УДК 664.047

К СОЗДАНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА КОЭКСТРУДИРОВАНИЯ ПИЩЕВЫХ МАСС

Ю.А. Фатыхов*, В.А. Шуманов*, В.А. Зарудный**

*ФГОУ ВПО «Калининградский государственный технический университет»,
Россия, 236022, г. Калининград, Советский пр-кт, 1;
E-mail: elina@klgtu.ru
**Правительство Калининградской области, Россия, 236022, г. Калининград,
ул. Дм. Донского, 1

Рассмотрен процесс коэкструдирования пищевых масс. Получены уравнения движения в кольцевой и цилиндрической трубах двух соприкасающихся вязкопластичных жидкостей. Определены постоянные коэффициенты уравнений, зависящие от параметров процесса и конструктивных размеров коэкструзионной насадки.

коэкструзия, пищевые массы, вязкость, модель, уравнения движения

Одним из прогрессивных методов пищевых технологий, обеспечивающих интенсификацию и углубленную обработку сырья, возможность создания принципиально новых, сбалансированных по составу готовых продуктов, является экструзионная обработка. Под экструзией (extrude, лат. – выталкивание, выдавливание) понимается процесс термомеханической обработки пищевого сырья путем выдавливания через формующее отверстие рабочего органа с целью получения изделий заданной формы, структуры и физико-химических свойств [1]. Разновидностью процесса экструзии пищевых масс является коэкструзия, т.е. совместная экструзия основного продукта и начинки (оболочки), осуществляемая в одном техническом устройстве.

Уровень конструктивного исполнения современных экструдеров позволяет в пределах единого технологического процесса совмещать ряд операций, которые при применении традиционных технологий могут быть выполнены только однооперационными машинами. Например, в одном экструдере может осуществляться загрузка основного сырья и дозированное внесение добавок, их перемешивание, пластификация и гомогенизация, текстурирование продукта и его формование в виде изделий определенной массы и формы, охлаждение готовой продукции и т.д. [1].

Несмотря на то, что ведущие зарубежные фирмы достигли высокого уровня конструктивного совершенствования и производства пищевой экструзионной техники, научное обеспечение процесса экструзии является недостаточным. Изучаемый процесс является одним из самых сложных процессов пищевой технологии, так как в нем рассматривается течение вязкопластичных неоднородных компонентов пищевых продуктов в криволинейных каналах рабочего пространства, сопровождающееся биохимическими, физическими и структурными изменениями состояния реологической системы. Разработанные математические модели процесса экструзии пищевых систем базируются на многочисленных допущениях, лишь приблизительно качественно и количественно описывают процесс и трудно применимы к реальным технологическим условиям [2].

В работе [3] проанализирован процесс производства коэкструзионной продукции из мяса птицы, осуществляемый на Калининградском комбинате «Продукты питания». В качестве оболочки готового продукта используют фарш из филе грудки цыпленка, в качестве начинки – картофельное пюре, сыр, сливочное масло и т.п. Полуфабрикат формуется с помощью машинной системы Vemag 893, включающей два вакуумных шприца типа Robbi, в виде тела вращения (шара, цилиндра, конуса и т.д.) заданной формы и массы. Возможность этой системы позволяют получить любые соотношения между оболочкой и начинкой, что используется при создании рецептуры продукта с различным соотношением ингредиентов, сбалансированных по макро- и микропитательным веществам. Причем основной компонент готового продукта может быть как оболочкой, так и начинкой.

В первом приближении рассмотрим процесс коэкструдирования пищевых масс как выдавливание двух вязкопластичных жидкостей двумя отдельными нагнетающими шприцами.

Уравнения движения вязкой жидкости имеют довольно сложный вид, поэтому их полное интегрирование удается произвести в сравнительно небольшом количестве случаев. Выражения для случая несжимаемой вязкой жидкости, уравнения Навье-Стокса, в декартовых координатах можно представить следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta v_x,\\
&\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\Delta v_y,\\
&\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\Delta v_z,\\
&\qquad\qquad\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где v_x, v_y, v_z - проекции скоростей; p – давление; ρ – плотность; ν – кинематическая вязкость; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа; *X, Y, Z* – проекции массовой силы.

В цилиндрических координатах r, θ, z уравнения движения и несжимаемости (1) имеют вид:

$$\begin{aligned}
&x = r\cos\theta, &&r = \sqrt{x^2 + y^2};\\
&y = r\sin\theta, &&\theta = arctg\frac{y}{x};\\
&z = z, &&z = z;
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}-\frac{v_\theta^2}{r}=F_R-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\\
&+\nu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}-\frac{v_r}{r^2}\right),\\
&\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+\frac{v_r\cdot v_\theta}{r}=F_\theta-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\\
&+\nu\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta}{r^2}\right),\\
&\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\\
&+\nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial z}\right),\\
&\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{v_r}{r}=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Рассмотрим задачу о ламинарном течении высоковязкой несжимаемой жидкости в трубе. В основу положим уравнения (2).

Сформулируем основные допущения. Имеем цилиндрическую трубу радиусом R. Ось этой трубы примем за ось Oz цилиндрической системы координат. Пусть жидкость течет вдоль этой трубы, причем внешние силы отсутствуют. Допустим, что течение стационарно и скорость в каждой точке направлена вдоль оси трубы, тогда [4]

$$v_r=v_\theta=0, \qquad v_z=v(r,\theta,z).$$

При этих допущениях уравнения (2) примут простой вид:

$$\frac{\partial p}{\partial r}=0, \frac{\partial p}{\partial \theta}=0, \frac{\partial p}{\partial z}=\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right), \frac{\partial v}{\partial z}=0, \qquad (3)$$

где μ - динамическая вязкость.

Из уравнений (3) видно, что *P* может зависеть только от *z;* последнее же уравнение показывает, что v есть функция только от *r* и θ. Но так как правая часть третьего уравнения (3) не зависит от *z*, то и левая часть не может зависеть от *z*, следовательно, $\frac{\partial p}{\partial z}$ есть постоянная величина:

$$\frac{\partial p}{\partial z}=const.$$

Итак, функция $v(r,\theta)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z} \qquad (4)$$

и граничному условию на стенке

$v=0$ при $r=R$. (5)

Легко находится решение уравнения (4), зависящее только от r и удовлетворяющее условию (5).

Если $v = v(r)$, то (4) может быть записано так:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}r;$$

интегрируя, получаем:

$$r\frac{dv}{dr} = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial z}r^2 + A;$$

деля на *r* и еще раз интегрируя по *r*, рассчитываем:

$$v = \frac{1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial z}r^2 + A\ln r + B. \quad (6)$$

Произвольные постоянные A и B нужно определить из граничного условия (5) и добавочного условия, что скорость v остается ограниченной во всей рассматриваемой области. Но если $A \neq 0$, то, как показывает формула (6), скорость v становится бесконечной при $r = 0$, т.е. на оси трубы; поэтому надо непременно положить

$$A = 0.$$

Мы усложним задачу: рассмотрим движение в трубе двухслойной жидкости, одна из которых находится в центре трубы ($\mu_1 \neq \mu_2$). Схема течения изображена на рисунке. Центральный слой отметим цифрой 1, а второй, примыкающий к стенкам трубы, – цифрой 2. Течение осуществляется градиентами давлений $\frac{\partial p_1}{\partial z}$ и $\frac{\partial p_2}{\partial z}$.

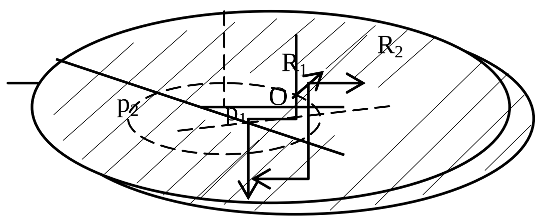

Рис.
Fig.

$$\frac{\partial p_1}{\partial z} = \frac{p_1 - p_0}{l} \text{ и } \frac{\partial p_2}{\partial z} = \frac{p_2 - p_0}{l},$$

где p_0 – атмосферное давление.

Распределение скоростей по течению трубы определим, решая уравнение (4) для каждого слоя отдельно, применяя граничные условия [4]:

$$v = \begin{cases} v_1(r), \text{при } 0 \le r \le R_1, \\ v_2(r), \text{при } R_1 \le r \le R_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1(R_1) = v_2(R_2), \\ v_2(R_2) = 0, \\ \mu_1 \left.\frac{dv_1}{dr}\right|_{R_1} = \mu_2 \left.\frac{dv_2}{dr}\right|_{R_1}, \end{cases} \tag{7}$$

где R_1 - радиус центрального слоя; R_2 - радиус трубы.

Первое граничное условие в (7) – это равенство скоростей на границе между потоками; второе – условие прилипания к стенке трубы второго слоя; третье – равенство напряжений на границе раздела потоков.

Решение уравнения (4) примет вид:

$$\begin{cases} v_1 = \frac{1}{4\mu_1}\frac{\partial p_1}{\partial z} r^2 + A \ln r + B, \\ v_2 = \frac{1}{4\mu_2}\frac{\partial p_2}{\partial z} r^2 + C \ln r + D. \end{cases} \tag{8}$$

Постоянные A, B, C, D найдем, применяя граничные условия (7): A – из условия конечности скорости на оси трубы, C – из третьего условия, D – из второго, B – из первого.

$$\begin{cases} A = 0, \\ B = -\frac{1}{4\mu_1}\frac{\partial p_1}{\partial z}R_1^2 + \frac{1}{4\mu_2}\frac{\partial p_2}{\partial z}R_1^2 + \frac{R_1^2}{2}\left(\frac{\partial p_1}{\partial z} - \frac{\partial p_2}{\partial z}\right)\ln R_1 - \\ \quad - \frac{1}{4\mu_2}\frac{\partial p_2}{\partial z}R_2^2 - \frac{R_1^2}{2}\left(\frac{\partial p_1}{\partial z} - \frac{\partial p_2}{\partial z}\right)\ln R_2, \\ C = \frac{R_1^2}{2}\left(\frac{\partial p_1}{\partial z} - \frac{\partial p_2}{\partial z}\right), \\ D = -\left[\frac{1}{4\mu_2}\frac{\partial p_2}{\partial z}R_2^2 + \frac{R_1^2}{2}\left(\frac{\partial p_1}{\partial z} - \frac{\partial p_2}{\partial z}\right)\ln R_2\right]. \end{cases} \tag{9}$$

Объем жидкости (фарша), протекающий в единицу времени через поперечное сечение трубы, определяется, очевидно, по формуле

$$Q = \int_0^{R_1} 2\pi r v_1 dr + \int_0^{R_2} 2\pi r v_2 dr. \tag{10}$$

Среднюю скорость течения можно найти по выражению

$$\bar{v} = \frac{Q}{\pi R_2^2}. \quad (11)$$

Коэффициенты A, B, C, D, обозначенные в уравнениях (9), находят исходя из известных параметров процесса и конструктивных размеров коэкструзионной насадки.

ВЫВОДЫ

1. Процесс коэкструдирования пищевых масс является прогрессивным методом для создания продуктов, сбалансированных по макро- и микропитательным веществам.
2. Получены уравнения, описывающие движение в цилиндрической трубе двух соприкасающихся вязкопластичных жидкостей.
3. Определены выражения для постоянных коэффициентов уравнений движения, зависящих от параметров процесса и конструктивных размеров коэкструзионной насадки.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Фатыхов, Ю.А. Экструзионные технологии пищевых производств / Ю.А. Фатыхов, Л. Канопка. – Вильнюс: Техника, 2007. – 88 с.
2. Остриков, А.Н. Экструзия в пищевой технологии / А.Н. Остриков, О.В. Абрамов, А.С. Рудометкин. – СПб.: ГИОРД, 2004. – 288 с.
3. Совершенствование процесса коэкструзии куриной продукции / Ю.А. Фатыхов [и др.] // Известия КГТУ. – 2005. - № 7. – С. 86-90.
4. Кочин, Н.Е. Теоретическая гидромеханика: в 2 ч./ Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В.Розе. – М.: Физматгиз, 1963. – Ч. 2. – 786 с.

DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL MODEL FOR CO-EXTRUSION OF FOOD MASSES PROCESS

J.A. Fatykhov, V.A. Shumanov, V.A. Zarudny

The process of co-extrusion of food masses has been discussed. The equations of movement of two viscous fluids touching each other cylindrical tube have been determined. Constant coefficients of equations depending on the process parameters and constructive size of co-extrusion checker work have been determined.

co-extrusion, food masses, viscousity, model, movement equation