

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ СФЕРИЧЕСКОГО ТЕЛА НА ТРОСАХ В ОДНОРОДНОМ ПОТОКЕ

В.А. Наумов, Н.А. Агиевич

ФГБОУ ВПО «Калининградский государственный технический университет»,  
Россия, 236022, г. Калининград, Советский проспект, 1

Сформулирована математическая постановка краевой задачи о равновесии сферического тела с двумя гибкими связями. Дифференциальные уравнения и граничные условия приведены к безразмерной форме. Показана возможность использования метода стрельбы для численного решения краевой задачи о равновесии сферического тела, закрепленного двумя тросами на дне, в однородном потоке. Представлены результаты расчета контрольного примера в среде MathCad.

*сферическое тело, гибкие связи, равновесие, краевая задача, метод расчета*

В трудах М.М. Розенштейна (см., например, [1]) разработаны численные методы решения уравнений равновесия гибкой нити [2] для расчета формы и усилий в разноглубинных и донных ставных сетях. С.В. Попов [3] применил указанные методы к исследованию полосы сети, представляющей собой комбинацию разноглубинной и донной частей ставных сетей (рис. 1). В [3] для математического описания равновесия полосы сети используются системы дифференциальных уравнений, различающиеся знаками слагаемых для разноглубинных и донных участков; для каждого участка формулируется задача Коши, но граничные условия в явном виде не приведены, поэтому проверить достоверность численного решения не представляется возможным.

В [4] записана одна система дифференциальных уравнений равновесия, справедливая для обеих частей полосы ставного невода; сформулирована краевая задача и найдены граничные условия как в точке А, так и в точке В. Но остался открытым вопрос о возможности численного решения краевой задачи.

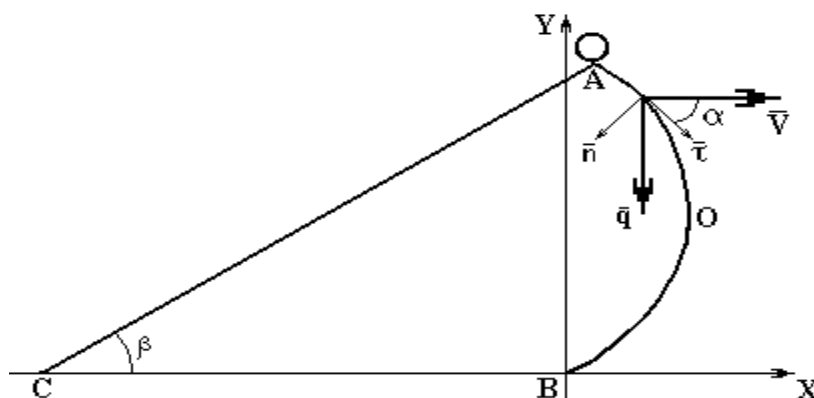


Рис. 1. Равновесие сферы с двумя гибкими связями в потоке  
Fig. 1. Balance of the sphere with two flexible cables in a stream

## ФИЗИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ (СХЕМАТИЗАЦИЯ)

В данной статье для разработки численного метода рассмотрена упрощенная двумерная задача, показанная на рис. 1. Твердое сферическое тело диаметром  $D$  и плавучестью  $Q$  ( $Q$  есть сила Архимеда минус сила тяжести) находится в равновесии в воде на двух нерастяжимых, абсолютно гибких связях. АС – невесомая прямолинейная нить длиной  $L_0$ . АОВ – трос диаметром  $\delta$  и длиной  $L$ , каждый метр которого имеет вес  $q$  в воде. Поток воды однородный, по всей глубине его скорость  $V$ , плотность воды  $\rho$ . Область гидродинамического сопротивления – квадратичная (автомодельная).

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Так как направление ортов на рис. 1 изменено по сравнению с [4], система дифференциальных уравнений равновесия троса АОВ будет иметь вид

$$T \frac{d\alpha}{dS} + q \cdot \cos \alpha - R_n = 0; \quad \frac{dT}{dS} + q \cdot \sin \alpha + R_\tau = 0; \quad (1)$$

$$\frac{dX}{dS} = \cos \alpha; \quad \frac{dY}{dS} = -\sin \alpha, \quad (2)$$

где  $\mathbf{n}$ ,  $\boldsymbol{\tau}$  – орты, направленные по нормали и по касательной к тросу соответственно;  $R_n$ ,  $R_\tau$  – проекции силы гидродинамического сопротивления троса на соответствующие оси;  $\alpha$  – локальный угол между векторами  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{n}$ ;  $T$  – величина локальной силы натяжения троса;  $S$  – дуговая координата (длина дуги, отсчитываемая от точки А).

Граничные условия к системе уравнений (1)-(2), полученные в [4]:

$$X(L) = 0; \quad Y(L) = 0; \quad L_0^2 = Y(0)^2 + X_C(0)^2; \quad (3)$$

$$X_C(0) - X_C = Y(0) \cdot \sin(\alpha(0)) - Q; \quad Y(0) \cdot \cos(\alpha(0)) - R_0 = 0, \quad (4)$$

где  $R_0$  – сила лобового сопротивления сферического тела;  $T(0)$  – величина силы натяжения в точке крепления троса к сферическому телу.

В автомодельной области сила гидродинамического сопротивления, действующая на сферу [5]:

$$R_0 = \frac{1}{2} C_u \frac{\pi D^2}{4} \rho V^2; \quad C_u = 0,44. \quad (5)$$

Полагаем, что при больших числах Рейнольдса коэффициенты гидродинамического сопротивления длинного цилиндра при поперечном и продольном обтекании можно принять равными  $C_{ц90} = 1,2$ ;  $C_{ц0} = 0,04$ , тогда соответствующие силы, действующие на единицу длины троса:

$$k_1 = \frac{1}{2} C_{ц90} \cdot \delta \rho V^2; \quad k_2 = \frac{1}{2} C_{ц0} \frac{1}{2} C_{ц0} \cdot \delta \rho V^2. \quad (6)$$

Величины нормальной  $R_n$  и касательной  $R_\tau$  составляющих силы гидродинамического сопротивления на 1 м троса вычисляем, как в [1]:

$$R_n = (k_2 + (k_1 - k_2) \sin \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha) \sin \alpha; \quad (7)$$

$$R_\tau = (k_2 + (k_1 - k_2) \sin \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \sin \alpha) \cos \alpha. \quad (8)$$

## БЕЗРАЗМЕРНАЯ ФОРМА ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ

Введем безразмерные величины

$$x = \frac{X}{L}, \quad y = \frac{Y}{L}, \quad \sigma = \frac{S}{L}, \quad \tau = \frac{T}{k_1 L}, \quad r_n = \frac{R_n}{k_1}, \quad r_\tau = \frac{R_\tau}{k_1}. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (1)-(4), получим безразмерную форму дифференциальных уравнений и граничных условий

$$\tau \frac{d\alpha}{d\sigma} + \Psi \cdot \cos \alpha - r_n = 0; \quad \frac{d\tau}{d\sigma} + \Psi \cdot \sin \alpha + r_\tau = 0; \quad (10)$$

$$\frac{dx}{d\sigma} = \cos \alpha; \quad \frac{dy}{d\sigma} = -\sin \alpha; \quad (11)$$

$$x(1) = 0, \quad y(1) = 0, \quad LoL^2 = \Psi(0)^2 + \Phi(0) - x_C^2; \quad (12)$$

$$\Phi(0) - x_C^2 - \Phi(0) \cdot \sin(\alpha(0)) - QkL + y(0) \cdot \Phi(0) \cdot \cos(\alpha(0)) - RkL = 0. \quad (13)$$

Безразмерные составляющие силы гидродинамического сопротивления:

$$r_n = \left( (1-\chi) \sin \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha \right) \sin \alpha, \quad \chi = C_{\text{ц}0} / C_{\text{ц}90} = 0,0333; \quad (14)$$

$$r_\tau = \left( (1-\chi) \sin \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \sin \alpha \right) \cos \alpha. \quad (15)$$

Согласно (10)-(15) критериями рассматриваемой задачи являются следующие безразмерные комплексы (в автомодельной области сопротивления):

$$\Psi = \frac{q}{k_1}, \quad x_C = \frac{X_C}{L}, \quad LoL = \frac{L_0}{L}, \quad QkL = \frac{Q}{k_1 \cdot L}, \quad RkL = \frac{R_0}{k_1 \cdot L} = 0,288 \cdot \frac{D^2}{\delta \cdot L}. \quad (16)$$

## ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

В современных версиях пакета MathCad (в данной работе был использован MathCad-14) комбинация операторов Given-Odesolve позволяет легко решать краевые задачи с граничными условиями первого рода, когда значения неизвестных функций заданы в двух точках. Рассматриваемая задача только в точке В имеет граничные условия первого рода – координаты точки В при  $\sigma = 1$ . Полученные в [4] граничные условия при  $\sigma = 0$  (точка А) именуется в [6] условиями общего вида:

$$\phi_1 \Phi(0), y(0), \alpha(0), \tau(0) = 0; \quad \phi_2 \Phi(0), y(0), \alpha(0), \tau(0) = 0. \quad (17)$$

Заметим, что в нашем случае согласно последней формуле (12)  $\phi_1$  является функцией только начальных координат в отличие от  $\phi_2$ .

Метод стрельбы широко используется для численного решения краевых задач систем обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [6,7]). В [6] рекомендуется применять этот метод только тогда, когда одно условие общего вида задано в некоторой точке, а все остальные — в другой. В нашем случае имеется по два граничных условия в каждой точке. Покажем, что особенности рассматриваемой задачи таковы, что вполне возможно получить работоспособный алгоритм расчета в среде MathCad на базе метода стрельбы.

Вначале, пользуясь физическим смыслом граничных условий, преобразуем (12)-(13). Введем две невязки

$$\varepsilon_1 = 100 \cdot \left( 1 - \frac{\sqrt{y(0)^2 + (x_C - x_A)^2}}{L_0} \right); \quad (18)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{(x_C - x_A) \cdot \sin(\alpha(0)) - QkL + y(0) \cdot (x_C - x_A) \cdot \cos(\alpha(0)) - RkL}{0,01 \cdot \sqrt{QkL^2 + RkL^2}}. \quad (19)$$

Первая невязка  $\varepsilon_1$  показывает, сколько процентов составляет отклонение полученного численным методом расстояния АС от длины оттяжки  $L_0$ . Вторая невязка  $\varepsilon_2$  – отношение суммы проекций всех сил, действующих в точке А, на ось, перпендикулярную оттяжке, к равнодействующей сил плавучести и гидродинамического сопротивления сферы в процентах. Указанная сумма проекций должна быть равна нулю.

Требуется подобрать такие значения  $\alpha(0)$ ,  $\tau(0)$ , при которых будут выполнены неравенства

$$|\varepsilon_1| < \varepsilon, \quad |\varepsilon_2| < \varepsilon, \quad (20)$$

где  $\varepsilon$  – наперед заданное малое число, например, 0,01 %.

#### ПРИМЕР РАСЧЕТА

Пусть заданы следующие значения безразмерных комплексов:

$$\Psi = 0,02; \quad L_0/L = 2,0; \quad x_C = -1,732; \quad QkL = 0,45; \quad RkL = 0,4. \quad (21)$$

На рис. 2 показано, как изменяется невязка при увеличении граничного угла  $\alpha(0)$  на 5 град и некотором исходном значении  $\tau(0) = 0,63$ . Видно, что при этом  $\varepsilon_1$  уменьшается, а  $\varepsilon_2$  возрастает. Увеличение значения  $\tau(0)$  приводит к росту  $\varepsilon_2$ , а на  $\varepsilon_1$  влияет незначительно, только косвенным образом (см. формулу (18)). Это позволяет, уменьшая  $\tau(0)$ , добиться выполнения условий (20). На рис. 3 показано, как изменяется невязка при окончательном значении  $\tau(0) = 0,6066$ . Выбирая граничное условие  $\alpha(0) = 46,9^\circ$  (см. рис. 3), получаем окончательные значения невязок  $\varepsilon_1 = -0,00798$  % и  $\varepsilon_2 = 0,00403$  %.

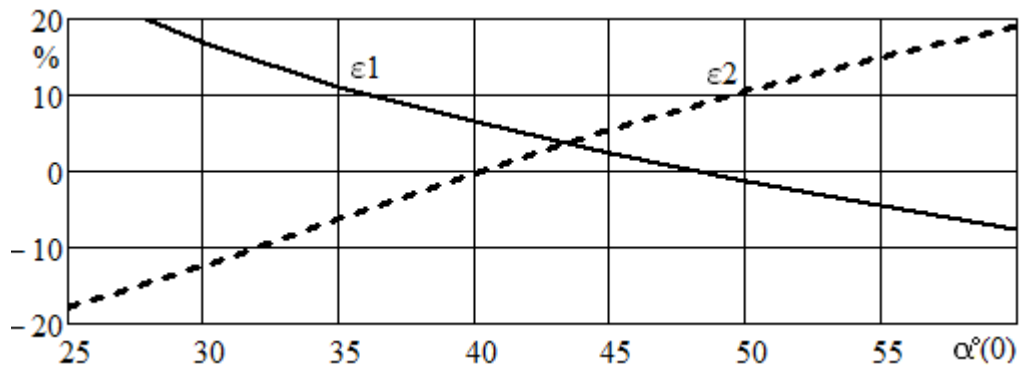


Рис. 2. Зависимость невязки от граничного условия  $\alpha(0)$

при промежуточном значении  $\tau(0) = 0,63$

Fig. 2. Dependence deviation from a boundary condition  $\alpha(0)$

at intermediate value  $\tau(0) = 0,63$

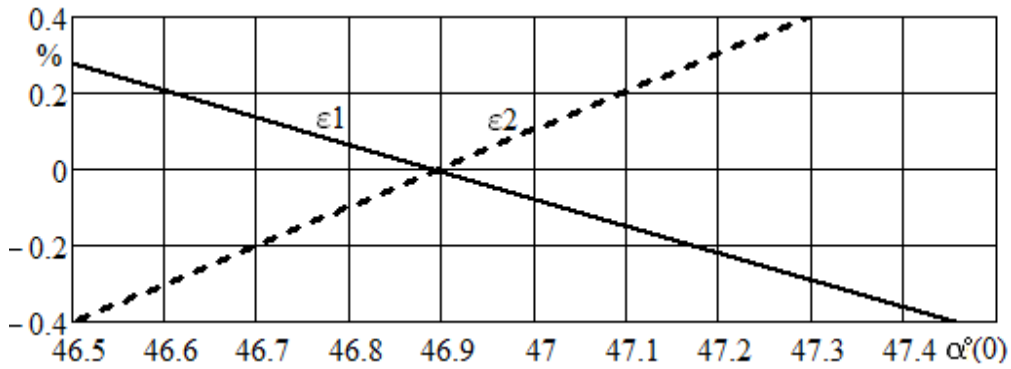


Рис. 3. Зависимость невязки от граничного условия  $\alpha(0)$  при окончательном значении  $\tau(0) = 0,6066$   
 Fig. 3. Dependence deviation from a boundary condition  $\alpha(0)$  at definitive value  $\tau(0) = 0,6066$

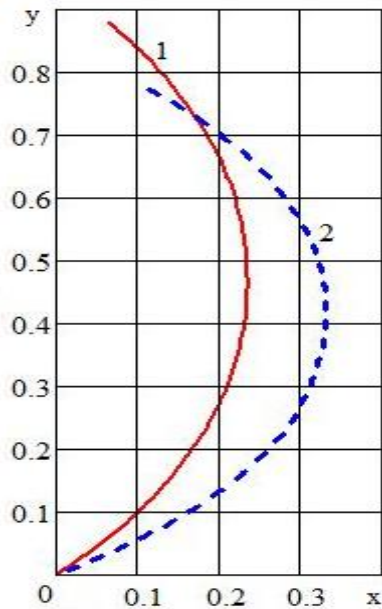


Рис. 4. Форма троса  
 Fig. 4. The cable form

Будем считать параметры (21) первым случаем. Положим, во втором случае, что квадрат скорости потока  $V^2$  стал больше в два раза. Тогда изменятся значения комплексов  $\Psi = 0,01$ ;  $QkL = 0,225$ , остальные — не меняются.

На рис. 4 и 5 представлены результаты расчета формы троса в указанных двух случаях равновесия. Видно, что повышение скорости потока при прочих равных условиях приводит к тому, что равновесие сферического тела устанавливается на большей глубине, увеличивается выпуклость формы троса; в верхней точке угол атаки уменьшается, а в нижней — возрастает. Названные изменения связаны с увеличением действующей на трос силы гидродинамического сопротивления.

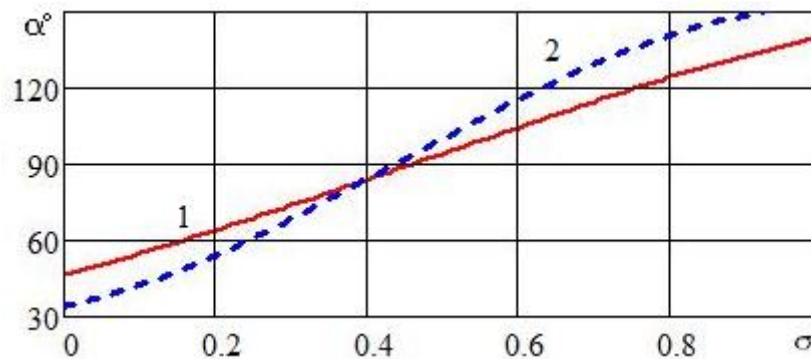


Рис. 5. Изменение угла атаки по длине троса  
 Fig. 5. Change of the attack angle on length of a cable

Таким образом, можно считать доказанной возможность использования метода стрельбы для численного решения краевой задачи о равновесии сферического тела, закрепленного двумя тросами на дне, в однородном потоке.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Розенштейн, М.М. Механика орудий рыболовства / М.М. Розенштейн, А.А. Недоступ. – М.: Моркнига, 2012. – 527 с.
2. Меркин, Д.Р. Введение в механику гибкой нити / Д.Р. Меркин. – М.: Наука, 1980. – 240 с.
3. Попов, С.В. Метод определения силовых и геометрических характеристик деформированной сети: автореф. дисс. ... канд. техн. наук: 05.18.17 - Промышленное рыболовство / ФГБОУ ВПО «КГТУ». – Калининград, 2012. – 25 с.
4. Наумов, В.А. Математическая постановка краевой задачи о равновесии полоски сети ставного невода / В.А. Наумов // Известия КГТУ. – 2013. – № 28. – С. 182 - 187.
5. Наумов, В.А. Динамика дисперсной частицы в вязкой среде / В.А. Наумов // Математическое моделирование. – 2006. – Т. 15. - № 5. – С. 27 - 36.
6. Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
7. Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: Бином, 2003. – 630 с.

#### NUMERICAL DECISION OF THE BOUNDARY PROBLEM ON BALANCE OF A SPHERICAL BODY ON CABLES IN A HOMOGENEOUS STREAM

V.A. Naumov, N.A. Agievich

Mathematical statement of a boundary problem about balance of a spherical body with two flexible cables is formulated. The differential equations and boundary conditions are led to the dimensionless form. Possibility of the shooting method use for the numerical decision of the boundary problem on balance of the spherical body fixed by two cables at the bottom in a homogeneous stream is shown. Results of a control example calculation in the MathCad environment are presented.

*spherical body, flexible cables, balance, boundary problem, calculation method*