УДК 624.04:534.1

РАЗНОСТНАЯ ФОРМА УЧЕТА ДИССИПАТИВНЫХ ПОТЕРЬ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ УПРУГИХ СИСТЕМ

Б.А. Альтшуль

ФГБОУ ВПО «Калининградский государственный технический университет»,
236022, Россия, г. Калининград, Советский проспект, 1

Изложена разностная форма учета внутреннего трения при колебаниях упругих систем, обобщающая гистерезисные и наследственные гипотезы. Показано ее применение к описанию свободных и вынужденных колебаний диссипативных механических систем.

колебания, упругие системы, внутреннее трение, разностная форма

Как известно, одним из важнейших факторов, которые необходимо учитывать при динамических расчетах современных машин, аппаратов, строительных конструкций и других объектов, является рассеяние энергии внутри самой колебательной системы, так называемое внутреннее трение.

В связи с этим на протяжении многих десятилетий различными авторами предлагались ряд аналитических зависимостей, позволяющих более или менее удовлетворительно учитывать внутреннее трение при расчете колебаний механических систем [1 - 3]. Указанные зависимости опираются на то или иное представление формы петли гистерезиса, дающее связь между напряжением и деформацией в процессе гармонического деформирования.

Однако сложность получения достоверного описания формы петли приводит к в значительной мере гипотетическим зависимостям, начиная от достаточно простых, типа

$$\sigma = E\varepsilon \pm \beta\varepsilon_0,$$

и до более сложных, типа

$$\sigma = E\varepsilon \pm \frac{\nu}{n}\left[2^{n-1} - \left(1 \pm \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^n\right]\varepsilon_0^n, \qquad (1)$$

где σ - величина напряжения, ε - величина деформации, ε_0 – ее амплитуда, E - модуль упругости, ν, n, β - постоянные материала, характеризующие внутреннее трение.

Следует отметить, что использование гистерезисных гипотез для изучения колебаний с изменяющейся амплитудой и частотой приводит к неоднозначной зависимости между напряжением и деформацией [4].

Действительно, пусть деформирование происходит по закону

$$\varepsilon_1(t) = \varepsilon_{10}(t)\cos\varphi_1(t), \qquad (2)$$

где $\varepsilon_{10}(t)$ - медленно изменяющаяся функция времени, а $\varphi_1(t) = \omega t,$ где $\omega = const.$

Рассмотрим наряду с равенством (1) другой случай изменения деформации

$$\varepsilon_2(t) = \varepsilon_{20}(t)\cos\varphi_2(t), \tag{3}$$

где $$\varepsilon_{20}(t) = \varepsilon_{10}(t)\frac{\cos\varphi_1(t)}{\cos\varphi_2(t)} . \tag{4}$$

Функциональную зависимость $\varphi_2(t)$ можно подобрать так, чтобы в равенстве (4) отношение косинусов мало отличалось от единицы и в то же время определяемая равенством (4) амплитуда $\varepsilon_{20}(t)$ была непрерывной медленно изменяющейся функцией. Для этого можно взять, например, $\varphi_2(t) = \omega t + \alpha\cos^2\omega t$, где α >0 – достаточно малая постоянная величина.

Из равенств (2 – 4) видно, что $\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t)$, т.е. равенства (2) и (3) являются по-разному начертанными выражениями одного и того же процесса квазигармонического деформирования.

Однако если воспользоваться любой гистерезисной гипотезой, то напряжение $\delta(t)$ получается различным, в зависимости от вида выражения деформации (2) или (3).

Например, если связь напряжения с деформацией выражается согласно гипотезе (1), то для совпадения величин напряжений, вызванных этими деформациями, необходимо выполнение равенства

$$\left[2^{n-1} - (1\pm\cos\varphi_1)^n\right]\varepsilon_{10}^n = \left[2^{n-1} - (1\pm\cos\varphi_2)^n\right]\varepsilon_{20}^n$$

или с учетом равенства (4)

$$\left(\frac{\cos\varphi_2}{\cos\varphi_1}\right)^n = \frac{2^{n-1} - (1\pm\cos\varphi_2)^n}{2^{n-1} - (1\pm\cos\varphi_1)^n}. \tag{5}$$

Легко видеть, что для любых значений n равенство (5) возможно лишь при $\varphi_1 = \varphi_2$, т.е. для строго гармонического процесса. Если же $\varphi_1 \neq \varphi_2$, то равенство (5), вообще говоря, невозможно, т. е. $\sigma_1(t) \neq \sigma_2(t)$, несмотря на то, что $\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t)$.

Однако результаты многочисленных экспериментов привели к мысли о возможности представления силы внутреннего трения, не опираясь на уравнения петли гистерезиса, а представления его в виде некоторой функции упругой силы, отстающей от упругой силы во времени на некоторую величину.

Это позволило при решении задач прикладной теории колебаний сформулировать следующую гипотезу [4]: при квазигармоническом процессе одноосного деформирования вида

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0(t)\cos\varphi(t), \tag{6}$$

где амплитуда $\varepsilon_0(t)$ и частота $\dfrac{d\varphi(t)}{dt}$ являются медленно изменяющимися функциями времени t, неупругая составляющая напряжения $\sigma_н$ выражается соотношением

$$\sigma_{\text{н}}(t) = kE\varepsilon(t-\tau). \tag{7}$$

Иными словами, сила внутреннего трения отстает от упругой силы по времени на некоторую величину τ, а ее амплитуда получается умножением амплитуды упругой силы на коэффициент демпфирования k.

Предложенную форму учета внутреннего трения, получившую название разностной формы, можно рассматривать как обобщение известных гистерезисных гипотез. Соответствующие выражения для коэффициентов демпфирования и времени запаздывания предложены в [5].

Зависимость (7) устраняет, в частности, неоднозначную связь между напряжением и деформацией при квазигармоническом колебательном процессе. Действительно, согласно принятой гипотезе

$$\sigma_{2н}(t) = kE\varepsilon_{20}(t-\tau)\cos\varphi_2(t-\tau) = kE\varepsilon_{10}(t-\tau)\frac{\cos\varphi_1(t-\tau)}{\cos\varphi_2(t-\tau)}\cos\varphi_2(t-\tau) =$$
$$= kE\varepsilon_{10}(t-\tau)\cos\varphi_1(t-\tau) = \sigma_{1н}$$

При определенных, подтвержденных практикой, предположениях относительно упруго-пластических свойств материала для квазигармонического процесса деформирования величины k и τ выражаются равенствами

$$k(\gamma) = \frac{\gamma\varepsilon_0(t)}{\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{4}\varepsilon_0(t-\tau)}} \quad ,$$
$$\tau(\gamma) = \frac{1}{\frac{d\varphi}{dt}}arctq\frac{2}{\gamma}, \tag{8}$$

в которых γ - коэффициент внутреннего трения, зависящий, вообще говоря, от амплитуды и частоты колебаний, уровня постоянного напряжения в материале, числа циклов напряжения, температуры и других факторов. Как видим из равенств (8), при малых γ запаздывание τ близко к четверти периода колебаний, а сдвиг фаз между упругой и диссипативной силами приближается к $\frac{\pi}{2}$.

Известно, что энергетические потери при упругих колебаниях механических систем описываются и с помощью так называемых наследственных гипотез.

Аналитически эти потери выражаются в виде определенного интеграла с подынтегральной функцией (ядром наследственности) определенной структуры.

Покажем, что с помощью предложенной разностной формы учета внутреннего трения можно исследовать колебания механических систем, в которых рассеяние энергии носит как гистерезисный, так и наследственный характер [6].

Для этого рассмотрим механическую систему, в которой связь между напряжением $\sigma(t)$ и деформацией $\varepsilon(t)$ выражается равенством

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) - kE\varepsilon(t-\tau) - \int_{-\infty}^{t} R(t-t^*)\varepsilon(t^*)dt^*, \tag{9}$$

в котором закон наследственности взят в форме Больцмана-Вольтерра, а гистерезисное внутреннее трение учтено с помощью разностной формы (7).

Предположим, что система совершает гармонические колебания, т.е. в равенстве (9) $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos\omega t.$ Тогда, сделав в интеграле равенства (9) замену $t - t^* = \theta$, запишем это равенство в виде

$$\sigma(t) = E\varepsilon_0 \left[\cos\omega t - k\cos\omega(t-\tau) - \int_0^\infty R(\theta)\cos\omega(t-\theta)d\theta \right]. \qquad (10)$$

Разложив в интеграле равенства (10) $\cos\omega\,(t-\theta)$ в сумму произведений косинусов и синусов и вычислив затем по частям оба полученных интеграла, после несложных алгебраических преобразований запишем равенство (10) в виде

$$\sigma(t) = E\varepsilon_0[\cos\omega t - K^* cos\omega(t-\tau^*)], \qquad (11)$$

где $$К^* = \sqrt{(F_c + \kappa\cos\omega\tau)^2 + (F_s + \kappa\sin\omega\tau)^2},$$

$$\tau^* = \frac{1}{\omega} arctq \frac{F_s + \kappa\sin\omega\tau}{F_c + \kappa cos\omega\tau},$$

$$F_c = \int_0^\infty R(\theta)\cos\omega\theta d\theta, \qquad F_s = \int_0^\infty R(\theta)\sin\omega\theta d\theta.$$

Таким образом, связь между напряжением и деформацией при учете как гистерезисного, так и наследственного внутреннего трения приведена к виду (11), характерному для метода учета рассеяния энергии с помощью разностной формы гипотезы внутреннего трения.

При учете внутреннего трения согласно равенству (7) колебания механических систем описываются дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом.

Так уравнение свободных колебаний линейно упругой системы с одной степенью свободы имеет вид

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} + p^2 z(t) - \kappa p^2 z(t-\tau) = 0, \qquad (12)$$

где p - собственная частота системы, а величины k и τ определяются согласно равенству (7).

Для большого количества применяемых в промышленности материалов коэффициент демпфирования k и время запаздывания τ являются либо постоянными, либо зависят от амплитуды колебаний.

Уравнение (12) может быть решено, например, асимптотическим методом Крылова-Боголюбова [7], согласно которому приближенное решение будет

$$z(t) = a(t)\cos\varphi(t),$$

где $a(t)$ и $\varphi(t)$ определяются из системы уравнений

$$\frac{da(t)}{dt} = -\frac{\kappa p a(t)\sin p\tau}{2},$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = p - \frac{\kappa p\cos p\tau}{2}.$$

Рассмотрим установившийся одночастотный колебательный режим с частотой внешнего возмущения в слабо нелинейной упругой системе с одной степенью свободы.

Уравнение движения указанной системы с учетом силы внутреннего трения согласно принятой гипотезе (7) записывается в виде

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} + p^2 z(t) = \mu\left\{K_1(a) p^2 z(t-\tau) - f(z)\right\} + h\cos\omega t. \qquad (13)$$

В равенстве (13) постоянные p и ω, соответственно, собственная частота и частота возмущающей силы, постоянная h – амплитуда возмущающей силы. Малый параметр μ подчеркивает малость силы внутреннего трения, выражаемого согласно равенству (7) произведением $\mu\kappa(a)\ p^2 z(t-\tau)$, а также слабую нелинейность упругой силы, выражаемую слагаемым $\mu f(z)$. Влиянием слабой нелинейности упругой силы на внутреннее трение пренебрегаем как величиной более высокого порядка малости.

Записав отыскиваемое решение уравнения (13) в виде

$$z(t) = a\cos(\omega t + \theta), \qquad (14)$$

подставив выражение $z(t)$ из равенства (14) в уравнение (13) и приравняв коэффициенты, соответственно, при $\cos(\omega t + \theta)$ и $\sin(\omega t + \theta)$ в левой и правой частях равенства (13), получим два уравнения для определения амплитуды a и сдвига фазы θ.

При достаточно малых значениях коэффициента внутреннего трения эти уравнения имеют вид

$$a = \frac{h}{\sqrt{\left[p^2 - \omega^2 + \frac{\mu q(a)}{a} - \frac{\gamma^2(a) p^2}{2}\right]^2 + \gamma^2(a) p^4}}, \qquad (15)$$

$$tq\theta = \frac{\gamma(a) p^2}{p^2 - \omega^2 + \frac{\mu q(a)}{a} - \frac{\gamma^2(a) p^2}{2}},$$

где $$q(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\varphi)\cos\varphi d\varphi.$$

Из равенства (15) видим, что максимальное значение амплитуда колебаний достигнет при условии

$$p^2 - \omega^2 + \frac{\mu q(a)}{a} - \frac{\gamma^2(a) p^2}{2} = 0 \qquad (16)$$

и определяется это максимальное значение из уравнения

$$a = \frac{h}{\gamma(a) p^2}. \qquad (17)$$

Иными словами, уравнения (16) и (17) являются уравнениями, определяющими резонансную частоту и резонансную амплитуду вынужденных колебаний слабо нелинейной механической системы с одной степенью свободы при учете рассеяния энергии согласно принятой гипотезе.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Пановко, Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем / Я.Г. Пановко. - М.: Физматгиз,1960. - 194 с.

2. Хильчевский, В.В. Обобщение зависимостей, описывающих петлю механического гистерезиса / В.В. Хильчевский // Проблемы прочности.-1969.-№5.-С.22-24.
3. Muravskii G.B. On frequency independent dampinq/ G.B. Muravskii //Journal of Sound and Vibration/-2004.- P.653-668.
4. Сорокин, Е.С. Разностная форма учета внутреннего трения при колебаниях упругих систем / Е.С. Сорокин, Б.А. Альтшуль // Проблемы прочности.- 1971. - №5.- С.11-12.
5. Альтшуль, Б.А. Развитие разностной формы учета рассеяния энергии при колебаниях нелинейно-гистерезисных систем / Б.А. Альтшуль // XI Всесоюзный научно-технический симпозиум по вопросам рассеяния энергии при колебаниях механических систем: материалы. – Киев. - 1978. - С. 51-54.
6. Альтшуль, Б.А. К вопросу о колебаниях механических систем с учетом наследственного и гистерезисного рассеяния энергии / Б.А. Альтшуль // Рассеяние энергии при колебаниях механических систем: X Всесоюзное научно-техническое совещание: материалы. - Киев. - 1976. - С. 65-67.
7. Боголюбов, Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний/ Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. - М.: Физматгиз, 1958. -. 408 с.

SUBTRACTION FORM OF ACCOUN TING DISSIPATED LOSSES AT ELASTING SYSTEMS OSCILLATIONS

B.A. Altschul

The article discusses subtraction form of accounting inner friction at oscillation of elastic systems, generalizing well known hysteretis and heredity hypotheses. Jts adaptability to descrifing free and foreed oscillations of dissipation systems.

oscillations, elastic systems, inner friction, subtraction form