_2(x_i, x_j))$. В таблицах 5.3 приведены результаты этой операции.

Таблица 5.3*a*

r_1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1	0	0	0	0	0
x_2	0	1	0	1	0	0
x_3	1	0	1	0	0	0
x_4	0	1	1	1	0	0
x_5	0	0	0	0	0	0
x_6	0	0	0	0	0	0

$\cup$

Таблица 5.3*b*

r_2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	0	0	0	0	0
x_2	0	0	0	0	0	0
x_3	0	0	0	1	1	1
x_4	0	0	1	1	0	0
x_5	0	0	0	1	1	0
x_6	0	0	0	0	0	0

=

Таблица 5.3*c*

r	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1	0	0	0	0	0
x_2	0	1	0	1	0	0
x_3	1	0	1	1	1	1
x_4	0	1	1	1	0	0
x_5	0	0	0	1	1	0
x_6	0	0	0	0	0	0

Пересечение множеств *A* и *B* есть множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат множеству *A* и множеству *B* (см. рис. 5.2):

$C=(A\cap B)=\{x|x\in A \text{ и } x\in B\}$. (5.2)

В программировании оператор пересечения есть intersection(*A*, *B*).

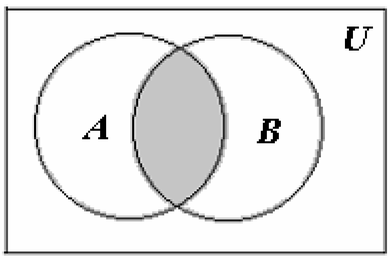


Рис. 5.2. Пересечение множеств

Если $B=\varnothing$, то $A\cap\varnothing=\varnothing$, если $B=U$, то $A\cap U=A$. Если $C\subseteq A$ и $C\subseteq B$, то $C\subseteq(A\cap B)$.

Операцию пересечения можно распространить на произвольное число подмножеств универсального множества *U*.

Например, если $A_1,..., A_n \subseteq U$, то $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i \subseteq U$.

<u>Пример</u>. Даны множества $A=\{a, b, c\}$ и $B=\{b, c, d, e\}$. Найти $C=(A \cap B)$.

Ответ: $C=\{b, c\}$, так как $b, c \in A$ и $b, c \in B$.

<u>Пример.</u> Даны множества A и B, которым принадлежат подмножества $A=\{\{a, b\}, c\}$, $B=\{\{b, c, d\}, c, d\}$. Найти $C=(A \cap B)$.

Ответ: $C=\{c\}$, так как $\{a, b\} \notin B$, $\{b, c, d\} \notin A$ и $d \notin A$.

<u>Пример.</u> Даны множества несовместимых кортежей $A=\{(a, b), (b, c)\}$, $B=\{(b, c), (b, c, d), (c, d)\}$. Найти $C=(A \cap B)$.

Ответ: $C=\{(b, c)\}$, так как кортежи $(a, b) \notin B$, $(b, c, d) \notin A$ и $(c, d) \notin A$.

<u>Пример.</u> Даны отображения h_1 и h_2 (см. табл. 5.4*a* и 5.4*b*). Найти $h=(h_1 \cap h_2)$.

Таблица 5.4*a*

h_1	y	x_1	x_2	x_3
	2	b	c	6
	3	c	e	5
	5	c	b	2
	4	a	e	5

$\cap$

Таблица 5.4*b*

h_2	y	x_1	x_2	x_3
	3	c	e	2
	5	c	b	2
	4	a	e	5
	2	a	e	6

=

Таблица 5.4*c*

h	y	x_1	x_2	x_3
	5	c	b	2
	4	a	e	5

Ответ: В таблицах 5.4 приведены результаты этой операции. В результируемом отображении h будут только кортежи, имеющие одинаковые значения всех атрибутов.

<u>Пример.</u> Даны отношения r_1 и r_2 (см. табл. 5.5*a* и 5.5*b*). Найти $r=(r_1 \cap r_2)$.

Таблица 5.5*a*

r_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	0	0
x_2	0	1	0	1
x_3	1	0	1	0
x_4	0	1	1	1

$\cap$

Таблица 5.5*b*

r_2	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	1	1
x_2	1	1	0	0
x_3	0	1	1	0
x_4	0	0	0	1

=

Таблица 5.5*c*

r	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	0	0
x_2	0	1	0	0
x_3	0	0	1	0
x_4	0	0	0	1

Ответ: каждая позиция матрицы r есть $r(x_i, x_j)=(r_1(x_i, x_j) \cdot r_2(x_i, x_j))$.
В таблицах 5.5 приведены результаты этой операции.

<u>Пример</u>. Даны отношения r_1 и r_2 (см. табл. 5.6*a* и 5.6*b*). Найти $r=(r_1 \cap r_2)$.

Таблица 5.6*a*

r_1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1	0	0	0	0	0
x_2	0	1	0	1	0	0
x_3	1	0	1	0	0	0
x_4	0	1	1	1	0	0
x_5	0	0	0	0	0	0
x_6	0	0	0	0	0	0

$\cap$

Таблица 5.6*b*

r_2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	0	0	0	0	0
x_2	0	0	0	0	0	0
x_3	0	0	0	1	1	1
x_4	0	0	1	1	0	0
x_5	0	0	0	1	1	0
x_6	0	0	0	0	0	0

=

Таблица 5.6c

r	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	0	0	0	0	0
x_2	0	0	0	0	0	0
x_3	0	0	0	0	0	0
x_4	0	0	1	1	0	0
x_5	0	0	0	0	0	0
x_6	0	0	0	0	0	0

Ответ: В таблицах 5.6 приведены результаты исполнения этой операции. Если строки и столбцы матриц разноименны, то каждую матрицу дополнить строками и столбцами с недостающими именами. Вновь введенные строки и столбцы заполнить нулями. Каждая позиция матрицы r есть результат вычисления: $r(x_i, x_j)=(r_1(x_i, x_j)\cdot r_2(x_i, x_j))$.

Дополнение множества A есть множество, состоящее из элементов, принадлежащих универсальному множеству U и не принадлежащих множеству A (см. рис. 5.3):

$$\overline{A} = \{x \mid x \in U \ \text{ и } x \notin A\} \qquad (5.3)$$

Если даны A и $\overline{A}$, то $A \cap \overline{A} = \varnothing$,

$A \cup \overline{A} = U$ и $(\overline{\overline{A}}) = A$.

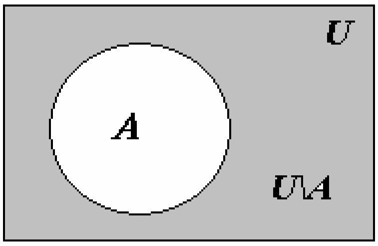


Рис. 5.3. Дополнение множества

<u>Пример</u>. Дано универсальное множество $U=\{a, b, c, d, e, f\}$ и множество $A=\{a, b, c\}$. Найти $\overline{A}$.

Ответ: $\overline{A} = \{d, e, f\}$, так как в множество $\overline{A}$ включают только те элементы множества U, которых нет среди элементов множества A.

<u>Пример.</u> Дано множество $A=\{\{a, \mathrm{b}\}, c\}$ и универсальное множество $U=\{a, b, \{a, b\}, c, \{d, e\}, f\}$. Найти $\overline{A}$.

Ответ: $\overline{A}=\{a, b, \{d, e\}, f\}$.

<u>Пример.</u> Дано отображение h (см. табл.5.7*a*). Найти $\overline{h}$.

Ответ: В табл. 5.7 даны результаты вычисления $\overline{h}$. Если значения компонент кортежей находятся в пределах данного атрибута (y, x_1 или x_2), то число кортежей дополнения определяется по формуле $|\overline{h}|=3\cdot 2\cdot 3 - 4=14$, где $3=|y|$, $2=|x_1|$, $3=|x_2|$ и $4=|h|$.

Таблица 5.7*a*

h				
y	a_1	a_2	a_3	a_1
x_1	c_2	c_1	c_1	c_2
x_2	d_3	d_1	d_2	d_1

$\Rightarrow$

Таблица 5.7*b*

$\overline{h}$														
y	a_1	a_1	a_1	a_1	a_2	a_2	a_2	a_2	a_2	a_3	a_3	a_3	a_3	a_3
x_1	c_1	c_1	c_1	c_2	c_1	c_1	c_2	c_2	c_2	c_1	c_1	c_2	c_2	c_2
x_2	d_1	d_2	d_3	d_2	d_2	d_3	d_1	d_2	d_3	d_1	d_3	d_1	d_2	d_3

<u>Пример.</u> Дано отношение r (см. табл. 5.8а). Найти $\overline{r}$.

Ответ: вычисление каждой позиции матрицы $\overline{r}(x_i, x_j)$ по формуле:

$$\overline{r}(x_i, x_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ r(x_i, x_j) = 0, \\ 0, & \text{если } \ r(x_i, x_j) = 1. \end{cases} \qquad (5.4)$$

В табл. 5.8*b* приведены результаты исполнения этой операции.

Таблица 5.8*a*

r	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1	1	1
x_2	1	0	1	0
x_3	0	1	0	1
x_4	1	0	0	0

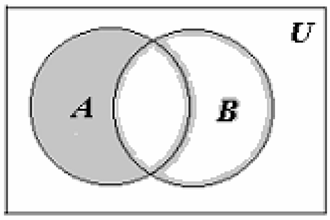
$\Rightarrow$

Таблица 5.8*b*

$\overline{r}$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	0	0
x_2	0	1	0	1
x_3	1	0	1	0
x_4	0	1	1	1

В дополнение к основным теоретико-множественным операциям (объединение, пересечение и дополнение) были предложены две операции: разность и симметрическая разность множеств.

Разность множеств A и B есть множество, состоящее из тех элементов, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B (см. рис. 5.4):



$$C=(A\backslash B)=(A\cap \overline{B})=\{x|\ x\in A \text{ и } x\notin B\}, \qquad (5.5)$$ где «\» - символ разности.

Рис. 5.4 Разность множеств

В программировании эту операцию записывают так:

C=difference(A, B) или C=minus(A, B).

Пример. Даны $A=\{a, b, c\}$ и $B=\{c, d, e\}$. Найти $C=(A\backslash B)$.

Ответ: Универсальное множество есть $U=\{a, b, c, d, e\}$. Тогда $C=\{a, b\}$, так как $C=(A\cap \overline{B})$.

Пример. Даны $A=\{(a, b), (b, c)\}$ и $B=\{(b, c), (b, c, d), (c, d)\}$.

Найти $C=(A\backslash B)$.

Ответ: $C=\{(a, b)\}$, так как кортеж $(b, c)\in(A\cap B)$.

Пример. Даны отображения h_1 и h_2 (см. табл. 5.9a и 5.9b). Найти $h=(h_1\backslash h_2)$.

Ответ: в отображении h будут только кортежи отображения h_1, которых нет в отображении h_2. Различие кортежей должно быть хотя бы у одной компоненты. В таблицах 5.9 приведены результаты исполнения этой операции.

Таблица 5.9*a*

h_1	y	x_1	x_2	x_3
	2	b	c	6
	3	c	e	5
	5	c	b	2
	4	a	e	5

\

Таблица 5.9*b*

h_2	y	x_1	x_2	x_3
	3	c	e	2
	5	c	b	2
	4	a	e	5
	2	a	e	6

=

Таблица 5.9*c*

h	y	x_1	x_2	x_3
	2	b	c	6
	3	c	e	5

Пример. Даны отношения r_1 и r_2 (см. табл. 5.10*a* и 5.10*b*). Найти $r=(r_1\backslash r_2)$

Ответ: известно, что операция разности двух отношений есть конъюнкции каждой позиции матриц r_1 и дополнения для этой же позиции матрицы r_2:

$$r(x_i\ x_j)=r_1(x_i, x_j)\cdot \overline{r}_2(x_i, x_j). \qquad (5.6)$$

В табл.5.10 приведены результаты исполнения этой операции.

Таблица 5.10*a*

r_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	0	0
x_2	0	1	0	1
x_3	1	0	1	0
x_4	0	1	1	1

\

Таблица 5.10*b*

r_2	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1	1	1
x_2	1	1	0	0
x_3	0	1	1	0
x_4	0	0	0	0

=

Таблица 5.10*c*

r	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	0	0
x_2	0	0	0	1
x_3	1	0	0	0
x_4	0	1	1	1

Симметрическая разность множеств A и B есть множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат разности ($A \backslash B$) или ($B \backslash A$) (см. рис. 5.5): $C=(A\Delta B)=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)=(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$, (5.7),

где «Δ» – символ симметрической разности.

В программировании эту операцию описывают так: C=union(difference(A, B), difference (B, A)).

Если $(A\Delta B)=(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)=\varnothing$, то $A=B$. (5.8)

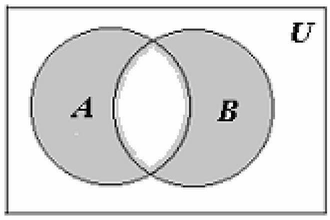


Рис.5.5 Симметрическая разность множеств

Пример. Даны множества $A=\{a, b, c\}$, $B=\{b, c, d, e\}$ и универсальное множество $U=\{a, b, c, d, e\}$. Найти $C=(A\Delta B)$.

Ответ: $C=\{a, d, e\}$, так как $(A\cap\overline{B})=\{a\}$, $(\overline{A}\cap B)=\{d, e\}$

Пример. Даны множества $A=\{\{a, b\}, c\}$, $B=\{\{b, c, d\}, c, d\}$ и универсальное множество $U=\{c, d, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$. Найти $C=(A\Delta B)$.

Ответ: $C=\{\{a, b\}, \{b, c, d\}, d\}$, так как $(A\cap\overline{B})=\{a\}$, $(\overline{A}\cap B)=\{\{b, c, d\}, d\}$.

Пример. Даны множества $A=\{(a, b), (b, c)\}$, $B=\{(b, c), (b, c, d), (c, d)\}$ и универсальное множество $U=\{(a, b), (b, c), (b, c, d), (c, d)\}$. Найти $C=(A\Delta B)$.

Ответ: $C=\{(a, b), (b, c, d), (c, d)\}$, так как $(b, c)\in A$ и $(b, c)\in B$.

Пример. Даны отображения h_1 и h_2 (см. табл. 5.11*a* и 5.11*b*). Найти $h=(h_1\Delta h_2)$.

Ответ: в отображении h (см. табл.5.11*c*) будут кортежи отображения h_1, которых нет в отображении h_2, и кортежи отображения h_2, которых нет в отображении h_1.

Таблица 5.11*a*

h_1	y	x_1	x_2	x_3
	2	b	c	6
	3	c	e	5
	5	c	b	2
	4	a	e	5

Δ

Таблица 5.11*b*

h_2	y	x_1	x_2	x_3
	3	c	e	2
	5	c	b	2
	4	a	e	5
	2	a	e	6

=

Таблица 5.11*c*

h	y	x_1	x_2	x_3
	2	b	c	6
	3	c	e	5
	3	c	e	2
	2	a	e	6

Пример. Даны отношения r_1 и r_2 (см. табл. 5.12*a* и 5.12*b*). Найти $r=(r_1\Delta r_2)$.

Ответ: для каждой позиции (x_i,x_j) значение $r(x_i,x_j)$ вычисляют по правилу:

$$r(x_i, x_j)=(r_1(x_i, x_j)\cdot\overline{r_2}(x_i, x_j))\cup(\overline{r_1}(x_i, x_j)\cdot r_2(x_i, x_j)). \qquad (5.9)$$

В таблицах приведены результаты исполнения этой операции.

Таблица 5.12*a*

r_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	0	0
x_2	0	1	0	1
x_3	1	0	1	0
x_4	0	1	1	1

Δ

Таблица 5.12*b*

r_2	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1	1	1
x_2	1	1	0	0
x_3	0	1	1	0
x_4	0	0	0	0

=

Таблица 5.12*c*

r	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	1	1
x_2	1	0	0	1
x_3	1	1	0	0
x_4	0	1	1	1

Подводя итоги исполнения алгебраических операций на множествах, можно привести такой профессиональный пример: при разработке программ автоматизированной системы управления на предприятии необходимо ограничить доступ некоторых сотрудников некоторых служб к некоторым базам данных. Например база данных отдела кадров (A) содержит информацию о каждом работнике предприятия: его идентификатор, квалификацию, статус в коллективе, адрес местожительства, семейное положение, число иждивенцев, уровень заработной платы, награды и поощрения и т. п., а база данных бухгалтерии (B) содержит информацию о движении денежных средств на оплату труда работников, на приобретение материальных ресурсов, на услуги сторонних организаций. Эти две базы имеют общую часть: идентификатор работника, его тарифная ставка, уровень заработной платы и др.. Тогда все атрибуты базы данных A доступны только руководству отдела кадров, базы B – только руководству бухгалтерии, ($A\cup B$) – только руководству предприятия, а ($A\backslash B$) – рядовым сотрудникам отдела кадров, ($B\backslash A$) – рядовым сотрудникам бухгалтерии, ($A\Delta B$)= ($A\backslash B$)$\cup$ ($B\backslash A$) – рядовым сотрудникам отдела кадров или бухгалтерии. В соответствии с такими ограничениями следует разрабатывать программы на соответствующее автоматизированное рабочее место.

5.2. Формулы и их эквивалентные преобразования

Если даны два множества A и B, то формулами являются $F=A$, $F=B$, $F=(A\cup B)$, $F=(A\cap B)$, а также $\overline{F}$, $(F_1\cup F_2)$, $(F_1\cap F_2)$. Никаких иных формул нет.

Формулы, имеющие одинаковое значение при одинаковых значениях множеств их формирующих, называют *эквивалентными* ($F_i\leftrightarrow F_j$) или *равносильными* ($F_i=F_j$).

Законы алгебры множеств:

$$\left.\begin{array}{l}
\textit{коммутативности}:\ (F_1\cup F_2)=(F_2\cup F_1),\ (F_1\cap F_2)=(F_2\cap F_1),\\
\textit{ассоциативности}:\ \begin{cases} F_1\cup(F_2\cup F_3)=(F_1\cup F_2)\cup F_3,\\ F_1\cap(F_2\cap F_3)=(F_1\cap F_2)\cap F_3,\end{cases}\\
\textit{дистрибутивности}:\ \begin{cases} F_1\cup(F_2\cap F_3)=(F_1\cup F_2)\cap(F_1\cup F_3),\\ F_1\cap(F_2\cup F_3)=(F_1\cap F_2)\cup(F_1\cap F_3),\end{cases}\\
\textit{идемпотентности}:\ F\cup F\cup\ldots\cup F=F,\ F\cap F\cap\ldots\cap F=F,\\
\textit{поглощения}:\ F_1\cup(F_1\cap F_2)=F_1,\ F_1\cap(F_1\cup F_2)=F_1,\\
\textit{противоречия}:\ F\cap\overline{F}=\varnothing,\\
\text{«}\textit{третьего не дано}\text{»}:\ F\cup\overline{F}=U,\\
\textit{двойного отрицания}:\ \overline{\overline{F}}=F,\\
\textit{закон де Моргана}:\ \begin{cases}\overline{(F_1\cup F_2)}=\overline{F_1}\cap\overline{F_2},\\ \overline{(F_1\cap F_2)}=\overline{F_1}\cup\overline{F_2},\end{cases},\\
\textit{свойства универсального и пустого множества}:\\
F\cup U=U,\ F\cup\varnothing=F,\ F\cap U=F,\ F\cap\varnothing=\varnothing.
\end{array}\right\}\qquad(5.10)$$

Правила подстановки, правила замещения и законы (или аксиомы) алгебры множеств позволяют выполнять эквивалентные преобразования формул.

Правила эквивалентных преобразований:

- ✓ если в алгебраическом выражении есть операторы «\» и/или «Δ», то их следует, прежде всего, удалить по правилам: $(A\backslash B)=(A\cap\overline{B})$ и/или $(A\Delta B)=((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B))$,
- ✓ если в формуле есть подформулы вида $\overline{(F_1\cup F_2)}$ или $\overline{(F_1\cap F_2)}$, то выполнить преобразования по закону де Моргана: $\overline{(F_1\cup F_2)}=\overline{F}_1\cap\overline{F}_2$ или $\overline{(F_1\cap F_2)}=\overline{F}_1\cup\overline{F}_2$, опустив символ отрицания до элементарных множеств.

<u>Пример.</u> Дана $F=(A\cap B\cap C\cap\overline{D})\cup(\overline{A}\cap C)\cup(\overline{B}\cap C)\cup(C\cap D)$. Упростить формулу.

- По закону коммутативности:

$F=(C\cap A\cap B\cap\overline{D})\cup(C\cap\overline{A})\cup(C\cap\overline{B})\cup(C\cap D)$,

- по закону дистрибутивности:

$F=(C\cap A\cap B\cap\overline{D})\cup(C\cap\overline{A})\cup(C\cap(\overline{B}\cup D))$,

- по закону дистрибутивности:

$F=(C\cap(A\cap B\cap\overline{D}))\cup(C\cap(\overline{A}\cup\overline{B}\cup D))$,

- по закону дистрибутивности:

$F=C\cap((A\cap B\cap\overline{D})\cup(\overline{A}\cup\overline{B}\cup D))$,

- по закону де Моргана:

$F=C\cap((A\cap B\cap\overline{D})\cup\overline{(A\cap B\cap\overline{D})})$,

- по закону третьего не дано $(F\cup\overline{F})=U$:

$F=(C\cap U)$,

- по свойству универсального множества:

$F=C$.

Ответ: $(A\cap B\cap C\cap\overline{D})\cup(\overline{A}\cap C)\cup(\overline{B}\cap C)\cup(C\cap D)=C$.

<u>Пример.</u> Дана $F=(A\backslash B)\cup(A\backslash C)$. Упростить алгебраическое выражение.

- Устранить символы «\»

$F=(A\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{C})$,

- по закону дистрибутивности:

$F=A\cap(\overline{B}\cup\overline{C})$,

- по закону де Моргана:

$F=A\cap\overline{(B\cap C)}$,

- внести символ «\»:

$F=A\backslash(B\cap C)$.

Ответ: $(A\backslash B)\cup(A\backslash C)=A\backslash(B\cap C)$.

<u>Пример</u>. Дана $F=(A\Delta B)\Delta(A\cap B)$. Упростить алгебраическое выражение.

- Устранить символ «Δ»:

$F=(((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B))\cap\overline{(A\cap B)})\cup(\overline{((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B))}\cap(A\cap B))$,

- по закону де Моргана:

$F=(((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B))\cap(\overline{A}\cup\overline{B}))\cup((\overline{(A\cap\overline{B})}\cap\overline{(\overline{A}\cap B)}\cap(A\cap B))$,

- по закону де Моргана:

$F=(((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B))\cap(\overline{A}\cup\overline{B}))\cup(((\overline{A}\cup B)\cap(A\cup\overline{B}))\cap(A\cap B))$,

- по закону дистрибутивности:

$F=(((A\cap\overline{B})\cap(\overline{A}\cup\overline{B}))\cup((\overline{A}\cap B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})))\cup(((\overline{A}\cup B)\cap(A\cup\overline{B}))\cap(A\cap B))$,

- по закону дистрибутивности:

$F=(((A\cap\overline{B}\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{B}))\cup((\overline{A}\cap B\cap\overline{A})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{B})))\cup$
$(((\overline{A}\cup B)\cap(A\cup\overline{B}))\cap(A\cap B))$,

- по законам идемпотентности $(F\cap F)=F$ и противоречия $(F\cap\overline{F})=\varnothing$:

$F=((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B))\cup(((\overline{A}\cup B)\cap(A\cup\overline{B}))\cap(A\cap B))$,

- по закону дистрибутивности:

$F=((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B))\cup(((\overline{A}\cap A)\cup(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})\cup(\overline{B}\cap B))\cap(A\cap B))$,

- по закону противоречия $(F\cap\overline{F})=\varnothing$:

$F=((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B))\cup((A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B}))\cap(A\cap B)))$,

- по закону поглощения:

$F=((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B))\cup(A\cap B)$,

- по закону дистрибутивности:

$F=A\cap(\overline{B}\cup B)\cup\overline{A}\cap B$

- по закону «третьего не дано» и свойству универсального множества:

$F=A\cup\overline{A}\cap B$,

- по закону дистрибутивности:

$F=A\cup B$,

Ответ: $(A\Delta B)\Delta(A\cap B)=(A\cup B)$.

5.3. Композиция отображений и отношений

Если даны два отображения h_1: $X\to Y$ и h_2: $Y\to Z$ и существуют элементы $y_k\in Y$, принадлежащие обоим отображениям, то возможно новое отображение h: $X\to Z$, первая компонента которого принадлежит h_1, а вторая – h_2. При этом должно выполниться условие: проекция первого отображения на вторую компоненту – $\pi_2(h_1(x_i, y_k))$ должна быть равной проекции второго отображения на первую компоненту – $\pi_1(h_2(y_k, z_j))$. Исполнение такой операции называют ***композицией*** отображений:

$$h(x_i, z_j)=(h_1(x_i, y_k)\circ h_2(y_k, z_j))=\{(x_i, z_j)\mid \pi_2(h_1(x_i, y_k))=\pi_1(h_2(y_k, z_j))\}, \quad (5.11)$$

где «$\circ$» – символ операции композиции отображений.

Пример. Даны множества $A=\{a, b, c, d\}$, $B=\{x, y, z\}$ и $C=\{c, d, e, f\}$ и отображения $h_1=\{(a, x), (b, x), (c, y), (d, z)\}\subseteq(A\otimes B)$ и $h_2=\{(x, d), (y, c), (z, f)\}\subseteq(B\otimes C)$. Найти $h=(h_1\circ h_2)$.

Ответ: $h=(h_1\circ h_2)=\{(a, d), (b, d), (c, c), (d, f)\}\subseteq(A\otimes C)$.

Композицию отображений удобно представить матрицами, верхние строки которых есть прообразы, а нижние – образы отображения (см. табл.5.13).

Таблица 5.13*a*

h_1				
	a	b	c	d
	x	x	y	z

$\circ$

Таблица 5.13*b*

h_2			
	x	y	z
	d	c	f

=

Таблица 5.13*c*

h				
	a	b	c	d
	d	d	c	f

Если даны два отношения r_1: $X\to X$ и r_2: $X\to X$ и существуют элементы $x_k\in X$, принадлежащие r_1 и r_2, то возможно отношение r: $X\to X$, первая компонента которого принадлежит r_1, вторая – r_2:

$$r(x_{1i},x_{2j})=(r_1(x_{1i},x_{1k})\circ r_2(x_{2k},x_{2j}))=\bigvee_{k=1}^{n}(r_1(x_{1i},x_{1k})\cdot r_2(x_{2k},x_{2j})), \qquad (5.12a)$$

где (x_{1i}, x_{1k}) – k–ый элемент i–ой строки матрицы смежности отношения r_1, а (x_{2k}, x_{2j}) – k–ый элемент j –го столбца матрицы смежности отношения r_2.

Ниже приведена более удобная формула вычисления $r(x_{1i},x_{2j})$ по матрицам смежности:

$$r(x_{1i},x_{2j})=\begin{cases}1, \text{ если } (x_{1i}, x_{1k})=1 \text{ и } (x_{2k}, x_{2j})=1,\\ 0, \text{ если } (x_{1i}, x_{1k})=0 \text{ или } (x_{2k}, x_{2j})=0,\end{cases} \qquad (5.12b)$$

Пример. Даны отношения r_1 и r_2 (см. табл. 5.14*a* и 5.14*b*). Найти $r=(r_1\circ r_2)$.

Ответ: в таблице 5.14*c* приведены результаты операции.

Таблица 5.14*a*

r_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	0	1
x_2	0	0	1	0
x_3	0	1	0	0
x_4	1	0	0	1

$\circ$

Таблица 5.14*b*

r_2	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1	0	1
x_2	1	0	0	0
x_3	0	0	0	1
x_4	1	0	1	0

=

Таблица 5.14*c*

r	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	1	1
x_2	0	0	0	0
x_3	0	0	0	0
x_4	1	1	1	1

5.4 Поиск неизвестного множества

Если тождество двух множеств ($F_1=F_2$) содержат неизвестное подмножество X, то для нахождения X следует воспользоваться условием: «тождество двух множеств равносильно симметрической разности этих множеств (F_1 и F_2), равной пустому множеству», т.е.

- ✓ если $F_1(X)=F_2$, то истинно алгебраическое выражение: $(F_1(X)\Delta F_2)=(F_1(X)\cap\overline{F}_2)\cup(F_2\cap\overline{F}_1(X))=\varnothing$ или
- ✓ если $F_1=F_2(X)$, то истинно алгебраическое выражение: $(F_1\Delta F_2(X))=(F_1\cap\overline{F}_2(X))\cup(F_2(X)\cap\overline{F}_1))=\varnothing$ или
- ✓ если $F_1(X)=F_2(X)$, то истинно алгебраическое выражение: $(F_1(X)\Delta F_2(X))=(F_1(X)\cap\overline{F}_2(X))\cup(F_2(X)\cap\overline{F}_1(X)))=\varnothing$.

Затем следует выделить многочлены, соединенные оператором конъюнкции с X и $\overline{X}$, что свидетельствует об их раздельном равенстве пустому множеству.

Алгоритм поиска неизвестного множества:

Шаг 1: если $F_1=F_2$, то $(F_1 \cap \overline{F}_2) \cup (F_2 \cap \overline{F}_1) = \varnothing$,

Шаг 2: если $(F_1 \cap \overline{F}_2) \cup (F_2 \cap \overline{F}_1) = \varnothing$ содержит алгебраическое выражение известных подмножеств, которое обозначим $(...)_1$, и оно соединено оператором «$\cap$» с искомым множеством X, , то истинно алгебраическое выражение $(...)_1 \cap X=\varnothing$,

Шаг 3: если $(F_1 \cap \overline{F}_2) \cup (F_2 \cap \overline{F}_1) = \varnothing$ содержит алгебраическое выражение известных подмножеств, которое обозначим $(...)_2$, и оно соединено оператором «$\cap$» с дополнением искомого множества $\overline{X}$, то истинно алгебраическое выражение $(...)_2 \cap \overline{X}=\varnothing$,

Шаг 4: если $(F_1 \cap \overline{F}_2) \cup (F_2 \cap \overline{F}_1) = \varnothing$ содержит алгебраическое выражение известных подмножеств, которое обозначим $(...)_3$, и оно не соединено оператором «$\cap$» с X и/или $\overline{X}$, то истинно утверждение $(...)_3=\varnothing$; в свою очередь, если соединить $(...)_3$ оператором «$\cap$» с универсальным множеством, т.е. $(...)_3 \cap (X \cup \overline{X})=\varnothing$, и преобразовать по закону дистрибутивности, то получим $(...)_3 \cap X \cup (...)_3 \cap \overline{X}=\varnothing$,

Шаг 5: объединить алгебраические выражения, полученные на шагах 2, 3 и 4 и преобразовать по закону дистрибутивности:

$((...)_1 \cap X) \cup ((...)_2 \cap \overline{X}) \cup ((...)_3 \cap X \cup (...)_3 \cap \overline{X})=((...)_1 \cup (...)_3) \cap X \cup ((...)_2 \cup (...)_3) \cap \overline{X}=\varnothing$,

Шаг 6: если $((...)_1 \cup (...)_3) \cap X \cup ((...)_2 \cup (...)_3) \cap \overline{X}=\varnothing$, то истинно утверждение:

$$\begin{cases} ((...)_1 \cup (...)_3) \cap X=\varnothing, \\ ((...)_2 \cup (...)_3) \cap \overline{X} = \varnothing, \end{cases}$$

Шаг 7: если $((...)_1 \cup (...)_3) \cap X=\varnothing$, то $X \subseteq \overline{\{((...)_1 \cup (...)_3)\}}$,

если $((...)_2 \cup (...)_3) \cap \overline{X}=\varnothing$, то $\{((...)_2 \cup (...)_3)\} \subseteq X$.

Следовательно, $\{((...)_2 \cup (...)_3)\} \subseteq X \subseteq \overline{\{((...)_1 \cup (...)_3)\}}$.

Дополнительными условиями можно уточнить значение X.

<u>Пример</u>. Дано $(X \cup M)=N$, где M и N – известные множества. Найти множество X.

- Приравнять симметрическую разность алгебраических выражений тождества пустому множеству:

$((X \cup M) \cap \overline{N}) \cup (\overline{(X \cup M)} \cap N)=\varnothing$,

- преобразовать по закону де Моргана:

$((X \cup M) \cap \overline{N}) \cup (\overline{X} \cap \overline{M} \cap N)=\varnothing$,

- преобразовать по закону дистрибутивности:

$(X\cap\overline{N})\cup(M\cap\overline{N})\cup(\overline{X}\cap\overline{M}\cap N)=\varnothing$,

- выражение, не связанное с X и его дополнением $\overline{X}$, соединить оператором «$\cap$» с универсальным множеством:

$$\left(X\cap\overline{N}\right)\cup\left(\left(M\cap\overline{N}\right)\cap\left(X\cup\overline{X}\right)\right)\cup\left(\overline{X}\cap\overline{M}\cap N\right)=\varnothing,$$

- преобразовать по закону дистрибутивности:

$(X\cap\overline{N})\cup(X\cap(M\cap\overline{N}))\cup(\overline{X}\cap(M\cap\overline{N}))\cup(\overline{X}\cap(N\cap\overline{M}))=\varnothing$,

- преобразовать по закону дистрибутивности:

$(\overline{N}\cup(M\cap\overline{N}))\cap X\cup(M\cap\overline{N}\cup N\cap\overline{M})\cap\overline{X}=\varnothing$,

- преобразовать по закону поглощения и формуле симметрической разности:

$(X\cap\overline{N})\cup(\overline{X}\cap(M\Delta N)=\varnothing$,

- если алгебраическое выражение равно пустому множеству, то порознь равны пустому множеству алгебраические выражения, связанные оператором «$\cap$» с X и $\overline{X}$:

$$\begin{cases} X\cap\overline{N}=\varnothing, \\ \overline{X}\cap(M\Delta N)=\varnothing. \end{cases}$$

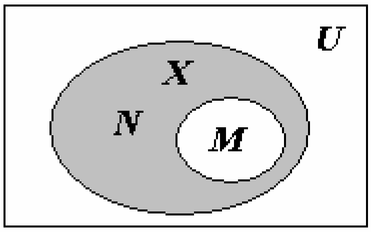


Рис. 5.6. Множество X

Следовательно, $(M\Delta N)\subseteq X\subseteq N$.

Если по условию задачи $(X\cup M)=N$, то $(X\cup M)\subseteq N$ и $N\subseteq(X\cup M)$, т. е. $M\cap\overline{N}=\varnothing$.

Тогда $(M\Delta N)=(N\setminus\overline{M})$ и $(N\setminus M)\subseteq X\subseteq N$.

Откуда $X=(N\setminus M)$. На рис. 5.6 множество X выделено заливкой.

Пример. Найти множество X по системе тождеств:

$$\begin{cases} A\setminus X=B, \\ A\cup X=C \end{cases}$$ при условии $B\subseteq A\subseteq C$, где A, B, C – известные множества.

- Устранить символ разности множеств «\»:

$$\begin{cases} A\cap\overline{X}=B, \\ A\cup X=C, \end{cases}$$

- приравнять симметрическую разность алгебраических выражений тождества пустому множеству:

$$\begin{cases} (A\cap\overline{X})\cap\overline{B}\cup\overline{(A\cap\overline{X})}\cap B=\varnothing, \\ (A\cup X)\cap\overline{C}\cup\overline{(A\cup X)}\cap C=\varnothing, \end{cases}$$

- преобразовать по закону де Моргана:

$$\begin{cases} A\cap\overline{B}\cap\overline{X}\cup(\overline{A}\cup X)\cap B=\varnothing, \\ A\cap\overline{C}\cup\overline{C}\cap X\cup\overline{A}\cap C\cap\overline{X}=\varnothing, \end{cases}$$

- преобразовать по закону дистрибутивности:

$$\begin{cases} A \cap \overline{B} \cap \overline{X} \cup \overline{A} \cap B \cup B \cap X = \varnothing, \\ A \cap \overline{C} \cup \overline{C} \cap X \cup \overline{A} \cap C \cap \overline{X} = \varnothing, \end{cases}$$

- выражение, не связанное с X и его дополнением $\overline{X}$, соединить оператором «$\cap$» с универсальным множеством:

$$\begin{cases} (A \cap \overline{B} \cap \overline{X}) \cup (\overline{A} \cap B(X \cup \overline{X})) \cup (B \cap X) = \varnothing, \\ (A \cap \overline{C} \cap (X \cup \overline{X})) \cup (\overline{C} \cap X) \cup (\overline{A} \cap C \cap \overline{X}) = \varnothing, \end{cases}$$

- преобразовать по закону дистрибутивности:

$$\begin{cases} (A \cap \overline{B} \cap \overline{X}) \cup (\overline{A} \cap B \cap X) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{X}) \cup (B \cap X) = \varnothing, \\ (A \cap \overline{C} \cap X) \cup (A \cap \overline{C} \cap \overline{X}) \cup (\overline{C} \cap X) \cup (\overline{A} \cap C \cap \overline{X}) = \varnothing, \end{cases}$$

- преобразовать по закону коммутативности:

$$\begin{cases} (\overline{A} \cap B \cap X \cup B \cap X) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{X} \cup \overline{A} \cap B \cap \overline{X}) = \varnothing, \\ (A \cap \overline{C} \cap X \cup \overline{C} \cap X) \cup (A \cap \overline{C} \cap \overline{X} \cup \overline{A} \cap C \cap \overline{X}) = \varnothing, \end{cases}$$

- преобразовать по закону дистрибутивности:

$$\begin{cases} (\overline{A} \cap B \cup B) \cap X \cup (A \cap \overline{B} \cup \overline{A} \cap B) \cap \overline{X} = \varnothing, \\ (A \cap \overline{C} \cup \overline{C}) \cap X \cup (A \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap C) \cap \overline{X} = \varnothing, \end{cases}$$

- преобразовать по закону поглощения:

$$\begin{cases} B \cap X \cup (A \Delta B) \cap \overline{X} = \varnothing, \\ \overline{C} \cap X \cup (A \Delta C) \cap \overline{X} = \varnothing, \end{cases}$$

- если по условию задачи $B \subseteq A \subseteq C$,
- то $\begin{cases} (A \Delta B) = (A \backslash B) \cup \varnothing = (A \backslash B), \\ (A \Delta C) = (C \backslash A) \cup \varnothing = (C \backslash A). \end{cases}$

Тогда $\begin{cases} B \cap X \cup (A \setminus B) \cap \overline{X} = \varnothing, \\ \overline{C} \cap X \cup (C \setminus A) \cap \overline{X} = \varnothing, \end{cases}$

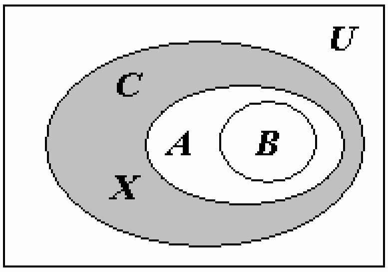


Рис.5.7 Множество X

Откуда множество X есть:

$$\begin{cases} (A \setminus B) \subseteq X \subseteq \overline{B}, \\ (C \setminus A) \subseteq X \subseteq C. \end{cases}$$

Так как по условию задачи $B \subseteq A \subseteq C$, то $X = (C \setminus A)$. На рис. 5.7 множество X выделено заливкой.

Глава 6. Алгебра нечётких множеств

Если на множестве U сформировать нечёткие подмножества, то к ним также применимы теоретико-множественные операции *объединения* $X' = (X'_i \cup X'_j)$, *пересечения* $X' = (X'_i \cap X'_j)$ и *дополнения* $\overline{X'} = U \setminus X'$. Особенностью исполнения таких операций является необходимость вычисления степени принадлежности каждого элемента универсального множества U множеству X'.

Множество нечётких подмножеств универсального множества – $B'(U)$ вместе с теоретико-множественными операциями и функцией принадлежности – $\mu_{x'}(u)$ формируют алгебру нечётких множеств:

$$A' = \langle B'(U),\ \bar{\ },\ \cup,\ \cap,\ \mu_{x'}(u)\rangle,$$

где $B'(U)$ – носитель алгебры нечётких множеств, $\bar{\ }$, $\cup$, $\cap$ – алгебраические операции, $\mu_{x'}(u)$ – функция принадлежности элемента универсального множества U нечёткому подмножеству X'.

6.1. Операции над нечёткими множествами

Объединение нечётких множеств A' и B' есть множество C', состоящее из элементов множества U, которые принадлежат нечётким множествам A' или B', т. е. $C'=(A'\cup B')$. Степень принадлежности элементов универсального множества нечёткому множеству C' равна максимальному значению степени принадлежности элемента нечётким множествам A' и B', т.е.

$$\mu_{C'}(u)=(\mu_A(u)\vee\mu_B(u))=\max\{\mu_A(u),\ \mu_B(u)\}. \qquad (6.1)$$

<u>Пример</u>. Даны нечёткие множества $A'=\{0{,}6/u_1,\ 0{,}4/u_2,\ 0{,}8/u_3,\ 0{,}2/u_4,\ 1{,}0/u_5,\ 0{,}3/u_6\}$ и $B'=\{0{,}9/u_1,\ 0{,}4/u_2,\ 1{,}0/u_3,\ 0{,}7/u_7,\ 0{,}3/u_8,\ 0{,}5/u_9\}$. Найти $C'=(A'\cup B')$.

Ответ: $C'=(A'\cup B')=\{\max\{0{,}6;\ 0{,}9\}/u_1,\ \max\{0{,}4;\ 0{,}4\}/u_2,\ \max\{0{,}8;\ 1{,}0\}/u_3,\ \max\{0{,}2;\ 0\}/u_4,\ \max\{1{,}0;\ 0\}/u_5,\ \max\{0{,}3;\ 0\}/u_6,\ \max\{0;\ 0{,}7\}/u_7,\ \max\{0;\ 0{,}3\}/u_8,\ \max\{0;\ 0{,}5\}/u_9\}=\{0{,}9/u_1,\ 0{,}4/u_2,\ 1{,}0/u_3,\ 0{,}2/u_4,\ 1{,}0/u_5,\ 0{,}3/u_6,\ 0{,}7/u_7,\ 0{,}3/u_8,\ 0{,}5/u_9\}$.

<u>Пример.</u> Даны нечёткие отображения $h'_1=\{\mu_{h'1}(x_i,\ y_j)/(x_i,\ y_j)\}$ и $h'_2=\{\mu_{h'2}(x_i,\ y_j)/(x_i,\ y_j)\}$ (см. табл. 6.1*a* и 6.1*b*). Найти $h'=(h'_1\cup h'_2)$.

Степень принадлежности $\mu_{h'}(x_i,y_j)$ объединению двух нечётких отображений есть $\mu_{h'}(x_i,\ y_j)=\mu_{h'1}(x_i,\ y_j)\vee\mu_{h'2}(x_i,\ y_j)=\max\{\mu_{h'1}(x_i,\ y_j),\ \mu_{h'2}(x_i,\ y_j)\}$.

Например, $\mu_{h'}(x_1,\ y_3)=\max\{\mu_{h'1}(x_1,\ y_3);\ \mu_{h'2}(x_1,\ y_3)\}=\max\{0{,}4;\ 0{,}2\}=0{,}4$ или $\mu_{h'}(x_4,\ y_4)=\max\{\mu_{h'1}(x_4,\ y_4);\ \mu_{h'2}(x_4,\ y_4)\}=\max\{0{,}9;\ 0{,}8\}=0{,}9$.

В табл. 6.1*c* приведены результаты исполнения этой операции.

Таблица 6.1*a*

h_1'	y_2	y_3	y_4
x_1	0,2	0,4	0,6
x_2	0,3	0,5	0,7
x_3	0,2	0,5	0,4
x_4	0,3	0,6	0,9

$\cup$

Таблица 6.1*b*

h_2'	y_2	y_3	y_4
x_1	0,4	0,2	0,8
x_2	0,5	0,7	0,3
x_3	0,5	0,2	0,6
x_4	0,4	0,7	0,8

=

Таблица 6.1*c*

h'	y_2	y_3	y_4
x_1	0,4	0,4	0,8
x_2	0,5	0,7	0,7
x_3	0,5	0,5	0,6
x_4	0,4	0,7	0,9

Если кортежи двух отображений несовместимы и/или отображения имеют различное число кортежей, то следует привести матрицы к одинаковой размерности, заполнив нулевыми значениями степени принадлежности недостающие атрибуты.

<u>Пример.</u> Даны нечёткие отображения $h'_1=\{\mu_{q'1}(x_i,\ y_j)/(x_i,\ y_j)\}$ и $h'_2=\{\mu_{q'2}(x_i,$

$y_j)/(x_i, y_j)\}$ (см. табл. 6.2a, 6.2b). Найти $h' = (h'_1 \cup h'_2)$.

Например, в отображении h'_1 нет атрибутов x_5, x_6, y_1, а в отображении h'_2 – атрибутов – x_1, x_2, y_4. Поэтому $\mu_{h'}(x_5, y_1) = \max\{\mu_{h'1}(x_5, y_1); \mu_{h'2}(x_5, y_1)\} = \max\{0; 0{,}5\} = 0{,}5$ или $\mu_{h'}(x_1, y_4) = \max\{\mu_{h'1}(x_1, y_4); \mu_{h'2}(x_1, y_4)\} = \max\{0{,}6; 0\} = 0{,}6$.

В табл. 6.2*c* приведены результаты исполнения этой операции.

Таблица 6.2*a*

h'_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	0,2	0,4	0,6
x_2	0	0,3	0,5	0,7
x_3	0	0,2	0,5	0,4
x_4	0	0,3	0,6	0,9
x_5	0	0	0	0
x_6	0	0	0	0

$\cup$

Таблица 6.2*b*

h'_2	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	0	0	0
x_2	0	0	0	0
x_3	0,4	0,2	0,8	0
x_4	0,5	0,7	0,3	0
x_5	0,5	0,2	0,6	0
x_6	0,4	0,7	0,8	0

=

Таблица 6.2*c*

h'	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	0,2	0,4	0,6
x_2	0	0,3	0,5	0,7
x_3	0,4	0,2	0,8	0,4
x_4	0,5	0,7	0,6	0,9
x_5	0,5	0,2	0,6	0
x_6	0,4	0,7	0,8	0

<u>Пример.</u> Даны нечёткие отношения $r'_1 = \{\mu_{r'1}(x_i, x_j)/(x_i, x_j)\}$ и $r'_2 = \{\mu_{r'2}(x_i, x_j)/(x_i, x_j)\}$ (см. табл. 6.3*a* и 6.3*b*). Найти $r' = (r'_1 \cup r'_2)$.

Степень принадлежности элемента (x_i, x_j) объединению двух нечётких отношений есть $\mu_{r'}(x_i, x_j) = \mu_{r'1}(x_i, x_j) \vee \mu_{r'2}(x_i, x_j) = \max\{\mu_{q'1}(x_i, x_j), \mu_{q'2}(x_i, x_j)\}$.

В табл. 6.3*c* приведены результаты исполнения этой операции.

Таблица 6.3*a*

r'_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0,2	0,4	0,6	0,3
x_2	0,3	0,5	0,7	0,5
x_3	0,2	0,5	0,4	0,7
	0,3	0,6	0,9	0,9

$\cup$

Таблица 6.3*b*

r'_2	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0,4	0,2	0,8	0,9
x_2	0,5	0,7	0,3	0,7
x_3	0,5	0,2	0,6	0,5
x_4	0,4	0,7	0,8	0,3

=

Таблица 6.3*c*

r'	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0,4	0,4	0,8	0,9
x_2	0,5	0,7	0,7	0,7
x_3	0,5	0,5	0,6	0,7
x_4	0,4	0,7	0,9	0,9

Если атрибуты двух отношений несовместимы и/или отношения имеют различное число атрибутов, то следует привести матрицы отношений к одинаковой размерности, заполнив нулевыми значениями степени принадлежности недостаюшие атрибуты.

<u>Пример.</u> Даны нечёткие отношения $r'_1 = \{\mu_{r'1}(x_i, x_j)/(x_i, x_j)\}$ и $r'_2 = \{\mu_{r'2}(x_i, x_j)/(x_i, x_j)\}$ (см. табл. 6.4*a* и 6.4*b*). Найти $r' = (r'_1 \cup r'_2)$.

В табл. 6.4*c* приведены результаты исполнения этой операции.

Таблица 6.4*a*

r'_1	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_0	0,2	0,4	0,6	0,3	0	0
x_1	0,3	0,5	0,7	0,5	0	0
x_2	0,2	0,5	0,4	0,7	0	0
x_3	0,3	0,6	0,9	0,9	0	0
x_4	0	0	0	0	0	0
x_5	0	0	0	0	0	0

$\cup$

Таблица 6.4*b*

r'_2	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_0	0	0	0	0	0	0
x_1	0	0	0	0	0	0
x_2	0	0	0,4	0,2	0,8	0,9
x_3	0	0	0,5	0,7	0,3	0,7
x_4	0	0	0,5	0,2	0,6	0,5
x_5	0	0	0,4	0,7	0,8	0,3

=

Таблица 6.4*c*

r'	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_0	0,2	0,4	0,6	0,3	0	0
x_1	0,3	0,5	0,7	0,5	0	0
x_2	0,2	0,5	0,4	0,7	0,8	0,9
x_3	0,3	0,6	0,9	0,9	0,3	0,7
x_4	0	0	0,5	0,2	0,6	0,5
x_5	0	0	0,4	0,7	0,8	0,3

Пересечение нечётких множеств A' и B' есть множество C', состоящее из элементов множества U, которые принадлежат нечётким множествам A' и B', т. е. $C'=(A'\cap B')$. Степень принадлежности нечёткому множеству C' равна минимальному значению степени принадлежности $u\in U$ нечётким множествам A' и B':

$$\mu_{C'}(u)=\mu_{A'}(u)\&\mu_{B'}(u)=\min\{\mu_{A'}(u),\ \mu_{B'}(u)\}. \qquad (6.2)$$

Пример. Даны нечёткие множества $A'=\{0{,}6/u_1,\ 0{,}4/u_2,\ 0{,}8/u_3,\ 0{,}2/u_4,\ 1{,}0/u_5,\ 0{,}3/u_6\}$ и $B'=\{0{,}9/u_1,\ 0{,}4/u_2,\ 1{,}0/u_3,\ 0{,}7/u_7,\ 0{,}3/u_8,\ 0{,}5/u_9\}$. Найти $C'=(A'\cap B')$.

Ответ: $C'=(A\cap B)=\{0{,}6/u_1\ ,0{,}4/u_2,\ 0{,}8/u_3\}$.

$C'=(A'\cap B')=\{\min\{0{,}6;\ 0{,}9\}/u_1,\ \min\{0{,}4;\ 0{,}4\}/u_2,\ \min\{0{,}8;\ 1{,}0\}/u_3,\ \min\{0{,}2;\ 0\}/u_4,\ \min\{1{,}0;\ 0\}/u_5,\ \min\{0{,}3;\ 0\}/u_6,\ \min\{0;\ 0{,}7\}/u_7,\ \min\{0;\ 0{,}3\}/u_8,\ \min\{0;\ 0{,}5\}/u_9\}=\{0{,}6/u_1\ ,0{,}4/u_2,\ 0{,}8/u_3\}$.

Пример. Даны $h'_1=\{\mu_{h'1}(x_i,\ y_j)/(x_i,\ y_j)\}$ и $h'_2=\{\mu_{h'2}(x_i,\ y_j)/(x_i,\ y_j)\}$ (см. табл. 6.5 *a* и 6.5*b*). Найти $h'=(h'_1\cap h'_2)$.

Степень принадлежности элемента (x_i,y_j) нечёткого отображения есть:

$$\mu_{h'}(x_i,\ y_j)=\mu_{h'1}(x_i,\ y_j)\&\mu_{h'2}(x_i,\ y_j)=\min\{\mu_{h'1}(x_i,\ y_j),\ \mu_{h'2}(x_i,\ y_j)\}. \qquad (6.3)$$

Например, $\mu_{h'}(x_1,\ y_3)=\min\{\mu_{h'1}(x_1,\ y_3);\ \mu_{h'2}(x_1,\ y_3)\}=\min\{0{,}4;\ 0{,}2\}=0{,}2$ или $\mu_{h'}(x_4,\ y_4)=\min\{\mu_{h'1}(x_4,\ y_4);\ \mu_{h'2}(x_4,\ y_4)\}=\min\{0{,}9;\ 0{,}8\}=0{,}8$.

В табл. 6.5*c* приведены результаты исполнения этой операции.

Таблица 6.5 *a*

h_1'	y_2	y_3	y_4
x_1	0,2	0,4	0,6
x_2	0,3	0,5	0,7
x_3	0,2	0,5	0,4
x_4	0,3	0,6	0,9

$\cap$

Таблица 6.5*b*

h_2'	y_2	y_3	y_4
x_1	0,4	0,2	0,8
x_2	0,5	0,7	0,3
x_3	0,5	0,2	0,6
x_4	0,4	0,7	0,8

=

Таблица 6.5 *c*

h'	y_2	y_3	y_4
x_1	0,2	0,2	0,6
x_2	0,3	0,5	0,3
x_3	0,2	0,2	0,4
x4	0,3	0,6	0,8

Если строки и/или столбцы отображения несовместимы, то привести матрицы отображений к одинаковой размерности, заполнив нулевыми значениями степени принадлежности недостаюшие атрибуты.

Например, в отображении h'_1 (см. табл. 6.6*a*) нет атрибутов x_5, x_6, y_1, а в отображении h'_2 (табл. 6.6*b*) – атрибутов – x_1, x_2, y_4. Поэтому $\mu_{h'}(x_5,\ y_1)=\min\{\mu_{h'1}(x_5,\ y_1);\ \mu_{h'2}(x_5,\ y_1)\}=\min\{0;\ 0{,}5\}=0$ или $\mu_{h'}(x_3,\ y_3)=\min\{\mu_{h'1}(x_3,\ y_3);\ \mu_{h'2}(x_3,\ y_3)\}=\max\{0{,}5;\ 0{,}8\}=0{,}5$.

В табл. 6.6*c* приведены результаты исполнения этой операции.

Таблица 6.6*a*

h_1'	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	0,2	0,4	0,6
x_2	0	0,3	0,5	0,7
x_3	0	0,2	0,5	0,4
x_4	0	0,3	0,6	0,9
x_5	0	0	0	0
x_6	0	0	0	0

$\cap$

Таблица 6.6*b*

h_2'	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	0	0	0
x_2	0	0	0	0
x_3	0,4	0,2	0,8	0
x_4	0,5	0,7	0,3	0
x_5	0,5	0,2	0,6	0
x_6	0,4	0,7	0,8	0

=

Таблица 6.6*c*

h'	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	0	0	0
x_2	0	0	0	0
x_3	0	0,2	0,5	0
x_4	0	0,3	0,3	0
x_5	0	0	0	0
x_6	0	0	0	0

Пример. Даны $r'_1=\{\mu_{r'1}(x_i, x_j)/(x_i, x_j)\}$ и $r'_2=\{\mu_{r'2}(x_i, x_j)/(x_i, x_j)\}$ (см. табл. 6.7*a* и 6.7*b*). Найти $r'=(r'_1 \cap r'_2)$.

Степень принадлежности элемента (x_i,x_j) нечёткому отношению есть

$$\mu_{r'}(x_i, x_j)= \mu_{r'1}(x_i, x_j)\&\mu_{r'2}(x_i, x_j)= \min\{\mu_{q'1}(x_i, x_j), \mu_{q'2}(x_i, x_j)\}. \qquad (6.4)$$

В табл. 6.7*c* приведены результаты исполнения этой операции

Таблица 6.7*a*

r'_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0,2	0,4	0,6	0,3
x_2	0,3	0,5	0,7	0,5
x_3	0,2	0,5	0,4	0,7
x_4	0,3	0,6	0,9	0,9

$\cap$

Таблица 6.7*b*

r'_2	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0,4	0,2	0,8	0,9
x_2	0,5	0,7	0,3	0,7
x_3	0,5	0,2	0,6	0,5
x_4	0,4	0,7	0,8	0,3

=

Таблица 6.7 *c*

r'	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0,2	0,2	0,6	0,3
x_2	0,3	0,5	0,3	0,5
x_3	0,2	0,2	0,4	0,5
x_4	0,3	0,6	0,8	0,3

Если атрибуты двух отношений несовместимы, то привести матрицы отношений к одинаковой размерности, заполнив нулевыми значениями степени принадлежности недостаюшие атрибуты. В табл. 6.8*c* приведены результаты операции.

Таблица 6.8*a*

r'_1	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_0	0,2	0,4	0,6	0,3	0	0
x_1	0,3	0,5	0,7	0,5	0	0
x_2	0,2	0,5	0,4	0,7	0	0
x_3	0,3	0,6	0,9	0,9	0	0
x_4	0	0	0	0	0	0
x_5	0	0	0	0	0	0

$\cap$

Таблица 6.8*b*

r'_2	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_0	0	0	0	0	0	0
x_1	0	0	0	0	0	0
x_2	0	0	0,4	0,2	0,8	0,9
x_3	0	0	0,5	0,7	0,3	0,7
x_4	0	0	0,5	0,2	0,6	0,5
x_5	0	0	0,4	0,7	0,8	0,3

=

Таблица 6.8*c*

r'	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_0	0	0	0	0	0	0
x_1	0	0	0	0	0	0
x_2	0	0	0,4	0,2	0	0
x_3	0	0	0,5	0,7	0	0
x_4	0	0	0	0	0	0
x_5	0	0	0	0	0	0

Дополнение нечеткого множества A' есть нечеткое множество $\overline{A'}$, состоящее из всех элементов универсального множества *U*, которые не принадлежат нечеткому множеству *A'*. Степень принадлежности нечеткому множеству $\overline{A'}$ равна дополнению степени принадлежности нечеткому множеству *A'* до значения степени принадлежности универсальному множеству *U*:

$$\mu_{\rceil A'}(u)= 1 - \mu_{A'}(u). \qquad (6.5)$$

Пример. Даны универсальное множество $U=\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9\}$ и два нечётких подмножества $A'=\{0{,}6/u_1, 0{,}4/u_2, 0{,}8/u_3, 0{,}2/u_4, 1{,}0/u_5, 0{,}3/u_6\}$ и $B'=\{0{,}9/u_1, 0{,}4/u_2, 1{,}0/u_3, 0{,}7/u_7, 0{,}3/u_8, 0{,}5/u_9\}$. Найти $\overline{A'}$ и $\overline{B'}$.

Ответ: $\overline{A'}=\{0{,}4/u_1, 0{,}6/u_2, 0{,}2/u_3, 0{,}8/u_4, 0{,}7/u_6, 1{,}0/u_7, 1{,}0/u_8, 1{,}0/u_9\}$,

$\overline{B'}=\{0{,}1/u_1, 0{,}6/u_2, 1{,}0/u_4, 1{,}0/u_5, 1{,}0/u_6, 0{,}3/u_7, 0{,}7/u_8, 0{,}5/u_9\}$.

Пример. Дано нечёткое отображение $h'=\{\mu_{h'}(x_i, y_j)/(x_i, y_j)\}$. Найти $\overline{h'}$.

Степень принадлежности дополнению нечёткого отображения есть

$$\mu_{\rceil h'}(x_i, y_j)=(1-\mu_{h'}(x_i, y_j)). \qquad (6.6)$$

В табл. 6.9*a* и 6.9*b* приведены результаты исполнения этой операции.

Таблица 6.9*a*

h'	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	0,2	0,4	0,6
x_2	0	0,3	0,5	0,7
x_3	0	0,2	0,5	0,4
x_4	0	0,3	0,6	0,9

$\Rightarrow$

Таблица 6.9*b*

$\overline{h'}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1	0,8	0,6	0,4
x_2	1	0,7	0,5	0,3
x_3	1	0,8	0,5	0,6
x_4	1	0,7	0,4	0,1

Пример. Дано нечёткое отношение $r=\{\mu_{h'}(x_i, x_j)/(x_i, x_j)\}$. Найти $\overline{r}'$.
Степень принадлежности дополнению нечёткого отношения есть:

$$\mu_{\neg r'}(x_i, x_j)=(1 - \mu_{r'}(x_i, x_j)). \qquad (6.7)$$

В табл. 6.10*a* и 6.10*b* приведены результаты исполнения этой операции.

Таблица 6.10*a*

r'	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0,4	0	0,8	0,9
x_2	0,5	0,7	0,3	0,7
x_3	0,5	0	0,6	0,5
x_4	0,4	0,7	0,8	0,3

$\Rightarrow$

Таблица 6.10*b*

$\overline{r'}$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0,6	1	0,2	0,1
x_2	0,5	0,3	0,7	0,3
x_3	0,5	1	0,4	0,5
x_4	0,6	0,3	0,2	0,7

Разность нечётких множеств A' и B' есть множество C', состоящее из тех элементов множества U, которые принадлежат нечёткому множеству A' и не принадлежат нечёткому множеству B', т. е. $C'=A'\backslash B'=(A'\cap\overline{B'})$.

Степень принадлежности элемента универсального множества нечёткому множеству C' равна минимальному значению его функции принадлежности нечётким множествам A' и $\overline{B'}$:

$$\mu_{C'}(u)=\mu_{A'}(u)\&(1-\mu_{B'}(u))=\min\{\mu_{A'}(u), (1-\mu_{B'}(u))\}. \qquad (6.8)$$

Пример. Даны универсальное множество $U=\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9\}$ и два нечётких подмножества $A'=\{0{,}6/u_1, 0{,}4/u_2, 0{,}8/u_3, 0{,}2/u_4, 1{,}0/u_5, 0{,}3/u_6\}$ и $B'=\{0{,}9/u_1, 0{,}4/u_2, 1{,}0/u_3, 0{,}7/u_7, 0{,}3/u_8, 0{,}5/u_9\}$. Найти $C'=A'\backslash B'$.

Ответ: $C'=A'\backslash B'=\{0{,}1/u_1, 0{,}4/u_2, 0{,}2/u_4, 1{,}0/u_5, 0{,}3/u_6\}$.

Пример. Даны $h'_1=\{\mu_{h'1}(x_i, y_j)/(x_i, y_j)\}$ и $h'_2=\{\mu_{h'2}(x_i, y_j)/(x_i, y_j)\}$. Найти $h'=(h'_1\backslash h'_2)$.

Известно, что $h'=(h'_1\backslash h'_2)=h_1\cap\overline{h}_2$. Поэтому степень принадлежности элемента (x_i,y_j) нечёткому отображению есть

$$\mu_{h'}(x_i, y_j)=\mu_{h'1}(x_i, y_j)\&(1-\mu_{h'2}(x_i, y_j))=\min\{\mu_{h'1}(x_i, y_j), (1-\mu_{h'2}(x_i, y_j))\}. \qquad (6.9)$$

В таблицах 6.11 приведены результаты исполнения этой операции.

Таблица 6.11*a*

h'_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,2	0,4	0,6
x_2	0,3	0,5	0,7
x_3	0,2	0,5	0,4
x_4	0,3	0,6	0,9

\

Таблица 6.11*b*

h'_2	y_2	y_3	y_4
x_1	0,4	0,2	0,8
x_2	0,5	0,7	0,3
x_3	0,5	0,2	0,6
x_4	0,4	0,7	0,8

=

Таблица 6.11*c*

h'	y_2	y_3	y_4
x_1	0,2	0,4	0,2
x_2	0,3	0,3	0,3
x_3	0,2	0,5	0,4
x_4	0,3	0,3	0,2

Пример. Даны $r'_1=\{\mu_{r'1}(x_i, x_j)/(x_i, x_j)\}$ и $r'_2=\{\mu_{r'2}(x_i, x_j)/(x_i, x_j)\}$. Найти $r'=(r'_1\setminus r'_2)$.

Известно, что $r'=(r'_1\setminus r'_2) =(r'_1\cap \overline{r_2})$. Поэтому степень принадлежности (x_i,x_j) нечёткому отношению есть

$$\mu_{r'}(x_i, x_j)= \mu_{r'1}(x_i, x_j)\&(1-\mu_{r'2}(x_i, x_j))= \min\{\mu_{r'1}(x_i, x_j), (1-\mu_{r'2}(x_i, x_j))\}. \quad (6.10)$$

В табл. 6.12 приведены результаты исполнения этой операции.

Таблица 6.12*a*

r'_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0,2	0,4	0,6	0,3
x_2	0,3	0,5	0,7	0,5
x_3	0,2	0,5	0,4	0,7
x_4	0,3	0,6	0,9	0,9

\

Таблица 6.12*b*

r'_2	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0,4	0,2	0,8	0,9
x_2	0,5	0,7	0,3	0,7
x_3	0,5	0,2	0,6	0,5
x_4	0,4	0,7	0,8	0,3

=

Таблица 6.12*c*

r'	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0,2	0,4	0,2	0,1
x_2	0,3	0,3	0,7	0,3
x_3	0,2	0,5	0,4	0,5
x_4	0,3	0,3	0,2	0,7

Симметричная разность нечётких множеств A' и B' есть нечёткое множество C', состоящее из элементов универсального множества U, которые принадлежат нечётким множествам A' и $\overline{B'}$ или В$'$ и $\overline{A'}$, т. е.

$$C'=(A'\Delta B')= (A'\cap \overline{B'})\cup(B'\cap \overline{A'}). \quad (6.11)$$

Степень принадлежности нечёткому множеству C' равна максимальному значению из двух минимальных значений степеней принадлежности элемента $(A'\cap \overline{B'})$ и $(B'\cap \overline{A'})$, т.е

$$\begin{aligned}\mu_{C'}(u) &= \left(\mu_{A'}(u)\,\&\,\mu_{\overline{B'}}(u)\right)\vee\left(\mu_{B'}(u)\,\&\,\mu_{\overline{A'}}(u)\right)=\\ &=\max\left\{\min\left\{\mu_{A'}(u),\mu_{\overline{B}}(u)\right\},\min\left\{\mu_{B'}(u),\mu_{\overline{A'}}(u)\right\}\right\}.\end{aligned} \quad (6.12)$$

Пример. Даны универсальное множество $U=\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9\}$ и два нечетких подмножества $A'=\{0{,}6/u_1, 0{,}4/u_2, 0{,}8/u_3, 0{,}2/u_4, 1{,}0/u_5, 0{,}3/u_6\}$ и $B'=\{0{,}9/u_1, 0{,}4/u_2, 1{,}0/u_3, 0{,}7/u_7, 0{,}3/u_8, 0{,}5/u_9\}$. Найти $C'=(A'\Delta B')$.

Ответ: $C'=\{0{,}4/u_1, 0{,}4/u_2, 0{,}2/u_3, 0{,}2/u_4, 1{,}0/u_5, 0{,}3/u_6, 0{,}7/u_7, 0{,}3/u_8, 0{,}5/u_9\}$.

Пример. Даны $h'_1=\{\mu_{h'1}(x_i, y_j)/(x_i, y_j)\}$ и $h'_2=\{\mu_{h'2}(x_i, y_j)/(x_i, y_j)\}$. Найти $h'=(h'_1\Delta h'_2)$.

Степень принадлежности нечёткому отображению h$'$есть:

$$\mu_{h'}(x_i, y_j)=(\mu_{h'1}(x_i, y_j)\&(1-\mu_{h'2}(x_i, y_j)))\vee(\mu_{h'2}(x_i, y_j)\&(1-\mu_{h'1}(x_i, y_j)))=$$
$$=\max\{\min\{\mu_{h'}(x_i, y_j), (1-\mu_{h2'}(x_i, y_j))\}, \min\{\mu_{h2'}(x_i, y_j), (1-\mu_{h1'}(x_i, y_j))\}\}. \quad 6.13)$$

В табл. 6.13 приведены результаты исполнения этой операции.

Таблица 6.13*a*

h'_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,2	0,4	0,6
x_2	0,3	0,5	0,7
x_3	0,2	0,5	0,4
x_4	0,3	0,6	0,9

Δ

Таблица 6.13*b*

h'_2	y_2	y_3	y_4
x_1	0,4	0,2	0,8
x_2	0,5	0,7	0,3
x_3	0,5	0,2	0,6
x_4	0,4	0,7	0,8

=

Таблица 6.13*c*

h'	y_2	y_3	y_4
x_1	0,4	0,4	0,4
x_2	0,5	0,5	0,3
x_3	0,5	0,5	0,6
x_4	0,4	0,4	0,2

Пример. Даны $r'_1=\{\mu_{r'1}(x_i, x_j)/(x_i, x_j)\}$ и $r'_2=\{\mu_{r'2}(x_i, x_j)/(x_i, x_j)\}$ (табл. 6.15*a*, 6.15*b*). Найти $r'=(r'_1 \Delta r'_2)$.

Степень принадлежности нечёткому отношению r элемента (x_i, x_j) есть

$$\mu_{r'}(x_i, x_j)=(\mu_{r'1}(x_i, x_j)\&(1-\mu_{r'2}(x_i, x_j)))\vee(\mu_{r'2}(x_i, x_j)\&(1-\mu_{r'1}(x_i, x_j)))=$$
$$\max\{\min\{\mu_{r'}(x_i, x_j), (1-\mu_{r2'}(x_i, x_j))\}, \min\{\mu_{r2'}(x_i, x_j), (1-\mu_{r1'}(x_i, x_j))\}\}. \qquad (6.14)$$

В табл. 6.15*c* приведены результаты исполнения этой операции.

Таблица 6.15*a*

r'_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0,2	0,4	0,6	0,3
x_2	0,3	0,5	0,7	0,5
x_3	0,2	0,5	0,4	0,7
x_4	0,3	0,6	0,9	0,9

Δ

Таблица 6.15*b*

r'_2	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0,4	0,2	0,8	0,9
x_2	0,5	0,7	0,3	0,7
x_3	0,5	0,2	0,6	0,5
x_4	0,4	0,7	0,8	0,3

=

Таблица 6.15*c*

r'	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0,4	0,4	0,4	0,7
x_2	0,5	0,5	0,7	0,5
x_3	0,5	0,5	0,6	0,5
x_4	0,4	0,4	0,2	0,7

6.2. Композиция нечётких отображений

Композиция нечётких отображений есть нечёткое отображение:

$$h'=(h'_1 \circ h'_2)=\{\mu_{h'}(x_{1i}, z_{2k})/(x_{1i}, z_{2k})|\ \pi_2(h'_1(x_{1i}, y_{1j}))=\pi_2(h'_2(y_{2j}, z_{2k}))\}. \qquad (6.15)$$

Степень принадлежности элементов h'_1 и h'_2 нечёткому отображению h' существует тогда и только тогда, когда есть хотя бы один элемент y_j, принадлежащий h'_1 и h'_2, т. е.

$$\mu_{h'}(x_{1i}, z_{2k})=\bigvee_j(\mu_{h'_1}(x_{1i}, y_{1j})\&\mu_{h'_2}(y_{2j}, z_{2k}))=\max_j\{\min(\mu_{h'_1}(x_{1i}, y_{1j}), \mu_{h'_2}(y_{2j}, z_{2k})\}. (6.16)$$

Пример. Дано нечёткое отображение h': $A'\to B'$ (табл. 6.16*b*), носителями чего являются $x_i\in A$ и $y_j\in B$, и нечёткое множество $A'=\{0,6/x_1, 0,9/x_4, 0,1/x_5\}$ (табл. 6.16*a*). Найти нечёткое множество B' по нечёткому отображению h'.

Для y_1 степень принадлежности множеству B' есть $\mu_{B'}(y_1)=\max\{\min\{0,6, 0\}, \min\{0,9, 0\}, \min\{0,1, 0\}\}=0$, $\mu_{B'}(y_2)=\max\{\min\{0,6, 0,2\}, \min\{0,9, 0,3), \min\{0,1, 0,7\}=0,3$, $\mu_{B'}(y_3)=\max\{\min\{0,6, 0\}, \min\{0,9, 0\}, \min\{0,1, 0,8\}\}=0,1$, $\mu_{B'}(y_4)=\max\{\min\{0,6, 0\}, \min\{0,9, 0\}, \min\{0,1, 0\}\}=0$.

Результаты вычисления $\mu_{B'}(y_j)$ представлены в табл. 6.16*c*.

Таблица 6.16*a*

A'	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0,6	0	0	0,9	0,1

$\circ$

Таблица 6.16*b*

h'	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	0,2	0	0
x_2	0	0	0	0
x_3	1,0	0	0,4	0
x_4	0	0,3	0	0
x_5	0	0,7	0,8	0

=

Таблица 6.16*c*

	B'
y_1	0
y_2	0,3
y_3	0,1
y_4	0

Ответ: $B'=\{0,3/y_2, 0,1/y_3\}$.

Пример. Даны нечёткие отображения $h'_1=\{0,3/(x_1, y_1), 1,0/(x_1, y_3), 0,7/(x_2, y_1), 0,9/(x_2, y_2), 0,4/(x_2, y_3)\}$ и $h'_2=\{0,2/(y_1, z_1), 0,8/(y_1, z_3), 1,0/(y_1, z_4), 0,3/(y_2, z_1),$

$0,4/(y_2, z_4)\}$ (см. табл. 6.17*a*, 6.17*b*). Найти $h'=(h'_1 \circ h'2)$.

Результаты вычислений в табл. 6.17*c*.

Таблица 6.17*a*

h'_1	y_1	y_2	y_3
x_1	0,3	0	1,0
x_2	0,7	0,9	0,4

$\circ$

Таблица 6.17*b*

h'_2	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0,2	0	0,8	1,0
y_2	0,3	0	0	0,4
y_3	0	0	0	0

=

Таблица 6.17*c*

h'	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0,2	0	0,3	0,3
x_2	0,3	0	0,7	0,7

Ответ: $h'=\{0,2/(x_1, z_1), 0,3/(x_1, z_3), 0,3/(x_1, z_4), 0,3/(x_2, z_1), 0,7/(x_2, z_3), 0,7/(x_2, z_4)\}$.

<u>Пример.</u> Продолжая пример по изучению согласия мнений руководителей магазинов $\{x_i\}$ и фирм $\{z_k\}$, необходимо найти

$$\mu_{h'}(x_i, z_k)=\bigvee_j(\mu_{h'_1}(x_i, y_j)\&\mu_{h'_2}(y_j, z_k))=\max_j\{\min(\mu_{h'_1}(x_i,y_j), \mu_{h'_2}(y_j,z_k)\}.$$

Композиция $h'=\{\mu_{h'}(x_i, z_k)/ (x_i, z_k)\}$ представлена в таблице 6.18.

Таблица 6.18

h'	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0,9	0,1	0,5	0,7
x_2	0,5	0,9	0,6	0,6
x_3	0,4	0,9	0,5	0,4
x_4	0,8	0,1	0,5	0,6
x_5	0,9	0,9	0,6	0,7
x_6	0,8	0,5	0,5	0,7
x_7	0,8	0,4	0,5	0,7
x_8	0,5	0,8	0,6	0,6
x_9	0,5	0,5	0,5	0,5
x_{10}	0,6	0,8	0,6	0,6
x_{11}	0,1	0,1	0,1	0,1
x_{12}	0,8	0,9	0,5	0,6

Таблица 6.19

h'	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0,9	—	—	0,7
x_2	—	0,9	0,6	0,6
x_3	—	0,9	—	—
x_4	0,8	—	—	0,6
x_5	0,9	0,9	0,6	0,7
x_6	0,8	—	—	0,7
x_7	0,8	—	—	0,7
x_8	—	0,8	0,6	0,6
x_9	—	—	—	—
x_{10}	0,6	0,8	0,6	0,6
x_{11}	—	—	—	—
x_{12}	0,8	0,9	—	0,6

Для примера выполнен расчёт согласия мнений x_{10} и z_2:

$\mu_{h'}(x_{10}, z_2)=\max\{\min\{\mu_{h'1}(x_{10}, y_2), \mu_{h'2}(y_2, z_2)\}, \min\{\mu_{h'1}(x_{10}, y_3), \mu_{h'2}(y_3, z_2)\}, \min\{\mu_{h'1}(x_{10}, y_4), \mu_{h'2}(y_4, z_2)\}\} = \max\{\min\{0,6, 0,1\}, \min\{0,7, 0,9\}, \min\{0,8, 0,9\}, \min\{0,5, 0,1\} = \max\{0,1, 0,7, 0,8, 0,1\}= 0,8$ (см. таблицу 18).

Анализ таблицы показывает, что степень принадлежности согласованности мнений руководителей фирм и магазинов – $h'=\{\mu_{h'}(x_i, z_k)/ (x_i, z_k)\}$ – находится в достаточно широком диапазоне. Если принять порог согласованности не ниже, например, $\alpha>0,5$, то можно выделить зоны предпочтительного использования торговых площадей магазинами фирм. Для этого в таблице 6.19 удалены позиции с уровнем согласия $\alpha\leq0,5$.

Большое значение степени принадлежности согласованности мнений руководителей фирм и магазинов – $\mu_{h'}(x_i, z_k)>0,5$ – показывает:

а) заинтересованность в связях руководителей магазинов с фирмами. Например, почти все руководители магазинов заинтересованы в получении товаров фирмы z_2, для которой $\mu_{h'}(x_i, z_2)/ (x_i, z_2)\}=\{ 0,9/(x_2, z_2), 0,9/(x_3, z_2), 0,9/(x_5,$

z_2), 0,8/(x_8, z_2), 0,8/(x_{10}, z_2), 0,9/(x_{12}, z_2)},

b) соперничество фирм в продвижении своих товаров. Например, фирмы z_1, z_4 соперничают в продвижении товаров в магазины x_6, x_7, а фирмы z_1, z_2 – в магазины x_5, z_{12}.

6.3. Композиция нечётких отношений

Композиция нечётких отношений формирует также нечёткое отношение

$$r'=(r'_1 \circ r'_2)=\{\mu_{r'}(x_{1i}, x_{2k})/(x_{1i}, x_{2k})|\ \pi_2(r'_1(x_{1i}, x_{1j}))=\pi_2(r'_2(\mathrm{x}_{2j}, \mathrm{x}_{2k}))\}. \quad (6.17)$$

Степень принадлежности элементов r'_1 и r'_2 нечёткому отношению r' существует тогда и только тогда, когда существует хотя бы один элемент x_j, принадлежащий r'_1 и r'_2, т. е.

$$\mu_{h'}(x_{1i}, x_{2k})=\bigvee_j(\mu_{r'_1}(x_{1i}, x_{1j})\&\mu_{r'_2}(x_{2j}, x_{2k}))=\max_j\{\min(\mu_{r'_1}(x_{1i}, x_{1j}), \mu_{r'_2}(x_{2j}, x_{2k})\}.$$

(6.18)

<u>Пример.</u> Даны нечёткие отношения r'_1 и r'_2. Найти $r'=(r'_1 \circ r'_2)$.

В таблицах приведены результаты исполнения этой операции

Таблица 6.20*a*

r'_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0,2	0,4	0,6	0,3
x_2	0,3	0,5	0,7	0,5
x_3	0,2	0,5	0,4	0,7
x_4	0,3	0,6	0,9	0,9

∘

Таблица 6.20*b*

r'_2	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0,4	0,2	0,8	0,9
x_2	0,5	0,7	0,3	0,7
x_3	0,5	0,2	0,6	0,5
x_4	0,4	0,7	0,8	0,3

=

Таблица 6.20*c*

r	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0,5	0,4	0,6	0,5
x_2	0,5	0,5	0,6	0,5
x_3	0,5	0,7	0,7	0,5
x_4	0,5	0,7	0,8	0,6

<u>Пример</u>. Продолжая пример со стихийным бедствием, нарушевшем транспортные связи между населенными пунктами (см. стр. 28), службам МЧС необходимо найти более надежные пути.

Для этого можно выполнить композицию нечёткого отношения r'_1 (см. табл. 21*a*) с этим же нечётким отношением:

$$r'=(r'_1 \circ r'_1)=\{\mu_{r'}(x_{1i}, x_{1k})/(x_{1i}, x_{1k})|\ \pi_2(r'_1(x_{1i}, x_{1j}))=\pi_1(r'_1(x_{1j}, x_{1k}))\} \text{ для } i \neq k.$$

Тогда степень принадлежности для $i \neq k$ есть:

$$\mu_{h'}(x_{1i}, x_{1k})=\bigvee_j(\mu_{r'_1}(x_{1i}, x_{1j})\&\mu_{r'1}(x_{1j}, x_{1k}))=\max_j\{\min\{(\mu_{r'_1}(x_{1i}, x_{1j}), \mu_{r'_1}(x_{1j}, x_{1k})\}\},$$

а для $i=k$ $\mu_{h'}(x_{1i}, x_{1k})=1$.

Таблица 21*a*

r'_1	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
a	0	0,8	0	0,4	0
b	0,8	0	0,3	0,7	0,8
c	0	0,3	0	0,2	0,5
d	0,4	0,7	0,2	0	0,5
e	0	0,8	0,5	0,5	0

Таблица 21*b*

$(r'_1 \circ r'_1)$	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
a	1	0,4	0,3	0,7	0,8
b	0,4	1	0,5	0,5	0,5
c	0,3	0,5	1	0,5	0,3
d	0,7	0,5	0,5	1	0,7
e	0,8	0,5	0,3	0,7	1

Анализ табл. 21*a* (нечёткой смежности) и 21*b* (нечёткой достижимости) показывает, что из пункта *a* в пункт *c* вместо $\mu(a, c)=0$ (см.табл. 21*a*) есть более надежный путь через пункт b – $\mu(a, c)=0,3$ (см. табл.21b), из пункта a в пункт e вместо $\mu(a, e)=0$ (см.табл. 21a) есть маршрут через пункт b – ($\mu(a, e)=0,8$ (см. табл.21b) и т.п.

Вопросы и задачи

1.1. Верны ли выражения:

a) $\{1, 2\}\in\{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$?

b) $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}=\{1, 2, 3\}$?

c) $\{1, 2\}\subseteq\{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$?

d) если $A\subseteq B$ и $B\in C$, то $A\in C$?

e) если $A\subseteq\varnothing$, то $A=\varnothing$?

f) $\varnothing=\{\varnothing\}$?

1.2. Перечислите элементы множеств

a) $X=\{x|\ P(x){:}{-}(x^2-7\cdot x+6=0)\}$,

b) $X=\{x|\ P(\mathrm{x}){:}{-}(x^2-1=0)\}$.

1.3. Верно ли, что $A=B$, если

a) $A=\{2, 5, 4\}$, $B=\{5, 4, 2\}$?

b) $A=\{1, 2, 4, 2\}$, $B=\{1, 4, 2\}$?

c) $A=\{2, 4, 5\}$, $B=\{2, 4, 3\}$?

2.1. Даны множества $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Y=\{2, 4, 6\}$ и элементы прямого произведения $\{(1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (5, 2)\}\subseteq(X\otimes Y)$. Что это: соответствие или отображение? Укажите области отправления и прибытия, а также области определения и значений.

2.2. Найти область определения и значения для отображения

a) $h=\{(x, y)|\ P(x, y)$:– «x делит y без остатка», $x, y\in\{1, 2,..., 10\}\}$,

b) $h=\{(x, y)|\ P(x, y)$:– «наименьшее значение x для условия $2x\geq 3y$ при $x, y\in\{1, 2,...10\}\}$. Составить булеву таблицу.

2.3. Даны два отображения h_1 и h_2. Найти композицию отображений.

h_1					
	a	b	c	d	e
	1	4	3	1	5

h_2					
	1	2	3	4	5
	x	y	z	u	s

3.1. Какими свойствами обладают отношения r_1, r_2, r_3, r_4:

r_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	1	0
x_2	0	1	1	1
x_3	1	1	1	0
x_4	0	1	0	1

,

r_2	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1	0	1
x_2	1	0	1	0
x_3	0	1	0	1
x_4	1	0	1	0

,

r_3	x_1	x_2	r_3	r_4
x_1	1	1	1	0
x_2	0	1	0	1
x_3	0	1	1	1
x_4	0	1	0	1

,

r_4	x_1	x_2	r_3	r_4
x_1	0	1	1	0
x_2	0	0	0	1
x_3	0	1	0	1
x_4	0	1	0	0

3.2. Выполнить операции $(r_1\cup r_2)$, $(r_1\cap r_2)$, $(r_1\backslash r_2)$, $(r_1\circ r_2)$.

r_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1	0	1
x_2	1	0	1	0
x_3	0	1	0	1
x_4	1	0	1	0

r_2	x_1	x_2	r_3	r_4
x_1	1	1	1	0
x_2	0	1	0	1
x_3	0	1	1	1
x_4	0	1	0	1

4.1. Выполнить эквивалентные преобразования формул:

a) $(x_1\to x_2)\leftrightarrow(x_1\to x_3)$,

b) $x_1\oplus(x_2\to x_3)$,

c) $(x_1\oplus x_2)\to(x_1\oplus x_3)$.

4.2. Верны ли записи формул:

a) $x_1\oplus x_2(x_3\to x_4\to)\vee x_1)$,

b) $(x_1\cdot x_2\vee\downarrow x_3)\oplus x_2$,

c) $x_1\cdot((x_2\downarrow x_3\mid)\to x_3$.

4.3. Построить таблицы функций, заданных формулами:

a) $F=(x_1\to x_2)\oplus(x_2\to x_3)\oplus(x_3\to x_1)$,

b) $F=x_1\to(\overline{x}\cdot x_3\leftrightarrow(x_2\oplus x_1\cdot x_3))$,

c) $F=(((x_1\mid x_2)\downarrow x_3)\mid x_2)\downarrow x_3$.

4.4. Преобразовать формулы к виду СДНФ и СКНФ:

a) $F=(x_1\vee x_2\cdot\overline{x})\cdot(x_1\vee x_2)$,

b) $F=((x_1\to x_2\cdot x_3)\cdot(x_2\cdot x_4\oplus x_3)\to x_1\cdot x_4)\vee\overline{x}_1)$,

c)$F=(x_1\vee x_2\cdot\overline{x}_3\cdot x_4)\cdot((\overline{x}_2\vee x_4)\to x_1\cdot\overline{x}_3\cdot\overline{x}_4)\vee x_2\cdot x_3\vee(\overline{x}_1\vee\overline{x}_4)$.

4.5. Самодвойственны ли функции:

a) $f(x_1, x_2, x_3)=\neg((x_1\leftrightarrow x_2)\to x_1\cdot x_3)\to(x_2\to x_3)$,

b) $f(x_1, x_2, x_3)=x_1\oplus x_2\oplus x_3\oplus x_1\cdot x_2\oplus x_1\cdot x_3\oplus x_2\cdot x_3\oplus x_1\cdot x_2\cdot x_3$

4.6. Какие функции являются монотонными:

a) $f(x_1, x_2)=(x_1\to(x_1\to x_2))$,

b) $f(x_1, x_2)=(x_1\to(x_2\to x_1))$,

c) $f(x_1, x_2)=x_1\cdot x_2\cdot(x_1\oplus x_2)$.

4.7. Линейны ли функции:

a) $f(x_1, x_2, x_3)=(x_1\cdot x_2\vee\overline{x}_1\cdot\overline{x}_2)\oplus x_3$,

b) $f(x_1, x_2)=x_1\cdot x_2\cdot(x_1\oplus x_2)$,

c) $f(x_1, x_2, x_3)=(x_1\to x_2)\cdot(x_2\to x_1)\leftrightarrow x_3$.

5.1. Приняв множество первых 20 чисел в качестве универсального множества, записать следующие подмножества: A - множество четных чисел, B - множество нечетных чисел, C - множество квадратов чисел, D - множество простых чисел. Выполните операции $(A\cup B)$, $(A\cap B)$, $(A\cap C)$, $(A\cap D)$, $(C\setminus A)$, $(C\setminus D)$.

5.2. Докажите тождества:

a) $(A\setminus(A\setminus B)\equiv(A\cap B)$,

b) $(A\cap B)\cup(C\cap D)\equiv(A\cup C)\cap(B\cup C)\cap(A\cup D)\cap(B\cup D)$,

5.3. Для отображений, заданных таблицами, выполнить операции объединения, пересечения, разности и симметрической разности.

h_1	y	x_1	x_2	x_3
	a	1	c	3
	b	2	b	2
	c	3	a	1
	d	1	c	1

h_2	y	x_1	x_2	x_3
	a	3	c	1
	b	2	b	2
	c	1	a	3
	d	1	c	1

5.4. Выполнить операцию композиции отображений h_1 и h_2.

h_1	y	x_1	x_2	x_3
	2	a	b	c
	4	b	c	a
	6	c	a	b

h_2	z	y
	3	2
	5	6
	7	4

5.5. Для отношений, заданных таблицами, выполнить операции объединения, пересечения, разности и симметрической разности.

r_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	0	1
x_2	0	1	1	0
x_3	0	1	1	0
x_4	1	0	0	1

r_2	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1	0	1
x_2	1	0	1	0
x_3	0	1	0	1
x_4	1	0	1	0

5.6. Выполнить операцию композиции для отношений

r_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	0	1	1
x_2	1	0	1	0
x_3	1	1	0	0
x_4	1	0	1	0

r_2	x_2	x_4	x_6	x_8
x_2	1	0	1	0
x_4	0	1	0	1
x_6	1	0	1	0
x_8	0	1	0	1

5.7. Решить систему тождеств:

$a)\begin{cases}(A\backslash X)=B,\\(X\backslash A)=C, \text{ где } B\subseteq A,\ A\cap C=\varnothing.\end{cases}$

$b)\begin{cases}(A\cap X)=B,\\(A\cup X)=C, \text{ где } B\subseteq A\subseteq \underline{C}.\end{cases}$

$c)\begin{cases}(A\cup X=B\cap X\\A\cap X=C\cup X.\end{cases}$

При каких значениях A, B и C эта система имеет решение?

6.1. Пусть $U=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$, $A'=\{0{,}3/x_1, 0{,}8/x_3, 0{,}4/x_6\}$ и $B'=\{0{,}9/x_1, 0{,}2/x_2, 0{,}4/x_3, 0{,}5/x_5\}$. Найти $(A'\cup B')$, $(A'\cap B')$, $\neg A$, $\neg B$, $(A'\backslash B')$, $(B'\backslash A')$, $(A'\Delta B')$.

6.2. Даны $A'=\{0{,}3/x_1, 0{,}8/x_2\}$ и $B'=\{0{,}7/y_1, 0{,}3/y_2, 0{,}9/y_3)$. Найти $(A'\otimes B')$.

6.3. Даны нечеткое множество $A'=\{0{,}3/x_1, 0{,}2/x_2, 0{,}6/x_3, 0{,}7/x_4\}$ и нечеткое отображение $h'=\{0{,}4/(x_1, y_1), 0{,}3/(x_2, y_1), 0{,}3/(x_3, y_2), 0{,}8/(x_4, y_2)\}$. Найти нечеткое множество B', как образ A' по отображению h'.

6.4. Даны нечеткие отношения r'_1 и r'_2. Определить степени рефлексивности, антирефлексивности, симметричности, антисимметричности и транзитивности. К какому классу нечётких отношений они относятся.

r'_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0,1	1,0	0,2	0,3
x_2	0,5	1,0	0	0
x_3	0,4	0,9	0	1,0
x_4	0	0,8	0,1	1,0

r'_2	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0,9	0	0,8	1,0
x_2	1,0	1,0	1,0	1,0
x_3	0,6	1,0	1,0	0,3
x_4	1,0	0,7	1,0	0

Индивидуальные задания

Расчетно-графическая работа 1

- *доказать* тождество;
- *сопроводить* каждый шаг преобразования комментариямит (законы и правила эквивалентных преобразований).

Вариант	Задание
1	$(\neg A \cap C) \cup (\neg B \cap C) \cup (C \cap D) \cup (A \cap B \cap C \cap \neg D) \equiv C$,
2	$(A \Delta B) \Delta (A \cap B) \equiv (A \cup B)$,
3	$(A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D) \equiv (A \cap B) \cup (C \cap D)$,
4	$(A \backslash B) \backslash C \equiv (A \backslash C) \backslash (B \backslash C)$,
5	$(A \cap B) \cup (C \cap D) \equiv (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$,
6	$(A \cup B) \equiv (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$,
7	$((A \cap B) \cup (A \cap D) \cup (B \cap D) \cup C) \equiv (A \cup (B \cup C)) \cap (B \cup (C \cup D)) \cap (C \cup (D \cup A)))$,
8	$(A \cup B) \backslash C \equiv (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$,
9	$(A \Delta B) \backslash (B \backslash A) \equiv (A \backslash B)$,
10	$(A \cup B) \equiv (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$,
11	$(A \cap B) \backslash (A \cap C) \equiv (A \cap B) \backslash C$,
12	$\neg(\neg A \cup C) \cup (B \backslash C) \equiv (A \cup B) \backslash C$,
13	$(A \Delta B) \Delta (A \cap B) \equiv (A \cup B)$,
14	$(A \cup B \cup C) \cap (B \cup C \cup D) \cap (C \cup D \cup A) \equiv ((A \cap B) \cup (A \cap D) \cup (B \cap D) \vee C)$,
15	$(A \cap B) \Delta (A \Delta B) \equiv (A \cup B)$,
16	$(A \cap B) \cup ((A \cup B) \cap (\neg A \cup \neg B)) \equiv (A \cup B)$,
17	$(\neg(\neg B \cup C) \cup (\neg(A \cup B) \cup C)) \cup \neg(\neg A \cup C) \equiv U$,
18	$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) \equiv ((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A))$,
19	$((A \cap B) \vee (B \cap C) \vee (C \cap A)) \equiv (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$,
20	$(A \Delta B) \cup (A \cap B) \equiv (A \cup B)$,
21	$\neg(\neg A \cup C) \cup (\neg(\neg B \cup C) \cup (\neg(A \cup B) \cup C)) \equiv U$,
22	$(\neg B \cap C) \cup (C \cap D) \cup (\neg A \cap C) \cup (A \cap B \cap C \cap \neg D) \equiv C$,
23	$A \backslash (B \backslash C) \equiv (A \backslash B) \cup (A \cap C)$,
24	$\neg(\neg A \cup B) \cup (\neg(A \cup C) \cup (B \cup C)) \equiv U$,
25	$(A \cap B) \cup (C \cap D) \equiv (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$,
26	$(\neg(B \cup \neg A) \cup (\neg(B \cup A) \cup B)) \equiv U$,
27	$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) \equiv ((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A))$,
28	$(\neg(A \cap C) \cup (B \cap C)) \cup \neg(\neg A \cup B) \equiv U$,
29	$((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)) \equiv (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$

30	(¬(¬B∪C)∪(¬A∪C))∪¬(¬A∪B) ≡ U
31	(A∪(B∪C))∩(B∪(C∪D))∩(C∪(D∪A)) ≡ ((A∩B)∪(A∩D)∪(B∩D)∪C),
32	(¬(A∪C)∪(B∪C)) ∪ ¬(¬A∪B) ≡ U,
33	(A∩B∩C∩¬D)∪(¬A∩C)∪(¬B∩C)∪(C∩D) ≡ C,
34	(A∩B)\(AΔB) ≡ (A∩B),
35	¬(¬A∪B)∪(¬(A∩C)∪(B∩C)) ≡ U,
36	(C∩D)∪(¬B∩C)∪(¬A∩C)∪(A∩B∩C∩¬D) ≡ C,
37	A\(B\C) ≡ (A\B)∪(A∩C),
38	(A∩B)∪(C∩D) ≡ (A∪C)∩(B∪C)∩(¬A→D)∩(B∪D),
39	(¬(¬B∪C)∪(¬(A∪B)∪C))∪¬(¬A∪C) ≡ U,
40	(A∪(B∪C))∩(B∪(C∪D))∩(C∪(D∪A)) ≡ ((A∩B)∪(A∩D)∪(B∩D)∪C),
41	(¬(¬A∪(¬B∪C))∪(¬(¬A∪B)∪(¬A∪C))) ≡ U,
42	((A∩B)∪(B∩C)∪(C∩A)) ≡ (A∪B)∩(B∪C)∩(C∪A)
43	¬(¬(¬A∩¬B)∩¬(A∩B) ≡ (A∩B)∪ (¬A∩¬B),
44	(A∪(B∪C))∩(B∪(C∪D))∩(C∪(D∪A)) ≡ ((A∩B)∪(A∩D)∪(B∩D)∪C),
45	¬(¬A∪B)∪(¬(¬B∪C)∪(¬A∪C)) ≡ U,
46	(A∪B)∩(B∪C)∩(C∪A) ≡ ((A∩B)∪(B∩C)∪(C∩A)),
47	(¬(¬B∪C)∪(¬(A∪B)∪C))∪¬(¬A∪C) ≡ U,
48	(A∪(B∪C))∩(B∪(C∪D))∩(C∪(D∪A)) ≡ ((A∩B)∪(A∩D)∪(B∩D)∪C),
49	(¬(¬B∪C)∪(¬(A∪B)∪C))∪¬(¬A∪C) ≡ U,
50	(AΔB)\(B\A) ≡ (A\B),

Расчетно-графическая работа 2

- *вычислить* область определения множества X;
- *сопроводить* каждый шаг комментариями (законы и правила эквивалентных преобразований);
- *изобразить* искомое и известные множества на диаграмме Венна.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	$\begin{cases} A\cap X=B, \\ A\cup X=C, \text{ где } B\subseteq A\subseteq C. \end{cases}$	26	$\begin{cases} B\cup X=A\cap X, \\ B\cap X=C\cup X, \text{ где } C\subseteq A. \end{cases}$
2	$\begin{cases} A\setminus X=B, \\ X\setminus A=C, \text{ где } B\subseteq A,\ A\cap C=\varnothing. \end{cases}$	27	$\begin{cases} B\cup X=A\cap X, \\ B\cap X=C\cup X, \text{ где } C\subseteq A. \end{cases}$
3	$\begin{cases} A\setminus X=B, \\ A\cup X=C, \text{ где } B\subseteq A\subseteq C. \end{cases}$	28	$\begin{cases} B\setminus X=A, \\ X\setminus B=C, \text{ где } A\subseteq B,\ B\cap C=\varnothing. \end{cases}$
4	$\begin{cases} A\cap X=B\setminus X, \\ C\cup X=X\setminus A. \end{cases}$	29	$\begin{cases} A\setminus X=X\setminus B, \\ C\setminus X=X\setminus A. \end{cases}$
5	$\begin{cases} A\cup X=B\cap X, \\ A\cap X=C\cup X, \text{ где } C\subseteq B. \end{cases}$	30	$\begin{cases} (B\cap X)=\neg(\neg A\cap\neg X), \\ (A\cap X)=\neg(\neg C\cap\neg X), \text{ где } C\subseteq B. \end{cases}$
6	$\begin{cases} A\setminus X=X\setminus B, \\ X\setminus A=C\setminus X. \end{cases}$	31	$\begin{cases} C\setminus X=B, \\ X\setminus C=A, \text{ где } B\subseteq C,\ C\cap A=\varnothing. \end{cases}$
7	$\begin{cases} A\cap X=B\setminus X, \\ C\cup X=X\setminus A. \end{cases}$	32	$\begin{cases} B\cap X=\varnothing \\ A\cap(\neg X)=\varnothing, \text{ где } A\subseteq\neg B. \end{cases}$
8	$\begin{cases} B\cap X=A\cup X, \\ C\cup X=A\cap X, \text{ где } C\subseteq B. \end{cases}$	33	$\begin{cases} B\setminus X=X\setminus A, \\ X\setminus B=C\setminus X. \end{cases}$
9	$\begin{cases} X\setminus B=A\setminus X, \\ X\setminus A=C\setminus X. \end{cases}$	34	$\begin{cases} A\cap X=B\cup X, \\ C\cup X=B\cap X, \text{ где } C\subseteq A. \end{cases}$
10	$\begin{cases} B\setminus X=A\cap X, \\ X\setminus A=C\cup X. \end{cases}$	35	$\begin{cases} A\cap\neg X=X\setminus B, \\ C\setminus X=X\cap\neg A. \end{cases}$
11	$\begin{cases} B\setminus X=X\setminus A, \\ X\setminus B=C\setminus X. \end{cases}$	36	$\begin{cases} (\neg B\cap\neg X)=(A\cap X), \\ (B\cap X)=\neg(\neg C\cap\neg X), \text{ где } C\subseteq A. \end{cases}$
12	$\begin{cases} X\setminus A=B\cap\neg X, \\ X\cap\neg B=C\setminus X. \end{cases}$	37	$\begin{cases} A\cap\neg X=B, \\ X\cap\neg A=C, \text{ где } B\subseteq A,\ A\cap C=\varnothing. \end{cases}$
13	$\begin{cases} B\cap X=A, \\ B\cup X=C, \text{ где } A\subseteq B\subseteq C. \end{cases}$	38	$\begin{cases} A\cap C=C\cup X, \\ (C\setminus B)\cap X=X, \text{ где } C\subseteq A. \end{cases}$
14	$\begin{cases} B\cap\neg X=X\setminus A, \\ C\setminus X=X\cap\neg B. \end{cases}$	39	$\begin{cases} B\cup X=A\cap X, \\ B\cap X=C\cup X, \text{ где } C\subseteq A. \end{cases}$
15	$\begin{cases} \neg(\neg A\cap\neg X)=(B\cap X), \\ (A\cap X)=\neg(\neg C\cap\neg X), \text{ где } C\subseteq B. \end{cases}$	40	$\begin{cases} A\cap X=B, \\ A\cup X=C, \text{ где } B\subseteq A\subseteq C. \end{cases}$

16	$\begin{cases} X\cap\neg B = A\cap\neg X, \\ X\cap\neg A = C\cap\neg X. \end{cases}$	41	$\begin{cases} A\setminus X = X\setminus B, \\ X\setminus A = C\setminus X. \end{cases}$
17	$\begin{cases} X\cap A = B\cap\neg X, \\ X\cup C = X\cap\neg A. \end{cases}$	42	$\begin{cases} B\cap\neg X = A, \\ X\cap\neg B = C, \text{ где } A\subseteq B,\ B\cap C=\varnothing. \end{cases}$
18	$\begin{cases} A\cap\neg X = X\cap\neg B, \\ X\cap\neg A = C\cap\neg X. \end{cases}$	43	$\begin{cases} A\cap X = B\cap\neg X, \\ C\cup X = X\cap\neg A. \end{cases}$
19	$\begin{cases} A\cap X = B\cap\neg X, \\ C\cup X = X\cap\neg A. \end{cases}$	44	$\begin{cases} B\setminus X = A\cap X, \\ X\setminus A = C\cup X. \end{cases}$
20	$\begin{cases} X\cap\neg B = A\cap\neg X, \\ X\cap\neg A = C\cap\neg X. \end{cases}$	45	$\begin{cases} C\cap\neg X = X\cap\neg B, \\ X\cap\neg C = A\cap\neg X. \end{cases}$
21	$\begin{cases} B\cap\neg X = A\cap X, \\ X\cap\neg A = C\cup X. \end{cases}$	46	$\begin{cases} A\cap C = C\cup X, \\ (C\setminus B)\cap X = X, \text{ где } C\subseteq A. \end{cases}$
22	$\begin{cases} A\cap\neg X = B, \\ X\cap\neg A = C, \text{ где } B\subseteq A,\ A\cap C=\varnothing. \end{cases}$	47	$\begin{cases} B\setminus X = C, \\ X\setminus B = A, \text{ где } C\subseteq B,\ B\cap C=\varnothing. \end{cases}$
23	$\begin{cases} X\cap A = B\cap\neg X, \\ X\cup C = X\cap\neg A. \end{cases}$	48	$\begin{cases} B\cap X = B\setminus A, \\ B\setminus X = A, \text{ где } A\subseteq B. \end{cases}$
24	$\begin{cases} A\cap X = A\setminus B, \\ A\setminus X = B, \text{ где } B\subseteq A. \end{cases}$	49	$\begin{cases} X\cap\neg A = B\cap\neg X, \\ X\cap\neg B = C\cap\neg X. \end{cases}$
25	$\begin{cases} A\cap B = B\cup X, \\ (B\setminus C)\cap X = X, \text{ где } B\subseteq A. \end{cases}$	50	$\begin{cases} C\cap X = B\cap\neg X, \\ A\cup X = X\cap\neg C. \end{cases}$

Расчетно-графическая работа 3

По данным варианта согласно таблицы:

- *составить* СДНФ и СКНФ булевой функции,
- *вычислить* минимальные булевы функции $f_{\text{днф}}^{\min}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ и $f_{\text{кнф}}^{\min}(x_1, x_2, x_3, x_4)$,
- *сопровождать* каждый шаг преобразования формул булевой функции комментариями (правила и законы эквивалентных преобразований)

Таблица

Аргумент булевой функции				Старший разряд номера варианта						Младший разряд номера варианта									
				0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_1	x_2	x_3	x_4	Значение булевой функции															
0	0	0	0	0	1	0	0	0	1										
0	0	0	1	1	0	1	0	1	0										
0	0	1	0	0	1	0	1	0	1										
0	0	1	1	1	0	1	0	0	0										
0	1	0	0	0	0	0	1	0	1										
0	1	0	1	1	0	0	1	1	0										
0	1	1	0	0	1	1	0	1	0										
0	1	1	1							1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0							0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	1							1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0							0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	1							1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	0							0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1							1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	1	0							0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1							1	0	0	0	0	0	1	0	1	0

Расчетно-графическая работа 4.

По данным табл. 1 и 2 *удалить* $\{x_i\}$ согласно варианту (см. табл. 3), и *сформировать* из оставшихся строк и столбцов отношения индивидуального задания (r_1 и r_2); индексы x_i не изменять (!):

- *выполнить* операции ($r_1 \cup r_2$), ($r_1 \cap r_2$), ($r_1 \setminus r_2$), ($r_1 \circ r_2$),
- *написать* для каждой операции алгебраические формулы,
- *составить* таблицы отношений – результатов,
- *вычислить* свойства отношений r_1 и r_2 и *определить* класс (нечеткой эквиваленции, нечёткого нестрогого или нечёткого строгого порядков).

Таблица 1

r_1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0,8	0,6	0,4	0,5	0,7	0,7	0,6	0,6
x_2	0,7	0,6	0,6	0,7	0,5	0,8	0,6	0,7
x_3	0,4	0,7	0,5	0,8	0,3	0,7	0,6	0,8
x_4	0,6	0,5	0,7	0,6	0,5	0,3	0,6	0,8
x_5	0,7	0,5	0,3	0,7	0,8	0,6	0,7	0,7
x_6	0,8	0,7	0,6	0,5	0,5	0,8	0,6	0,7
x_7	0,8	0,8	0,7	0,5	0,8	0,6	0,7	0,5
x_8	0,5	0,8	072	0,7	0,8	0,6	0,4	0,6

Таблица 2

r_2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0,6	0,7	0,7	0,7	0,8	0,6	0,7	0,8
x_2	0,8	0,6	0,7	0,2	0,5	0,8	0,6	0,7
x_3	0,8	0,6	0,8	0,7	0,5	0,8	0,6	0,4
x_4	0,6	0,2	0,6	0,8	0,2	0,7	0,4	0,2
x_5	0,8	0,6	0,7	0,2	0,5	0,8	0,6	0,7
x_6	0,5	0,8	0,6	0,7	0,8	0,6	0,4	0,5
x_7	0,6	0,7	0,6	0,4	0,7	0,5	0,7	0,8
x_8	0,8	0,6	0,4	0,2	0,6	0,4	0,7	0,7

Таблица 3

Вариант	Удалить $\{x_i\}$	Вариант	Удалить $\{x_i\}$
1	для r_1: x_1, x_2, x_4, x_5, для r_2: x_1, x_3, x_4, x_6.	28	для r_1: x_2, x_4, x_5, x_6, для r_2: x_2, x_3, x_4, x_7.
2	для r_1: x_1, x_2, x_5, x_6, для r_2: x_1, x_3, x_6, x_8.	29	для r_1: x_3, x_4, x_5, x_7, для r_2: x_2, x_3, x_5, x_6.
3	для r_1: x_1, x_2, x_6, x_7, для r_2: x_1, x_3, x_5, x_7.	30	для r_1: x_3, x_4, x_5, x_8, для r_2: x_2, x_3, x_5, x_7.
4	для r_1: x_1, x_2, x_7, x_8, для r_2: x_1, x_3, x_4, x_8.	31	для r_1: x_3, x_4, x_6, x_7, для r_2: x_2, x_3, x_6, x_8.
5	для r_1: x_1, x_3, x_5, x_6, для r_2: x_1, x_2, x_4, x_5.	32	для r_1: x_3, x_4, x_6, x_8, для r_2: x_2, x_3, x_6, x_7.
6	для r_1: x_1, x_3, x_6, x_7, для r_2: x_1, x_2, x_5, x_6.	33	для r_1: x_3, x_4, x_7, x_8, для r_2: x_2, x_3, x_5, x_8.

7	для r_1: x_1, x_3, x_7, x_8, для r_2: x_1, x_2, x_6, x_8.	34	для r_1: x_3, x_5, x_6, x_7, для r_2: x_2, x_4, x_5, x_6.
8	для r_1: x_1, x_3, x_4, x_6, для r_2: x_1, x_2, x_4, x_8.	35	для r_1: x_3, x_5, x_6, x_8, для r_2: x_2, x_4, x_6, x_8.
9	для r_1: x_1, x_4, x_5, x_6, для r_2: x_1, x_5, x_7, x_8.	36	для r_1: x_3, x_5, x_7, x_8, для r_2: x_2, x_4, x_5, x_8.
10	для r_1: x_1, x_4, x_5, x_7, для r_2: x_1, x_5, x_6, x_8.	37	для r_1: x_3, x_6, x_7, x_8, для r_2: x_2, x_4, x_6, x_7.
11	для r_1: x_1, x_4, x_5, x_8, для r_2: x_1, x_5, x_6, x_7.	38	для r_1: x_4, x_5, x_6, x_7, для r_2: x_3, x_4, x_5, x_8.
12	для r_1: x_1, x_4, x_6, x_7, для r_2: x_1, x_5, x_6, x_8.	39	для r_1: x_4, x_5, x_6, x_8, для r_2: x_3, x_4, x_5, x_7.
13	для r_1: x_1, x_4, x_5, x_8, для r_2: x_1, x_5, x_6, x_7.	40	для r_1: x_4, x_5, x_7, x_8, для r_2: x_3, x_4, x_5, x_6.
14	для r_1: x_1, x_4, x_6, x_8, для r_2: x_1, x_5, x_6, x_7.	41	для r_1: x_4, x_6, x_7, x_8, для r_2: x_3, x_4, x_5, x_7.
15	для r_1: x_1, x_5, x_6, x_7, для r_2: x_1, x_3, x_5, x_8.	42	для r_1: x_4, x_5, x_6, x_7, для r_2: x_3, x_4, x_5, x_8.
16	для r_1: x_1, x_5, x_6, x_8, для r_2: x_1, x_2, x_3, x_5.	43	для r_1: x_1, x_2, x_4, x_6, для r_2: x_1, x_3, x_4, x_7.
17	для r_1: x_1, x_5, x_7, x_8, для r_2: x_1, x_2, x_3, x_7.	44	для r_1: x_1, x_2, x_4, x_8, для r_2: x_1, x_3, x_4, x_6.
18	для r_1: x_1, x_6, x_7, x_8, для r_2: x_1, x_4, x_5, x_6.	45	для r_1: x_1, x_2, x_5, x_7, для r_2: x_1, x_3, x_5, x_8.
19	для r_1: x_2, x_3, x_4, x_5, для r_2: x_1, x_2, x_3, x_6.	46	для r_1: x_1, x_2, x_5, x_7, для r_2: x_1, x_3, x_4, x_5.
20	для r_1: x_2, x_3, x_5, x_6, для r_2: x_1, x_2, x_4, x_5.	47	для r_1: x_1, x_2, x_5, x_8, для r_2: x_1, x_3, x_5, x_7.
21	для r_1: x_2, x_3, x_6, x_7, для r_2: x_1, x_2, x_5, x_6.	48	для r_1: x_1, x_3, x_4, x_8, для r_2: x_1, x_2, x_4, x_7.
22	для r_1: x_2, x_3, x_4, x_8, для r_2: x_1, x_2, x_4, x_6.	49	для r_1: x_2, x_4, x_6, x_8, для r_2: x_1, x_2, x_4, x_7.
23	для r_1: x_2, x_3, x_5, x_7, для r_2: x_1, x_2, x_5, x_6.	50	для r_1: x_2, x_3, x_4, x_6, для r_2: x_3, x_4, x_7, x_8.
24	для r_1: x_2, x_3, x_5, x_8, для r_2: x_1, x_2, x_6, x_8.	51	для r_1: x_2, x_4, x_6, x_7, для r_2: x_3, x_4, x_6, x_8.
25	для r_1: x_2, x_3, x_4, x_6, для r_2: x_1, x_2, x_4, x_8.	52	для r_1: x_2, x_3, x_4, x_8, для r_2: x_3, x_5, x_7, x_8.
26	для r_1: x_2, x_3, x_4, x_5, для r_2: x_1, x_2, x_3, x_6.	53	для r_1: x_3, x_4, x_5, x_6, для r_2: x_3, x_5, x_7, x_8.
27	для r_1: x_3, x_4, x_5, x_6, для r_2: x_2, x_3, x_4, x_7.	54	для r_1: x_2, x_3, x_6, x_8, для r_2: x_3, x_5, x_6, x_7.

Литература

1) Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика: Учеб. для вузов Под ред. В.С. Зарубина. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2001г.

2) Биркгоф Г., Барти Т. Современная прикладная алгебра. /Пер. с англ. Ю.И. Манин/. – М.: Мир, 1976г.

3) Богомолов А.М., Салий В.Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. – М.: Наука, 1997г.

4) Горбатов В. А. Фундаментальные основы дискретной математики. Информационная математика. – М.: Наука. Физматлит, 2002г.

5) Кон П. Универсальная алгебра. – М.; Мир,1968г.

6) Кузнецов О.М., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика. – М.: Энергоатомиздат, 1988г.

7) Кук В., Бейз Г. Компьютерная математика. – М.: Наука, 1990г.

8) Куратовский К, Мостовский А. Теория множеств. – М.: Мир, 1970г.

9) Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математическоой логике и теории алгоритмов. – М.: Наука, 1975,

10) Математическая энциклопедия. Ред.коллегия: И.М. Виноградов (гл. ред.) [и др.]. – М.: «Советская энциклопедия», 1977г.

11) Нечёткие множества и теория возможностей.Последние достижения.Под ред. Р.Р. Ягера. Пер. с англ. В.Б.Кузьмина. – Москва: «Радио и связь», 1986г.

12) Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – СПб.: Питер, 2000г.

13) Пономарев В.Ф. Дискретная математика для информатиков–экономистов. Учебное пособие. – Калининград, Изд-во КГТУ, 2002г.

14) Редькин Н.П. Дискретная математика. – СПб.: Изд-во «Лань», 2003г.

15) Романовский И.В. Дискретный анализ. – СПб.: Невский диалект, 1999г.

Оглавление