УДК 517.944; 536.2

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ КЛИНА

Ю.Н. Антипов, И.Г. Лурье, Т.Е. Омаров*

ФГБОУ ВПО «Калининградский государственный технический университет»,
Россия, 236022, г. Калининград, Советский проспект, 1; E-mail: yunikan@inbox.ru
* Карагандинский государственный университет,
Республика Казахстан, 100028, г. Караганда, ул. Университетская, 28

Рассмотрена краевая задача теплопроводности для бесконечного клина. Использован метод потенциала двойного слоя.

краевая задача теплопроводности, потенциал двойного слоя, интегральные уравнения Вольтера

Решение краевых задач теплопроводности для тел различной формы представляет большой интерес при разработке тепловых приемников излучения. Ранее нами рассмотрены такие задачи для пластины, ограниченного цилиндра, полусферы, шарового пояса, сопряжения полусферы и ограниченного цилиндра [1-3]. Результаты этих исследований положены в основу анализа тепловых процессов в чувствительных элементах приемников и использованы при получении рабочих формул для определения энергетических параметров падающего излучения.

Тепловые приемники с чувствительными элементами в виде перечисленных выше форм предназначены для измерения энергетических параметров пространственно неоднородного (полусфера, шаровой пояс) излучения. Следует отметить, что измерение пространственно неоднородного излучения с помощью этих приемников является достаточно трудоемким процессом. В этой связи большой интерес представляет разработка координатно-чувствительных приемников излучения, позволяющих определять распределение плотности потока падающего излучения по поверхности чувствительного элемента прибора. Такого типа приемник пространственного неоднородного излучения может иметь чувствительный элемент клиновидной формы.

Поэтому целью данной работы является рассмотрение температурного поля клина.

Пусть дан бесконечный клин с раствором угла $\pi/2$. Уравнения его поверхностей описываются выражениями $y = kx$ и $y = -kx$ соответственно.

Краевая задача теплопроводности для области D записывается в виде

$$u_t = a(u_{xx} + u_{yy}), \tag{1}$$

$$u(x, y, t)\big|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

$$u(x, y, t)\big|_{y=kx} = \varphi_1(x, t), \qquad (3)$$

$$u(x, y, t)\big|_{y=-kx} = \varphi_2(x, t), \qquad (4)$$

Решение задачи будем искать в виде потенциала двойного слоя

$$u(x, y, t) = \int_0^t d\tau \int_{г} \frac{\mu(\theta, \tau) \cdot \nu_{pQ} \cdot \cos\varphi}{4a^2 x(t-\tau)^2} \cdot \exp\left[-\frac{\nu_{pQ}^2}{4a^2(t-\tau)}\right] d\Gamma\Gamma. \qquad (5)$$

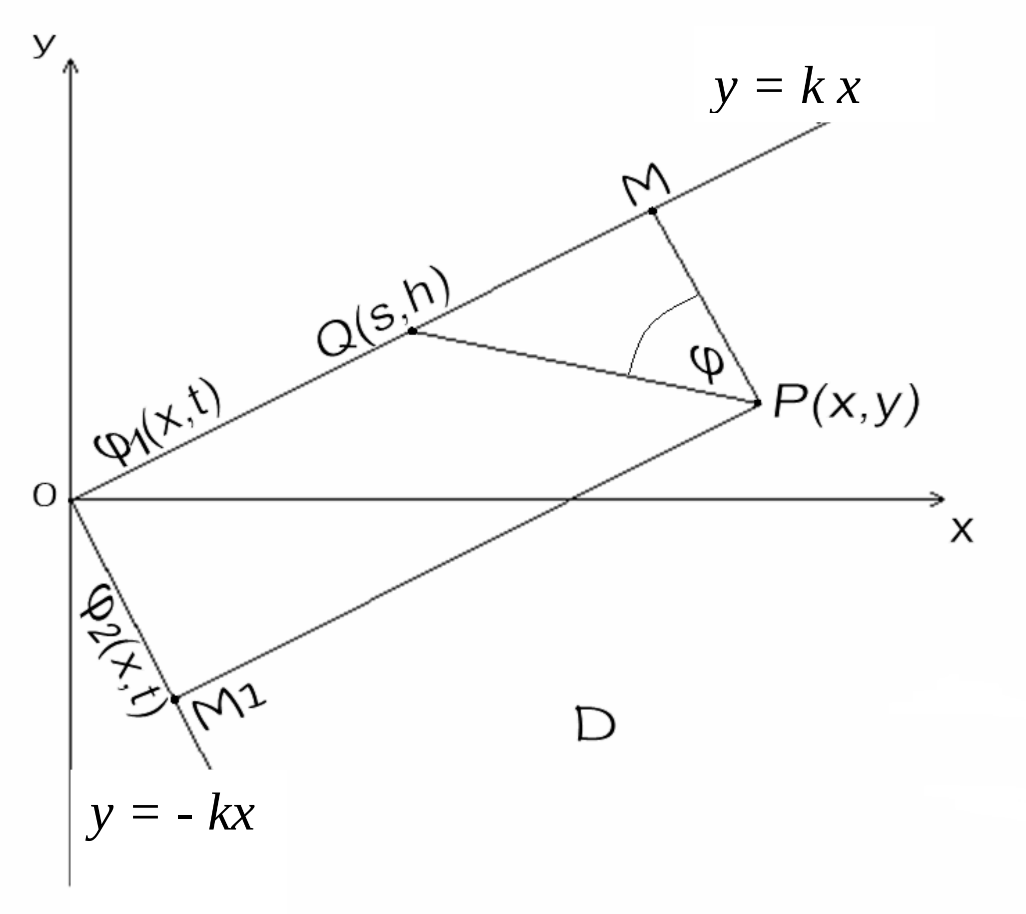

Рис. Схематическое изображение клина
Fig. Schematic image of a wedge

Преобразуем выражение (5). Из рисунка видно, что для линии $y = kx$

$$d = \nu_{pQ} \cdot \cos\varphi.$$

В общем виде расстояние между точкой $p(x, y)$ и линией $y = kx$

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

где $\mu_0(x_0 y_0)$ - точка на линии и $Ax+By+c=0$ уравнение этой линии.

В нашем случае расстояние $p\mu$ равно:

$$|p\mu|=d=\nu_{pQ}\cdot\cos\varphi=\frac{kx-y}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Аналогично, для линии $y=-kx$ имеем:

$$|p\mu|=d_1=\frac{kx+y}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Далее $d\Gamma_Q=\sqrt{(d\xi)^2+(d\eta)^2}=\sqrt{1+k_2},$ т.к. $\eta=k\xi,\quad d\eta=kd\xi.$

Тогда решение (5) можно записать в виде

$$u(x,y,t)=\int_0^t d\tau\int_0^\infty \frac{\mu_1(\xi,\eta)(kx-y)}{4a^2\pi(t-\tau)^2}\cdot\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\xi+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^\infty \frac{\mu_2(\xi,\eta)(kx+y)}{4a^2\pi(t-\tau)^2}\cdot\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\xi, \tag{6}$$

где $\mu_1(x,y)$ и $\mu_2(x,t)$ - неизвестные функции, подлежащие определению.

Решение (6) удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) и начальному условию (2). Для нахождения неизвестных функций $\mu_1(x,y)$ и $\mu_2(x,t)$ потребуем, чтобы решение (6) удовлетворяло граничным условиям (3) и (4). Пусть $P\to M$ (или $P\to M_1$), тогда, используя теоремы о скачке потенциала двойного слоя, запишем, соответственно:

$$\mu_1(x,t)+\int_0^t d\tau\int_0^\infty \frac{\mu_2(\xi,\eta)2kx}{4a^2\pi(t-\tau)^2}\cdot\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+k^2(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\xi=\varphi_1(x,t),$$

$(P\to M)$ (7)

$$\mu_2(x,t)+\int_0^t d\tau\int_0^\infty \frac{\mu_1(\xi,\tau)2kx}{4a^2\pi(t-\tau)^2}\cdot\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+k^2(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\xi=\varphi_2(x,t).$$

$(P\to M_1)$

Полученную систему интегральных уравнений Вольтера 2-го рода (7) можно преобразовать. Введем обозначения:

$$\begin{cases} \mu_1(x,t)+\mu_2(x,t)=\mu(x,t), \\ \varphi_1(x,t)+\varphi_2(x,t)=\varphi(x,t) \end{cases} \tag{8}$$

Тогда (7) запишется в виде:

$$\mu(x,t)+\int_0^t d\tau \int_0^\infty \frac{\mu(\xi,\eta)2kx}{4a^2\pi(t-\tau)^2}\cdot \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+k^2(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\xi=\varphi(x,t), \tag{9}$$

Решение уравнения (9) будем искать методом последовательных приближений. В соответствии с этим методом

$$\mu(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu_k(x,t), \tag{10}$$

где

$$\begin{cases} \mu_0(x,t)=\varphi(x,t), \\ \mu_1(x,t)=-\int_0^t d\tau \int_0^\infty K(x,\xi;t\tau)\mu_0(\xi,\tau)d\xi, \\ \mu_2(x,t)=\int_0^t d\tau \int_0^\infty K(x,\xi;t\tau)\mu_1(\xi,\tau)d\xi, \\ \mu_k(x,t)=(-1)^k\int_0^t d\tau \int_0^\infty K(x,\xi;t\tau)\mu_{k-1}(\xi,\tau)d\xi, \end{cases} \tag{12}$$

$$K(x,\xi;t\tau)=\frac{2kx}{4a^2\pi(t-\tau)}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+k^2(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]$$

- ядро интегрального уравнения (9).

Оценим интеграл от ядра. После преобразований получим:

$$J-\frac{2}{\pi}\int_{\nu_1}^\infty \exp(-\nu^2)d\nu\int_{\lambda_1\nu}^\infty \exp(-z^2)dz\le$$

$$\frac{2}{\pi}\int_{\nu_1}^\infty \exp(-\nu^2 d\nu\int_{\lambda\nu}^\infty \exp(-z^2)dz=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_{\lambda\nu}^\infty \exp\left[-(\nu^2+z^2)\right]dz\cdot d\nu,$$

где $\nu=\dfrac{2kx}{2a\sqrt{t-\tau}\sqrt{1+k^2}}d\tau;$ $\qquad \nu_1=\dfrac{2kx}{2a\sqrt{t}\sqrt{1+k^2}};$

$$d\nu = \frac{2kx}{4a\sqrt{(t-\tau)}^{3}\sqrt{1+k^2}}d\tau; \qquad \lambda = \frac{k^2-1}{2k};$$

$$\lambda_1 = -\frac{(1+k^2)}{2k};$$

$$Z = \frac{(1+k^2)\xi - x(1-k^2)}{2a\sqrt{(t-\tau)(1+k^2)}}; \quad dz - \frac{\sqrt{1+k^2}}{2a\sqrt{t-\tau}}d\xi. \qquad (12)$$

После перехода K полярной системе координат

$$J \le \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \frac{\pi-2l}{\pi},$$

где $\frac{\pi}{2}-\varphi=\beta; \qquad \beta=\pi-2l.$

Пусть $\varphi(x,t) \le N_0$ - ограниченная функция. Тогда система (11) примет вид

$$\begin{cases} |\mu_0(x,t)| \le N_0, \\ |\mu_1(x,t)| \le N_0 \cdot \left(\frac{\pi-2l}{\pi}\right); \\ |\mu_2(x,t)| \le N_0 \cdot \left(\frac{\pi-2l}{\pi}\right)^2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ |\mu_k(x,t)| \le N_0 \cdot \left(\frac{\pi-2l}{\pi}\right)^k; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \qquad (13)$$

Согласно полученной системе (13) мажорирующий ряд имеет вид:

$$\sum_{k=0}^{\infty} N_0\left(\frac{\pi-2l}{\pi}\right)^k = \frac{N_0}{2l}. \qquad (14)$$

Если $\left|\frac{\pi-2l}{\pi}\right| < 1,$

то мажорирующий ряд сходится. Из этого условия получим:

$$0 < l < \pi . \qquad (15)$$

Это означает, что при условии (15) поставленная краевая задача теплопроводности (1)-(4) имеет решение.

При использовании клина в качестве чувствительного элемента приемника одна поверхность клина облучается от источника пространственно неоднородного излучения, температура другой поверхности контролируется термозависимыми элементами, специальным образом распределенными по этой поверхности. Применение чувствительного элемента с переменной толщиной позволяет избежать экстремальных условий работы приемника при измерении высокоэнергетичного излучения [3].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Антипов, Ю.Н. Приемники для излучения энергетических параметров теплофизических процессов / Ю.Н. Антипов, М.К. Ахтанова, Н.В. Иманасова // Известия КГТУ. – 2005. - №7. - С.245-249.
2. Антипов, Ю.Н. Зональная и угловая чувствительность приемников излучения / Ю.Н. Антипов // Вестник МАИ:сборник научных трудов / Калининград, 2011. - С.4-7.
3. Антипов, Ю.Н. Анализ данных и моделирование конвертерного процесса с учетом текущих значений энергетических параметров излучения / Ю.Н. Антипов // Известия КГТУ. Сер. Естественные и математические науки – 2011. - №23. - С.55-60.

THE SOLUTION OF THE DIFFERENTIAL EQUATION OF HEAT CONDUCTIVITY FOR A WEDGE

JU.N. Antipov, J.G. Lurye, T.E. Omarov*

The regional problem of heat conductivity for an infinite wedge is considered. The method of potential of a double layer is used.

regional problem of heat conductivity, of potential of a double layer, Volterrs integrated equations