УДК 514.75

ГОЛОНОМНОСТЬ ОСНОВНЫХ СТРУКТУРНЫХ ПОДРАССЛОЕНИЙ m-ПОЛОСНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Н.А. Елисеева

ФГБОУ ВПО «Калининградский государственный технический университет»,
Россия, 236022, г. Калининград, Советский проспект, 1
E-mail: ne2705@gmail.com

Изучаются m-полосные распределения проективного пространства, оснащенные полем гиперплоскостей. Приведены аналитические признаки взаимности основных структурных подрасслоений и сопряженности систем распределений. Выяснены аналитические признаки голономности основных структурных подрасслоений и дана их геометрическая интерпретация.

полосное распределение, голономность, гиперполоса

В этой работе индексы принимают следующие значения: $I,K,L=\overline{1,n}$; $\bar{I},\bar{K},\bar{L}=\overline{0,n}$; $p,q,s=\overline{1,r}$; $i,j,k=\overline{r+1,m}$; $\alpha,\beta=\overline{m+1,n-1}$; $\hat{\alpha},\hat{\beta}=\overline{m+1,n}$; $a,b=\overline{1,m}$; $u,v=\overline{r+1,n-1}$; $\hat{u},\hat{v}=\overline{r+1,n}$; $\hat{\xi}=(\overline{1,r};\overline{m+1,n})$.

Пусть P_n – n-мерное проективное пространство, отнесенное к подвижному точечному реперу $R=\{A_{\bar{I}}\}$. Деривационные формулы репера R имеют вид

$$dA_{\bar{I}}=\omega_{\bar{I}}^{\bar{K}}A_{\bar{K}},$$

где формы Пфаффа $\omega_{\bar{I}}^{\bar{K}}$ подчинены уравнениям структуры проективного пространства [1]:

$$D\omega_{\bar{I}}^{\bar{K}}=\omega_{\bar{I}}^{\bar{L}}\wedge\omega_{\bar{L}}^{\bar{K}};\quad \sum_{\bar{I}=0}^{n}\omega_{\bar{I}}^{\bar{I}}=0.$$

Совместим вершину A_0 репера $\{A_{\bar{I}}\}$ с текущей точкой X пространства P_n, тогда структурные формы точки X приводятся к каноническому виду ω_0^I. Такой репер является репером R^0 нулевого порядка.

Пару распределений r-мерных плоскостей Λ (Λ-распределение) и m-мерных плоскостей М (М-распределение) проективного пространства P_n, определяемых соотношениями:

$$\Delta\Lambda_p^{\hat{u}}\overset{def}{=}\nabla\Lambda_p^{\hat{u}}-\Lambda_q^{\hat{u}}\Lambda_p^{\hat{v}}\omega_{\hat{v}}^q+\omega_p^{\hat{u}}=\Lambda_{pK}^{\hat{u}}\omega_0^K,$$

$$\Delta\mathrm{M}_a^{\hat{\alpha}}\overset{def}{=}\nabla\mathrm{M}_a^{\hat{\alpha}}-\mathrm{M}_b^{\hat{\alpha}}\mathrm{M}_a^{\hat{\beta}}\omega_{\hat{\beta}}^b+\omega_a^{\hat{\alpha}}=\mathrm{M}_{aK}^{\hat{\alpha}}\omega_0^K$$

с отношением инцидентности $\mathrm{X} \equiv \mathrm{A}_0 \in \Lambda \subset \mathrm{M} \quad r < m < n-1$ их соответствующих элементов в каждом центре A_0, назовем m-полосным распределением П, при этом Λ-распределение – базисным, а М-распределение – оснащающим.

При $n - r < \dfrac{r(r+1)}{2}$ к m-полосному распределению П в первой дифференциальной окрестности относительно репера R^0 внутренним образом присоединяется поле гиперплоскостей Н. П-распределение, оснащенное полем гиперплоскостей Н, назовем $\mathrm{H}(\Pi)$- распределением.

Рассмотрим некоторые фокальные образы, ассоциированные с оснащающей гиперплоскостью $H(A_0)$. Прежде всего, выделим характеристику $\Phi_{n-r-1}(A_0)$ (Ф-плоскость) гиперплоскости $H(A_0)$, полученную при смещениях центра A_0 вдоль кривых, принадлежащих Λ-распределению. Плоскость $\Phi(A_0)$ пересекает соответствующую плоскость $M(A_0)$ П-распределения по $(m-r)$–мерной плоскости L_{m-r}: $\Phi(A_0) \cap M(A_0) = L(A_0)$.

Другим фокальным образом плоскости $H(A_0)$ является ее характеристика $E_{n-m-1}(A_0)$ (Е-плоскость), полученная при смещениях центра A_0 вдоль интегральных кривых М-распределения. Плоскость, натянутую в каждом центре A_0 на плоскости $E(A_0)$ и $\Lambda(A_0)$, назовем плоскостью Ψ, а распределение этих плоскостей - Ψ-распределением. При этом в каждом центре A_0 $\mathrm{H}(\Pi)$-распределения выполняются соотношения инцидентности:

$$[\Lambda, L] = M,\ [L, E] = \Phi,\ [E, \Lambda] = \Psi,\ L \cap \Lambda = A_0,\ M \cap E = A_0.$$

Адаптируем репер R^0 к полученным плоскостям:

$$\{A_p\} \subset \Lambda(A_0),\ \{A_i\} \subset L(A_0),\ \{A_\alpha\} \subset E(A_0).$$

Выбранный таким образом репер является репером 1-го порядка R^1. Относительно репера R^1 дифференциальные уравнения $\mathrm{H}(\Pi)$-распределения имеют вид:

$$\omega_p^n = \Lambda_{pK}^n \omega_0^K,\ \omega_p^i = \Lambda_{pK}^i \omega_0^K,\ \omega_p^\alpha = \Lambda_{pK}^\alpha \omega_0^K,\ \omega_i^n = \Lambda_{i\hat{u}}^n \omega_0^{\hat{u}}; \tag{1}$$

$$\omega_i^p = \Lambda_{iK}^p \omega_0^K,\ \omega_i^\alpha = \Lambda_{iK}^\alpha \omega_0^K,\ \omega_\alpha^n = \Lambda_{\alpha\hat{\beta}}^n \omega_0^{\hat{\beta}},\ \omega_\alpha^p = \Lambda_{\alpha K}^p \omega_0^K,\ \omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha K}^i \omega_0^K.$$

Справедливы соотношения

$$\Lambda_{\alpha i}^n = 0,\ \Lambda_{\alpha p}^n = 0,\ \Lambda_{ip}^n = 0 \tag{2}$$

в силу того, что $\{A_\alpha; A_i\} \subset \Phi(A_0)$, $\{A_\alpha\} \subset E(A_0)$. Геометрические объекты $\Gamma_1 = \{\Lambda_{pK}^n, \Lambda_{pK}^i, \Lambda_{pK}^\alpha, \Lambda_{i\hat{u}}^n, \Lambda_{iK}^\alpha\}$ и $\Gamma_2 = \{\Gamma_1, \Lambda_{iK}^p, \Lambda_{\alpha K}^p, \Lambda_{\alpha K}^i, \Lambda_{\alpha\hat{\beta}}^n\}$ являются, соответственно, фундаментальными геометрическими объектами 1-го и 2-го порядка $\mathrm{H}(\Pi)$-распределения.

Замыкание соотношений (1) с учетом (2) приводит к следующим дифференциальным уравнениям, которым подчинены компоненты фундаментального объекта Γ_2:

$$\nabla \Lambda_{pK}^n + \Lambda_{pK}^n \omega_0^0 - \omega_p^0 \delta_K^n = \Lambda_{pKL}^n \omega_0^L;$$

$$
\begin{aligned}
&\nabla\Lambda^i_{pK}+\Lambda^i_{pK}\omega^0_0+\Lambda^n_{pK}\omega^i_n-\omega^0_p\delta^i_K=\Lambda^i_{pKL}\omega^L_0;\\
&\nabla\Lambda^\alpha_{pK}+\Lambda^\alpha_{pK}\omega^0_0+\Lambda^n_{pK}\omega^\alpha_n-\omega^0_p\delta^\alpha_K=\Lambda^\alpha_{pKL}\omega^L_0;\\
&\nabla\Lambda^n_{i\hat{u}}+\Lambda^n_{i\hat{u}}\omega^0_0-\omega^0_i\delta^n_{\hat{u}}=\Lambda^n_{i\hat{u}K}\omega^K_0;\\
&\nabla\Lambda^p_{iK}+\Lambda^p_{iK}\omega^0_0+\Lambda^n_{iK}\omega^p_n-\omega^0_i\delta^p_K=\Lambda^p_{iKL}\omega^L_0;\\
&\nabla\Lambda^\alpha_{iK}+\Lambda^\alpha_{iK}\omega^0_0+\Lambda^n_{iK}\omega^\alpha_n-\omega^0_i\delta^\alpha_K=\Lambda^\alpha_{iKL}\omega^L_0;\\
&\nabla\Lambda^n_{\alpha\hat{\beta}}+\Lambda^n_{\alpha\hat{\beta}}\omega^0_0-\omega^0_\alpha\delta^n_{\hat{\beta}}=\Lambda^n_{\alpha\hat{\beta}K}\omega^K_0;\\
&\nabla\Lambda^p_{\alpha K}+\Lambda^p_{\alpha K}\omega^0_0+\Lambda^n_{\alpha K}\omega^p_n-\omega^0_\alpha\delta^p_K=\Lambda^p_{\alpha KL}\omega^L_0;\\
&\nabla\Lambda^i_{\alpha K}+\Lambda^i_{\alpha K}\omega^0_0+\Lambda^n_{\alpha K}\omega^i_n-\omega^0_\alpha\delta^i_K=\Lambda^i_{\alpha KL}\omega^L_0.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Кроме того, компоненты фундаментального объекта Γ_2 связаны соотношениями:

$$
\begin{aligned}
&\Lambda^n_{ij}\Lambda^j_{[pq]}+\Lambda^n_{i\alpha}\Lambda^\alpha_{[pq]}+\Lambda^n_{in}\Lambda^n_{[pq]}+\Lambda^n_{s[p}\Lambda^s_{|i|q]}=0;\\
&\Lambda^n_{\alpha\beta}\Lambda^\beta_{[ij]}+\Lambda^n_{\alpha n}\Lambda^n_{[ij]}+\Lambda^n_{k[i}\Lambda^k_{|\alpha|j]}=0;\\
&\Lambda^n_{\alpha\beta}\Lambda^\beta_{[pq]}+\Lambda^n_{\alpha n}\Lambda^n_{[pq]}+\Lambda^n_{s[p}\Lambda^s_{|\alpha|q]}=0.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Итак, оснащенное m-полосное $\mathrm{H}(\Pi)$-распределение относительно репера 1-го порядка R^1 задается уравнениями (1), (3) и соотношениями (4).

Имеет место теорема существования $\mathrm{H}(\Pi)$-распределения.

Теорема 1. $\mathrm{H}(\Pi)$-распределение проективного пространства P_n, заданное системой уравнений (1) в репере 1-го порядка, существует с произволом 2m(n-m-1)+r(2m-2r+1) функций n аргументов.

Определение. $\mathrm{H}(\Pi)$-распределение, для которого тензор Λ^n_{pq} невырожденный, назовем регулярным [2].

$\mathrm{H}(\Pi)$-распределение регулярно [2] тогда и только тогда, когда характеристика $\Phi_{n-r-1}(A_0)$ гиперплоскости $H_{n-1}(A_0)$, полученная при смещениях центра A_0 вдоль кривых λ, принадлежащих [3] базисному Λ-распределению (т.е. касательные к кривым λ в точке A_0 инцидентны текущей плоскости Λ-распределения):

$$
\lambda:\begin{cases}\omega^{\hat{v}}_0=0,\\ \omega^p_0=\mu^p\Theta,\ D\Theta=\Theta\wedge\Theta^0_0,\end{cases}
$$

$$
\nabla\mu^p-\mu^p(\omega^0_0+\Theta^0_0)=\mu^p_1\Theta,
$$

имеет с r-мерной плоскостью $\Lambda(A_0)$ этого распределения лишь одну общую точку $A_0:\Lambda(A_0)\cap\Phi_{n-r-1}(A_0)=A_0$.

Получены аналитические признаки взаимности [2] основных структурных подрасслоений $\mathrm{H}(\Pi)$-распределения.

Теорема 2. Регулярные Λ-, L-, M-подрасслоения $\mathrm{H}(\Pi)$-распределения являются взаимными [2], если, соответственно, выполняются следующие аналитические условия: $\Lambda^n_{pv}=0$, $\Lambda^n_{i\alpha}=0$, $\Lambda^n_{a\alpha}=0$.

Определение. Говорят, что оснащающее М-распределение несет двухкомпонентную сопряженную систему (Λ, L) распределений плоскостей Λ и L, если в каждом центре A_0 при смещении одной из этих плоскостей вдоль линий, принадлежащих другой плоскости, она остается в плоскости $M(A_0)$ [4], [5].

Выяснены аналитические признаки сопряженных систем распределений, принадлежащих $M-, \Phi-, \Psi-, H-$распределениям.

Теорема 3. Оснащающие $M-, \Phi-, \Psi-, H-$распределения данного $\mathrm{H}(\Pi)$-распределения несут соответственно сопряженные системы (Λ, L), (L, E), (Λ, E), (M, E) распределений тогда и только тогда, когда выполняются, соответственно, условия:

$$\Lambda^n_{pi} = 0,\ \Lambda^\alpha_{pi} = 0,\ \Lambda^\alpha_{ip} = 0;$$

$$\Lambda^n_{i\alpha} = 0,\ \Lambda^p_{i\alpha} = 0,\ \Lambda^p_{\alpha i} = 0;$$

$$\Lambda^n_{p\alpha} = 0,\ \Lambda^i_{p\alpha} = 0,\ \Lambda^i_{\alpha p} = 0;$$

$$\Lambda^n_{p\alpha} = 0,\ \Lambda^n_{i\alpha} = 0.$$

Теорема 4. Λ-подрасслоение данного $\mathrm{H}(\Pi)$-распределения является голономным [3], если выполняются условия:

$$r^{\hat{\nu}}_{pq} = 0, \tag{5}$$

где $r^{\hat{\nu}}_{pq} = \{r^i_{pq}, r^\alpha_{pq}, r^n_{pq}\}$;

$$r^i_{pq} = \frac{1}{2}(\Lambda^i_{pq} - \Lambda^i_{qp}),\ \nabla r^i_{pq} + r^i_{pq}\omega^0_0 + r^n_{pq}\omega^i_n = r^i_{pqK}\omega^K_0;$$

$$r^\alpha_{pq} = \frac{1}{2}(\Lambda^\alpha_{pq} - \Lambda^\alpha_{qp}),\ \nabla r^\alpha_{pq} + r^\alpha_{pq}\omega^0_0 + r^n_{pq}\omega^\alpha_n = r^\alpha_{pqK}\omega^K_0;$$

$$r^n_{pq} = \frac{1}{2}(\Lambda^n_{pq} - \Lambda^n_{qp}),\ \nabla r^n_{pq} + r^n_{pq}\omega^0_0 = r^n_{pqK}\omega^K_0.$$

При условиях (5) проективное пространство P_n расслаивается на

1) (n-r)-параметрическое семейство регулярных r-мерных гиперполос $H_r(L)$, оснащенных полем L-плоскостей так, что в каждом центре A_0 $L(A_0) \subset \Phi(A_0)$ и выполняются условия:

$$\Lambda(A_0) \cap L(A_0) = A_0,\ [\Lambda(A_0), L(A_0)] = M(A_0);$$

2) (n-r)-параметрическое семейство регулярных r-мерных гиперполос H_r, оснащенных полем касательных m-мерных плоскостей M;

3) (n-r)-параметрическое семейство регулярных r-мерных полос $V_{r(m)}$ порядка m, оснащенных полем касательных гиперплоскостей H.

Теорема 5. L-подрасслоение $\mathrm{H}(\Pi)$-распределения является голономным [3], если выполняются условия:

$$r^{\hat{\xi}}_{ij} = 0, \tag{6}$$

где $r^{\hat{\xi}}_{ij} = \{r^p_{ij}, r^\alpha_{ij}, r^n_{ij}\}$;

$$r_{ij}^{p}=\frac{1}{2}\left(\Lambda_{ij}^{p}-\Lambda_{ji}^{p}\right),\ \nabla r_{ij}^{p}+r_{ij}^{p}\omega_{0}^{0}+r_{ij}^{n}\omega_{n}^{p}=r_{ijK}^{p}\omega_{0}^{K};$$
$$r_{ij}^{\alpha}=\frac{1}{2}\left(\Lambda_{ij}^{\alpha}-\Lambda_{ji}^{\alpha}\right),\ \nabla r_{ij}^{\alpha}+r_{ij}^{\alpha}\omega_{0}^{0}+r_{ij}^{n}\omega_{n}^{\alpha}=r_{ijK}^{\alpha}\omega_{0}^{K};$$
$$r_{ij}^{n}=\frac{1}{2}\left(\Lambda_{ij}^{n}-\Lambda_{ji}^{n}\right),\ \nabla r_{ij}^{n}+r_{ij}^{n}\omega_{0}^{0}=r_{ijK}^{n}\omega_{0}^{K}.$$

При условиях (6) проективное пространство P_n расслаивается на

1) (n-m+r)-параметрическое семейство регулярных (m-r)-мерных гиперполос H_{m-r}, оснащенных полем касательных m-мерных плоскостей M;

2) (n-m+r)-параметрическое семейство (m-r)-мерных полос $V_{m-r,(m)}$ порядка m, оснащенных полем касательных гиперплоскостей H.

Теорема 6. M-подрасслоение $\mathrm{H}(\Pi)$-распределения является голономным [6], если выполняются условия:

$$r_{ij}^{\hat{\alpha}}=0;\ \ r_{pq}^{\hat{\alpha}}=0;\ \ \Lambda_{pi}^{n}=\Lambda_{ip}^{\alpha}=\Lambda_{pi}^{\alpha}=0, \tag{7}$$

где $r_{ij}^{\hat{\alpha}}=\{r_{ij}^{\alpha},r_{ij}^{n}\}$; $r_{pq}^{\hat{\alpha}}=\{r_{pq}^{\alpha},r_{pq}^{n}\}$.

В этом случае распределение плоскостей M определяет (n-m)-параметрическое семейство m-мерных поверхностей (плоскости M огибаются m-мерными поверхностями V_m (n-m)-параметрического семейства). При смещении центра A_0 вдоль фиксированной поверхности V_m уравнения (7), (1) в выбранном репере первого порядка являются дифференциальными уравнениями регулярной гиперполосы H_m, базисная поверхность V_m которой несет двухкомпонентную сопряженную систему (Λ,L) [6]. Следовательно, при выполнении условий (7) пространство P_n расслаивается на (n-m)-параметрическое семейство регулярных гиперполос H_m так, что плоскость $M(A_0)$ в каждом центре A_0 является касательной плоскостью базисной поверхности V_m гиперполосы H_m, а плоскость $H_{n-1}(A_0)$ — ее главной касательной гиперплоскостью, при этом базисная поверхность V_m несет двухкомпонентную сопряженную систему (Λ,L) [6].

Теорема 7. Гиперплоскостное H-распределение является голономным, если выполняются условия:

$$r_{ij}^{n}=0;\ r_{pq}^{n}=0;\ r_{\alpha\beta}^{n}=0;\ \Lambda_{pi}^{n}=\Lambda_{p\alpha}^{n}=\Lambda_{i\alpha}^{\alpha}=0, \tag{8}$$

где

$$r_{\alpha\beta}^{n}=\frac{1}{2}\left(\Lambda_{\alpha\beta}^{n}-\Lambda_{\beta\alpha}^{n}\right);\ \nabla r_{\alpha\beta}^{n}+r_{\alpha\beta}^{n}\omega_{0}^{0}=r_{\alpha\beta K}^{n}\omega_{0}^{K}.$$

При условиях (8) оснащающее H-распределение определяет однопараметрическое семейство гиперповерхностей V_{n-1} (плоскости H_{n-1} огибаются гиперповерхностями однопараметрического семейства), причем *Λ*-, *L*-, *M*-подрасслоения являются взаимными [6].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Фиников, С.П. Метод внешних форм Картана / С.П. Фиников. - Л.-М.: ОГИЗ, 1948. – 432 с.

2. Столяров, А.В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов / А.В. Столяров // Проблемы геометрии / ВИНИТИ АН СССР. - 1975. - Т. 7. - С. 117 - 151.

3. Лаптев, Г.Ф. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности / Г.Ф. Лаптев, Н.М. Остиану // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ АН СССР. – 1971. – Т. 3. – С. 49 - 94.

4. Рыжков, В.В. Сопряженные системы на многомерных поверхностях / В.В. Рыжков // Тр. Моск. матем. общества. – 1958. – Т. 7. – С. 179 - 226.

5. Акивис, М.А. О строении двухкомпонентных сопряженных систем / М.А. Акивис // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ АН СССР. - 1966. – Т. 1. – С. 7 - 31.

6. Попов, Ю.И. Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства: монография / Ю.И. Попов. - СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992. - 172 с.

HOLONOMICITY OF THE MAIN STRUCTURAL SUBBUNDLES OF m-STRIP DISTRIBUTION OF THE PROJECTIVE SPACE

N.A. Eliseeva

In the projective space we study m-strip distribution, equipped with a field of hyperplanes. The analytical signs of reciprocity of the main structural subbundles and adjoint systems distributions are found. Analytical signs of holonomicity of the main structural subbundles are elucidated and their geometric interpretations are provided.

strip distributions, holonomicity, huperstrip