

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ

для поступающих в аспирантуру по научной специальности

1.1.4 «Теория вероятностей и математическая статистика»

1 Вероятность и ее свойства

Стохастический эксперимент и пространство элементарных исходов. События и операции над ними. Закон стабилизации частот. Статистическое определение вероятности. Классическое определение вероятности.

Вероятность на дискретных пространствах элементарных исходов.

Элементы комбинаторики. Выборки с возвращением и без возвращения. Основные комбинаторные формулы.

Аксиоматика теории вероятностей. Вероятность как счетно-аддитивная мера на σ -алгебре событий. Лемма непрерывности.

Условная вероятность. Независимые события и формула произведения вероятностей.

Разбиения пространства элементарных исходов. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Апостериорная вероятность.

2 Последовательности однородных независимых испытаний с конечным числом исходов

Схема Бернулли. Биномиальное распределение (формула Бернулли). Связь биномиального и гипергеометрического распределений. Теорема Пуассона с оценкой скорости сходимости. Распределение Пуассона.

Нормальное приближение биномиального и полиномиального распределений. Локальная предельная теорема. Теорема Муавра-Лапласа.

3 Случайные величины (СВ)

Типы распределений СВ: дискретные, абсолютно непрерывные, сингулярные, смеси. Плотность распределения.

Функции распределения и их свойства. Преобразования СВ.

Совместное распределение и независимость конечной совокупности СВ. Плотность совместного распределения. Композиция (свёртка) распределений.

Моделирование случайных величин. Квантильные преобразования. Существование последовательностей независимых случайных величин.

Основные законы распределения СВ.

4 Моментные характеристики распределений

Математическое ожидание (МО) как абстрактный интеграл Лебега. Механическая интерпретация. Моменты. Формула замены переменной и интеграл Стильбеса.

Вычисление МО функций от конечного набора СВ. Смешанные моменты. Теорема умножения. Моменты второго порядка: дисперсия, ковариация, коэффициент корреляции. Ковариационная матрица.

Многомерное нормальное распределение. Приведение к каноническому виду. Некоррелируемость и независимость СВ.

Условные распределения. Условные квантильные преобразования. Моделирование последовательностей случайных величин с заданными совместными распределениями.

5 Основные предельные теоремы

Неравенство Чебышева и его обобщения. Законы больших чисел для последовательностей слабо зависимых СВ с конечными дисперсиями.

Нормальная аппроксимация сумм независимых СВ с конечными дисперсиями (центральная предельная теорема).

Оценка скорости сходимости средних в центральной предельной теореме. Метод композиции. Обобщение теоремы Пуассона. Обобщенное распределение Пуассона.

6 Простейшие случайные процессы

Способы задания распределений случайных процессов. Теорема Колмогорова. Процессы с независимыми приращениями. Винеровский процесс.

Марковские процессы со счетным множеством состояний (цепи Маркова). Марковское свойство показательного распределения.

Эргодическая теорема для цепей Маркова. Стационарное распределение.

7 Основные понятия и задачи математической статистики

Основные статистические задачи. Генеральная совокупность. Выборка. Репрезентативность выборки.

Выборочное (эмпирическое) распределение и выборочные характеристики: среднее, дисперсия, моменты. Вариационный ряд и эмпирическая функция распределения. Группировка наблюдений, гистограммы.

Вполне ограниченные классы множеств. Теоремы Гливенко-Кантелли. Сходимость выборочных характеристик к истинным.

Параметрические семейства распределений. Понятие плотности относительно некоторой меры. Классические семейства распределений.

8 Точечные и интервальные оценки параметров генеральной совокупности

Понятие оценки неизвестного параметра. Состоятельные оценки. Несмещенные и асимптотически несмещенные оценки. Принцип подстановки и метод моментов. Асимптотически нормальные оценки (АНО) и их сравнение. АНО для функций от параметров. Теорема о суперпозиции. Выборочные моменты как АНО. Состоятельность АНО.

Функция правдоподобия. Оценки максимального правдоподобия (ОМП). Состоятельность ОМП. Достаточные статистики. Сравнение оценок. Эффективные оценки. Улучшение оценок с помощью достаточных статистик. Полнота и эффективность оценок.

Байесовские и минимаксные оценки. Состоятельность байесовских оценок.

Доверительные интервалы (точные и асимптотические). Принцип построения. Асимптотические доверительные интервалы, построенные с помощью АНО. Доверительные интервалы для классических семейств распределений с одномерным параметром.

Распределения "хи-квадрат" и Стьюдента. Лемма Фишера. Точные доверительные интервалы для параметров нормального распределения.

9 Проверка статистических гипотез

Основные понятия теории проверки конечного числа гипотез: простые и сложные гипотезы, критерии (статистические решающие функции), вероятности ошибок i -го рода. Естественное сравнение критериев.

Байесовские критерии для проверки конечного числа простых гипотез.

Проверка двух простых гипотез. Наиболее мощные критерии. Теорема Неймана – Пирсона. Равномерно наиболее мощные критерии для проверки простых гипотез против сложных альтернатив. Экспоненциальные семейства распределений

Принцип минимального расстояния. Критерии согласия. Непараметрические критерии. Критерии Колмогорова и "омега квадрат". Критерий "хи-квадрат" для проверки простых и сложных гипотез. Теорема Пирсона. Построение критериев согласия с помощью доверительных интервалов.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие. – М.: Юрайт, 2014. – 479 с.
2. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей: учебник для студентов математических специальностей университетов. – М.: Либроком, 2011, - 488 с.
3. Карлов А.М. Теория вероятностей и математическая статистика для экономистов: учебник для вузов. - М.: КНОРУС, 2011. – 260 с.
4. Попов А.М., Сотников В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник. - М.: Юрайт, 2011. - 440 с.
5. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010. - 552 с.
6. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: учебник для студентов высших технических учебных заведений. - М.: КНОРУС, 2010, - 658 с.

Дополнительная литература

7. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие. - Москва : Юрайт, 2014. - 404 с.
8. Миллер Б.М., Панков А.Р. Теория случайных процессов: учебник. - М.: Физматлит, 2002. – 318 с.
9. Кобзарь, А.И. Прикладная математическая статистика: учебник. – М.: Физматлит, 2006. – 816 с.
10. Сикан А.В. Методы статистической обработки гидрометеорологической информации: учебник. - Санкт-Петербург: Изд-во РГГМУ, 2007. – 279 с.
11. Наумов В.А. Методы обработки гидрологической информации: учебное пособие. – Калининград: Изд-во ФГБОУ ВПО «КГТУ», 2015. – 91 с.
12. Наумов В.А. Прикладная математика: учебное пособие по решению профессиональных задач в среде Mathcad. – Калининград: Изд-во ФГБОУ ВПО «КГТУ», 2014. – 144 с.