ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО РЫБОЛОВСТВУ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Калининградский государственный технический университет»

Балтийская государственная академия рыбопромыслового флота

Е.И. Короткая

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
В РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧ

ЧАСТЬ 18

КОЛЕБАНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Сборник задач
для курсантов и студентов
инженерных специальностей
всех форм обучения

Калининград
Издательство БГАРФ
2018

УДК 513.3

Короткая, Е.И. **Теоретическая механика в решениях задач. Часть 18. Колебания материальной точки:** сборник задач / Е.И. Короткая. – Калининград: Изд-во БГАРФ, 2018. – 111 с.

Сборник задач (часть 18) рассмотрен и одобрен на заседании кафедры «Инженерная механика» 31 октября 2017 года, протокол № 2.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Балтийской государственной академии рыбопромыслового флота.

Рецензенты: ***Малыгина Е.С.,*** канд. физ.-мат. наук, доцент Института физико-математических наук и информационных технологий БФУ им. И. Канта;
Топчий Б.Е., канд. техн. наук, доцент кафедры «Инженерная механика» БГАРФ.

© БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ», 2018

БГАРФ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сборник задач «Теоретическая механика в решениях задач» является результатом многолетней преподавательской деятельности его автора в БГАРФ и предназначен для курсантов и студентов инженерных специальностей, обучающихся в Балтийской государственной академии рыбопромыслового флота для углубленного изучения курса теоретической механики.

В связи с большим объемом материала, а также для удобства пользования, сборник задач разделен на части, которые содержат краткие теоретические основы различных разделов курса теоретической механики и примеры решения задач, относящихся к этим разделам.

Восемнадцатая часть настоящего сборника задач рассматривает раздел «Колебания материальной точки».

БГАРФ

18. Колебания материальной точки

18.1. Теоретические основы

Свободные колебания материальной точки

Пусть на точку действует упругая или квазиупругая сила, т. е. сила, стремящаяся вернуть точку в положение равновесия и по величине пропорциональная отклонению точки от этого положения. Если движение точки происходит вдоль оси Ox, а O – положение равновесия, то

$$F_x = -cx,$$

где c – коэффициент жесткости (упругости).

Дифференциальное уравнение движения точки в этом случае имеет вид

$$m\ddot{x} = -cx \quad \text{или} \quad \ddot{x} + k^2 x = 0,$$

где $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$.

Общим решением этого уравнения будет

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt = A\sin(kt + \beta),$$

где C_1 и C_2 (или A и β) – произвольные постоянные, определяемые по начальным условиям движения;

A – амплитуда колебания; β – начальная фаза;

k – круговая частота.

Период колебания определяется формулой

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}.$$

Колебания точки в этом случае являются незатухающими и гармоническими.

Если, кроме упругой (квазиупругой) силы, на точку действует сила сопротивления среды, пропорциональная первой степени скорости и направленная противоположно скорости, т. е.

$$R_x = -\alpha\dot{x},$$

то дифференциальное уравнение движения точки

$$m\ddot{x} = -cx - \alpha\dot{x} \quad \text{или} \quad \ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0, \quad \text{где} \quad n = \frac{\alpha}{2m}.$$

При решении этого дифференциального уравнения возможны три случая.

Случай 1. $n < k$ («малое» сопротивление среды). Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$x = Ae^{-nt}\sin(k_1 t + \beta),$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$,

а A и β – произвольные постоянные, определяемые по начальным условиям.

Движение точки в этом случае носит характер затухающего колебания с условным периодом (промежуток времени между двумя последующими наибольшими отклонениями точки в одну сторону)

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

Величина $e^{-\frac{nT_1}{2}}$ характеризует отношение величин двух последовательных экстремальных отклонений (в разные стороны) и называется декрементом колебаний, а

$\lambda = \dfrac{nT_1}{2}$ – логарифмическим декрементом колебаний.

Случай 2. $n > k$ («большое» сопротивление среды). Общим решением дифференциального уравнения будет

$$x = C_1 e^{-(n+k_2)t} + C_2 e^{-(n-k_2)t} = e^{-nt}(C_1 e^{-k_2 t} + C_1 e^{k_2 t}) =$$
$$= Ae^{-nt}\, sh(k_2 t + \beta),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, а

$$k_2 = \sqrt{n^2 - k^2}.$$

В этом случае точка совершает апериодическое затухающее движение, т. е.

$$\lim_{t\to\infty} x = 0.$$

Случай 3. $n = k$ («предельный» случай). Общее решение уравнения примет вид

$$x = e^{-nt}(C_1 t + C_2),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

В данном случае также имеет место апериодическое затухающее движение.

Вынужденные колебания материальной точки

Если, кроме квазиупругой силы и силы сопротивления, на точку действует внешняя сила, зависящая от времени, – так называемая возмущающая сила Q, проекция которой на ось x есть

$$Q_x = H\sin pt,$$

где H – амплитуда силы (ее наибольшее значение); p – круговая частота силы, то дифференциальным уравнением движения точки будет

$$m\ddot{x} = -cx - \alpha\dot{x} + H\sin pt \quad \text{или} \quad \ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h\sin pt,$$

где $h = \dfrac{H}{m}$.

Общее решение этого дифференциального уравнения имеет вид $x = x_1 + x_2$,

где x_1 – общее решение однородного дифференциального уравнения; x_2 – частное решение уравнения, которое можно получить в виде

$$x_2 = A\sin(pt - \delta),$$

где $A = \dfrac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}$, $\qquad \operatorname{tg}\delta = \dfrac{2np}{k^2 - p^2}$.

Частное решение x_2 называют вынужденным колебанием.

Если $n \neq 0$ (т. е. имеет место сопротивление среды), то $x_1 \to 0$ при $t \to \infty$, и поэтому интерес представляют только вынужденные колебания.

Если $n = 0$, то

$$A = \frac{h}{\left|k^2 - p^2\right|}, \qquad x_2 = \frac{h}{\left|k^2 - p^2\right|}\sin pt$$

и $x = A\sin(kt + \beta) + \dfrac{h}{\left|k^2 - p^2\right|}\sin pt$.

Если $p = k$, т. е. частота возмущающей силы совпадает с частотой собственных незатухающих колебаний, то наступает явление резонанса. В этом случае при отсутствии сопротивления

$$x_2 = -\frac{ht}{2k}\cos pt,$$

т. е. происходит нарастание амплитуды.

При наличии сопротивления при условии резонанса ($p = k$) уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$x_2 = -\frac{h}{2np}\cos pt.$$

При фиксированных h и n максимум амплитуды вынужденных колебаний имеет место при

$$p_1 = k\sqrt{1 - 2\frac{n^2}{k^2}}.$$

Если $\frac{n}{k} << 1$, то при $p = k$ амплитуда близка к максимальной.

18.2. Задачи

ЗАДАЧА 18.1 (32.1). Пружина AB, закрепленная одним концом в точке A, такова, что для удлинения ее на 1 м необходимо приложить в точке B при статической нагрузке силу 19,6 Н. В некоторый момент к нижнему концу B недеформированной пружины подвешивают гирю C массой 0,1 кг и отпускают ее без начальной скорости. Пренебрегая массой пружины, написать уравнение дальнейшего движения гири и указать амплитуду и период ее колебаний, отнеся движение к оси, проведенной вертикально вниз из положения статического равновесия гири.

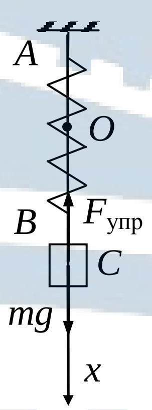


Рис. 18.1

Решение

Начало координат (точка O) принимаем в положении статического равновесия груза.

Дифференциальное уравнение движения груза

$$m\ddot{x} = mg - F_{упр}.$$

Сила упругости пружины

$$F_{упр} = c\lambda = c(\lambda_{ст} + x),$$

где $\lambda_{ст}$ определяется из уравнения в положении равновесия груза

$$mg - c\lambda_{ст} = 0,$$

$$\lambda_{ст} = \frac{mg}{c} = \frac{0{,}1 \cdot 9{,}81}{19{,}6} = 0{,}05 \text{ м}.$$

С учетом этого уравнение движения груза принимает вид

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0.$$

Это линейное дифференциальное уравнение описывает колебательное движение груза.

Решение этого уравнения

$$x = A\sin(kt + \alpha),$$

где $k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{19{,}6}{0{,}1}} = 14 \text{ с}^{-1}$ – круговая частота колебаний.

Начальные условия: при $t = 0$

$x_0 = -\lambda_{ст}$, $\dot{x}_0 = 0$.

Подставляя начальные условия в выражения для координаты $x = A\sin(kt + \alpha)$ и скорости точки

$\dot{x} = Ak\cos(kt + \alpha)$, получим $A\sin\alpha = -\frac{mg}{c}$, $0 = Ak\cos\alpha$,

откуда $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $A = -\frac{mg}{c} = -0{,}05$

и $x = -\frac{mg}{c}\sin(\sqrt{\frac{c}{m}}t + \frac{\pi}{2}) = -0{,}05\sin 14t$.

Амплитуда колебаний $A = 0{,}05$ м и период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} = 0{,}45 \text{ с}.$$

ЗАДАЧА 18.2 (32.2). При равномерном спуске груза массой m = 2 т со скоростью v = 5 м/с произошла неожиданная задержка верхнего конца троса, на котором опускался груз, из-за защемления троса в обойме блока. Пренебрегая массой троса, определить его наибольшее натяжение при последующих колебаниях груза, если коэффициент жесткости троса $4{\cdot}10^6$ Н/м.

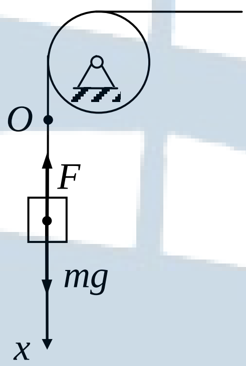


Рис. 18.2

Решение

Начало координат принимаем в положении груза в момент задержки верхнего конца троса, что совпадает с положением равновесия, так как движение было равномерным.

Дифференциальное уравнение движения груза

$$m\ddot{x} = mg - F\,.$$

Сила упругости пружины

$$F = c\lambda = c(\lambda_{\text{ст}} + x) = c(\frac{mg}{c} + x),$$

где $\lambda_{\text{ст}}$ определяется из уравнения в положении равновесия груза

$$mg - c\lambda_{\text{ст}} = 0;\ \ \lambda_{\text{ст}} = \frac{mg}{c}.$$

С учетом этого уравнение движения груза принимает вид

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0.$$

Это линейное дифференциальное уравнение описывает колебательное движение груза.

Решение этого уравнения

$$x = A\sin(kt + \alpha),$$

где $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{4\cdot10^6}{4\cdot10^3}} = 44{,}7$ с$^{-1}$– круговая частота колебаний.

Начальные условия: при $t = 0$

$x_0 = -\lambda_{ст}$, $\qquad \dot{x}_0 = v$.

Подставляя начальные условия в выражения для координаты $x = A\sin(kt + \alpha)$ и скорости точки $\dot{x} = Ak\cos(kt + \alpha)$,

получим $A\sin\alpha = -\dfrac{mg}{c}$, $v = Ak\cos\alpha$,

откуда $\alpha = 0$ и $A = \dfrac{v}{k} = \dfrac{5}{44,7} = 0,112$ м и $x = 0,112\sin 44,7t$.

Сила натяжения троса

$$F = c\left(\frac{mg}{c} + A\sin kt\right).$$

$$F_{\max} = c\left(\frac{mg}{c} + A\right) = mg + cA =$$

$$= 2000 \cdot 9,81 + 4 \cdot 10^6 \cdot 0,112 = 467000 \text{ Н}.$$

ЗАДАЧА 18.3 (32.3). Определить наибольшее натяжение троса в предыдущей задаче, если между грузом и тросом введена упругая пружина с коэффициентом жесткости $c_1 = 4 \cdot 10^5$ Н/м.

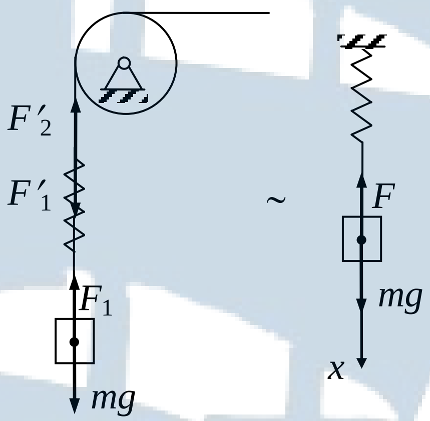


Рис. 18.3

Решение

Заменим систему «груз + пружина + трос» эквивалентной «груз + пружина». Коэффициент жесткости новой пружины c, коэффициенты жесткости исходной пружины и троса c_1 и c_2, соответственно. Так как пружина и трос невесомые, то $F_1 = F_1' = F_2'$. Сила упругости новой пружины $F = c\lambda$, сила упругости исходной пружины $F_1 = c_1\lambda_1$, сила натяжения троса $F_2' = c_2\lambda_2$.

Так как упругие элементы соединены последовательно, то жесткость эквивалентной пружины $c = \dfrac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$.

Дифференциальное уравнение движения груза $\ddot{x} + cx = 0$.

Решение этого уравнения $x = A\sin(kt + \alpha)$,

где $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{c_1 c_2}{m(c_1 + c_2)}}$, $\alpha = 0$, $A = \dfrac{v}{\sqrt{c_1 c_2}} \sqrt{m(c_1 + c_2)}$.

Сила натяжения троса

$$F = c\left(\frac{mg}{c} + A\sin kt\right).$$

$$F_{\max} = mg + cA = mg + v\sqrt{\frac{mc_1 c_2}{c_1 + c_2}} =$$

$$= 2000 \cdot 9{,}81 + 5\sqrt{\frac{2000 \cdot 4 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^6}{4 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^6}} = 154000 \text{ Н}.$$

ЗАДАЧА 18.4 (32.4). Груз Q, падая с высоты h = 1 м без начальной скорости, ударяется об упругую горизонтальную балку в ее середине; концы балки закреплены. Написать уравнение дальнейшего движения груза на балке, отнеся движение к оси, проведенной вертикально вниз из положения статического равновесия груза на балке, если статический прогиб балки в ее середине при указанной нагрузке равен 0,5 см; массой балки пренебречь.

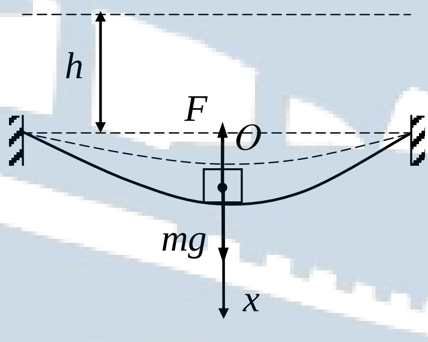


Рис. 18.4

Решение

Сила упругости балки $F = c\lambda$.

Коэффициент жесткости балки $c = \dfrac{mg}{\lambda_{ст}}$.

В положении равновесия $x = 0$, поэтому $F = c(\lambda_{\text{ст}} + x)$ и дифференциальное уравнение принимает вид $m\ddot{x} + \dfrac{mg}{\lambda_{\text{ст}}}x = 0$.

Решение этого уравнения $x = A\sin(kt + \alpha) = C_1\cos kt + C_2\sin kt$,

где $k = \sqrt{\dfrac{g}{\lambda_{\text{ст}}}} = \sqrt{\dfrac{9{,}81}{0{,}005}} = 44{,}3\,\text{с}^{-1}$.

Начальные условия: при $t = 0$

$x_0 = -\lambda_{\text{ст}} = 0{,}005$ м; $\dot{x}_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 1} = 4{,}43$ м/с.

Скорость груза $\dot{x} = -C_1k\sin kt + C_2k\cos kt$.

Из начальных условий получим

$0{,}005 = C_1$,

$4{,}43 = C_2k$.

Отсюда $C_1 = -0{,}005$, $C_2 = 0{,}1$.

Искомый закон движения $x = -0{,}005\cos 44{,}3t + 0{,}1\sin 44{,}3t$.

ЗАДАЧА 18.5 (32.5). На каждую рессору вагона приходится нагрузка P Н; под этой нагрузкой рессора при равновесии прогибается на 5 см. Определить период T собственных колебаний вагона на рессорах. Упругое сопротивление рессоры пропорционально стреле ее прогиба.

Решение

Период собственных колебаний вагона на рессорах $T = \dfrac{2\pi}{k}$.

Круговая частота колебаний $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$. Коэффициент жесткости $c = \dfrac{mg}{\lambda_{\text{ст}}}$. Поэтому $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\lambda_{\text{ст}}}{g}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{0{,}05}{9{,}81}} = 0{,}45\,\text{с}$.

ЗАДАЧА 18.6 (32.6) Определить период свободных колебаний фундамента машины, поставленного на упругий грунт, если масса фундамента с машиной $M = 90$ т, площадь подошвы фундамента $S = 15$ м^2, коэффициент жесткости грунта $c = \lambda S$, где $\lambda = 30$ Н/см^3 – так называемая удельная жесткость грунта.

Решение

Период собственных колебаний фундамента машины

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\lambda S}} = 2\pi\sqrt{\frac{90000}{30\cdot 10^6\cdot 15}} = 0{,}089 \text{ с.}$$

ЗАДАЧА 18.7 (32.7). Найти период свободных вертикальных колебаний корабля на спокойной воде, если масса корабля M т, площадь его горизонтальной проекции S м^2. Плотность воды $\rho = 1$ т/м^3. Силами, обусловленными вязкостью воды, пренебречь.

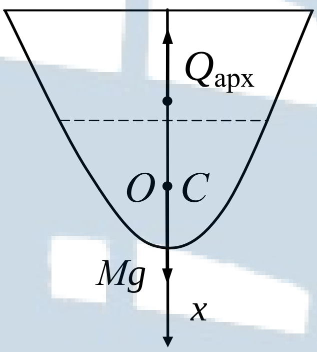


Рис. 18.7

Решение

Ось x направлена вниз и координата отсчитывается от положения центра масс корабля C в равновесии. При увеличении координаты на x (опускание корабля) вытесненный объем воды увеличится на Sx (и наоборот).

Сила Архимеда, приложенная к центру масс вытесненного объема воды, равна $Q_{\text{арх}}(x) = Q_{\text{арх}}(0) + \rho g S x$, где $Q_{\text{арх}}(0)$ уравновешивает вес корабля Mg.

Дифференциальное уравнение движения корабля

$$M\ddot{x} = Mg - Q_{\text{арх}}(0) - \rho g S x \quad \text{или} \quad \ddot{x} + \frac{\rho g S}{M}x = 0.$$

Круговая частота колебаний $k = \sqrt{\dfrac{\rho g S}{M}}$.

Период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\dfrac{M}{\rho g S}}$.

ЗАДАЧА 18.8 (32.8). В условиях предыдущей задачи найти уравнения движения корабля, если он был спущен на воду с нулевой вертикальной скоростью.

Решение

Дифференциальное уравнение движения корабля (центра масс) $\ddot{x}+\dfrac{\rho g S}{M}x=0$.

Решение этого уравнения $x=A\sin(kt+\alpha)$.

Начальные условия: при $t = 0$

$x_0=-\dfrac{M}{\rho S}$; $\dot{x}_0=0$, так как $Mg=Q_{\text{арх}}(0)$, где $Q_{\text{арх}}(0)=\rho g S h$.

Поэтому $x_0=A\sin\alpha$ и $0=Ak\cos\alpha$.

Отсюда $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ и $A=x_0=-\dfrac{M}{\rho S}$.

Искомый закон движения

$$x=-\frac{M}{\rho S}\sin(kt+\frac{\pi}{2})=-\frac{M}{\rho S}\cos\sqrt{\frac{\rho g S}{M}}t.$$

ЗАДАЧА 18.9 (32.9). Груз, вес которого равен P Н, подвешен на упругой нити к неподвижной точке. Выведенный из положения равновесия, груз начинает совершать колебания. Выразить длину нити x в функции времени и найти, какому условию должна удовлетворять начальная длина ее x_0, чтобы во время движения гири нить оставалась натянутой. Натяжение нити пропорционально удлинению; длина ее в нерастянутом состоянии равна l; от действия статической нагрузки, равной q Н, нить удлиняется на 1 см. Начальная скорость груза равна нулю.

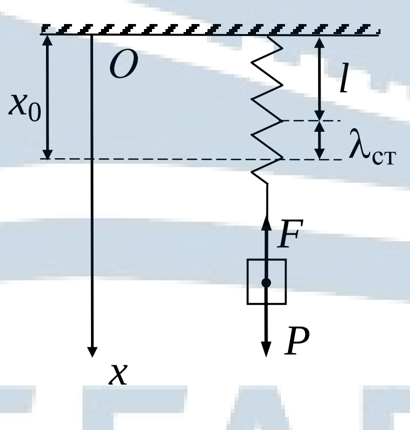


Рис. 18.9

Решение

Дифференциальное уравнение движения стержня

$m\ddot{x} = P - F$, где $m = \dfrac{P}{g}$; сила натяжения нити $F = c\lambda = c(x-l)$;

коэффициент упругости нити $c = q \cdot 10^2$.

С учетом этого $\ddot{x} + \dfrac{10^2 qg}{P} x = g + \dfrac{10^2 lg}{P}$.

Решение этого уравнения

$x = x_{OO} + x_{чр} = A\sin(kt + \alpha) + \dfrac{P}{10^2 q} + l$, где $k = 10\sqrt{\dfrac{qg}{P}}$.

Начальные условия

при $t = 0$ $\qquad x(0) = x_0$; $\qquad \dot{x}(0) = 0$.

Отсюда получим $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$; $A = x_0 - l - \dfrac{P}{10^2 q}$.

Длина нити $x = l + \dfrac{P}{10^2 q} + \left(x_0 - l - \dfrac{P}{10^2 q} \right) \cos 10\sqrt{\dfrac{qg}{P}} t$ м

или $x = l + \dfrac{P}{q} + \left(x_0 - l - \dfrac{P}{q} \right) \cos\sqrt{\dfrac{qg}{P}} t$ см.

Выясним, при каких значениях x_0 нить остается натянутой при движении гири. Решим неравенство

$$l + \frac{P}{q} + \left(x_0 - l - \frac{P}{q} \right) \cos\sqrt{\frac{qg}{P}} t \ge l \qquad \Rightarrow$$

$$\left(x_0 - l - \frac{P}{q} \right) \cos\sqrt{\frac{qg}{P}} t \ge -\frac{P}{q}.$$

1) $x_0 \ge l + \dfrac{P}{q}$.

Тогда $\left(x_0 - l - \dfrac{P}{q} \right)(-1) \ge -\dfrac{P}{q}$, $\left(x_0 - l - \dfrac{P}{q} \right) \le \dfrac{P}{q}$, $\quad x_0 \le l + \dfrac{2P}{q}$.

Итак, в ***первом случае*** $\quad l + \dfrac{P}{q} \le x_0 \le l + \dfrac{2P}{q}$.

2) $x_0 < l + \dfrac{P}{q}$.

Тогда $\left(x_0 - l - \dfrac{P}{q}\right)\cdot 1 \geq -\dfrac{P}{q}, \quad x_0 \geq l$.

Во ***втором случае*** $l \leq x_0 \leq l + \dfrac{P}{q}$.

Объединяя оба случая, получим условие для начальной длины x_0:

$$l \leq x_0 \leq l + \frac{2P}{q}.$$

ЗАДАЧА 18.10 (32.10). На два вращающихся в противоположные стороны, указанные на рис. 18.10, цилиндрических шкива одинакового радиуса свободно положен однородный стержень; центры шкивов O_1 и O_2 находятся на горизонтальной прямой O_1O_2; расстояние $O_1O_2 = 2l$. Стержень приводится в движение силами трения, развивающимися в точках касания его со шкивами; эти силы пропорциональны давлению стержня на шкив, причем коэффициент пропорциональности (коэффициент трения) равен f. 1) Определить движение стержня после того, как мы сдвинем его из положения симметрии на $x0$ при $v_0 = 0$. 2) Найти коэффициент трения f, зная, что период колебаний T стержня при $l = 25$ см равен 2 с.

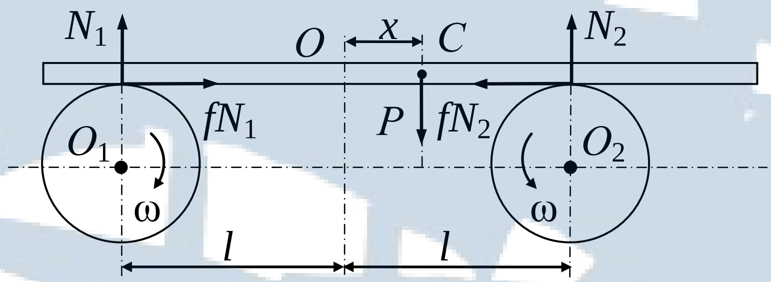


Рис. 18.10

Решение

Дифференциальное уравнение движения стержня

$$m\ddot{x} = f(N_1 - N_2).$$

Найдем реакции.

$$\sum M_{O_1} = 0, \qquad -(l + x)P + 2lN_2 = 0,$$

$$\sum M_{O_2} = 0, \qquad (l - x)P - 2lN_1 = 0,$$

откуда $N_1 = \frac{l+x}{2l}P$, $N_2 = \frac{l-x}{2l}P$.

Подставляя полученные выражения в уравнение движения, получим $\ddot{x} = -fg\frac{x}{l}$.

Обозначая $k = \frac{fg}{l}$, имеем $\ddot{x} + kx = 0$.

Решение этого уравнения $x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt$.

Постоянные интегрирования найдем из начальных условий при t = 0 $x(0) = x_0$; $\dot{x}(0) = 0$,

откуда $C_1 = 0$; $C_2 = x_0$ и $x = x_0 \cos kt = x_0 \cos\sqrt{\frac{fg}{l}}t$.

Период колебаний $T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{fg}}$,

откуда искомый коэффициент трения $f = \frac{4\pi^2 l}{gT^2} = \frac{4\cdot\pi^2\cdot 0,25}{9,81\cdot 2} = 0,25$.

ЗАДАЧА 18.11 (32.11). К одной и той же пружине подвесили сначала груз весом P, а во второй раз груз весом $3P$. Определить, во сколько раз изменится период колебаний. Зная коэффициент жесткости пружины c, а также начальные условия (грузы подвешивались к концу нерастянутой пружины и отпускались без начальной скорости), найти уравнения движения грузов.

Решение

Периоды колебаний грузов

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{c}} = 2\pi\sqrt{\frac{P}{gc}}, \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{c}} = 2\pi\sqrt{\frac{3P}{gc}}.$$

Отсюда $\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{3}$.

Законы движения грузов с учетом заданных начальных условий при $t = 0$ $x_0 = -\lambda_{ст} = -\frac{mg}{c}$; $\dot{x}_0 = 0$.

$$x_1 = -\frac{m_1 g}{c}\sin\left(\sqrt{\frac{c}{m_1}} + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{P}{c}\cos\sqrt{\frac{cg}{P}}t\,;$$

$$x_2 = -\frac{m_{21} g}{c}\sin\left(\sqrt{\frac{c}{m_2}} + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3P}{c}\cos\sqrt{\frac{cg}{3P}}t\,.$$

ЗАДАЧА 18.12 (32.12). К пружине жесткости c = 2 кН/м сначала подвесили груз массой 6 кг, а затем заменили его грузом вдвое большей массой. Определить частоты и периоды колебаний грузов.

Решение

Частоты колебаний грузов

$$k_1 = \sqrt{\frac{c}{m_1}} = \sqrt{\frac{2000}{6}} = 18{,}3\ \text{с}^{-1};\ \ k_2 = \sqrt{\frac{c}{m_2}} = \sqrt{\frac{2000}{12}} = 12{,}9\ \text{с}^{-1}.$$

Периоды колебаний грузов

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{18{,}3} = 0{,}344\ \text{с};\quad T_2 = \frac{2\pi}{k_2} = \frac{2\pi}{12{,}9} = 0{,}490\ \text{с}.$$

ЗАДАЧА 18.13 (32.13). К пружине, коэффициент жесткости которой равен c = 19,6 Н/м, были подвешены два груза с массами m_1 = 0,5 кг и m_2 = 0,8 кг. Система находилась в покое в положении статического равновесия, когда груз m_2 убрали. Найти уравнение движения, частоту, круговую частоту и период колебаний оставшегося груза.

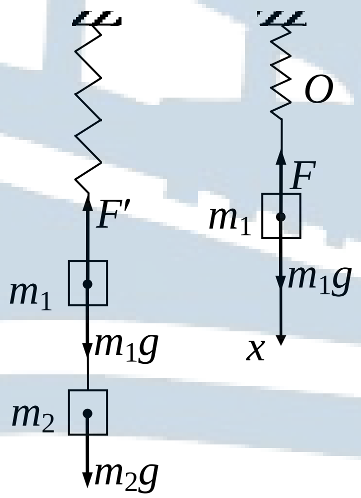


Рис. 18.13

Решение

Для определения деформации пружины в момент снятия второго груза составим уравнение равновесия системы

$$(m_1+m_2)g-c\Delta=0, \ \Rightarrow$$

$$\Delta=\frac{(m_1+m_2)g}{c}=\frac{(0,5+0,8)\cdot 9,81}{19,6}=0,65 \text{ м.}$$

Движение груза массой m_1 после снятия второго груза определяется дифференциальным уравнением $\ddot{x}+\dfrac{c}{m_1}x=0$.

Начало координат (точка O) принято в положении равновесия груза.

Частота колебаний $k=\sqrt{\dfrac{c}{m_1}}=6,26 \text{ с}^{-1}$.

Решение уравнения $x=A\sin\left(\sqrt{\dfrac{c}{m_1}}t+\alpha\right)$.

Начальные условия

при $t=0$ $x_0=\Delta-\lambda_{\text{ст}}=\dfrac{(m_1+m_2)g}{c}-\dfrac{m_1g}{c}=\dfrac{m_2g}{c}$; $\dot{x}_0=0$,

откуда $\dfrac{m_2g}{c}=A\sin\alpha$; $0=A\sqrt{\dfrac{c}{m_1}}\cos\alpha$

и $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$; $A=\dfrac{m_2g}{c}=\dfrac{0,8\cdot 9,81}{19,6}=0,4$.

Искомый закон движения $x=0,4\cos 6,26t$.

Период колебаний груза $T=\dfrac{2\pi}{k}=\dfrac{6,28}{6,26}\approx 1$ с.

Частота колебаний $f=\dfrac{1}{T}=1$ Гц.

ЗАДАЧА 18.14 (32.14). Груз массой m_1 = 2 кг, подвешенный к пружине, коэффициент жесткости которой c = 98 Н/м, находится в равновесии. В некоторый момент к грузу m_1 добавили груз m_2 = 0,8 кг. Определить уравнение движения и период колебаний двух грузов.

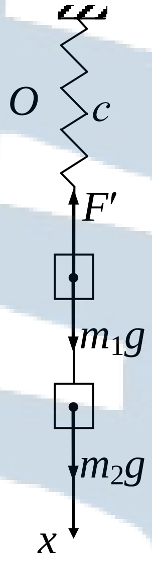


Рис. 18.14

Решение

Начальные условия движения

$$x_0 = -\lambda_2 = -\frac{m_2 g}{c} = -\frac{0{,}8\cdot 9{,}81}{98} = -0{,}08 \text{ м}; \qquad \dot{x}_0 = 0.$$

Дифференциальное уравнение движения системы грузов

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + cx = 0 \qquad \text{или} \qquad \ddot{x} + k^2 x = 0,$$

где $k = \sqrt{\dfrac{c}{m_1 + m_2}} = \sqrt{\dfrac{98}{2 + 0{,}8}} = 5{,}92 \text{ с}^{-1}$.

Начало координат (точка O) принято в положении равновесия груза.

Решение уравнения $x = A\sin\left(\sqrt{\dfrac{c}{m_1}}t + \alpha\right)$.

Используя начальные условия, получим $x = -0{,}08\cos 5{,}92t$.

Период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{6{,}28}{5{,}92} = 1{,}06$ с.

ЗАДАЧА 18.15 (32.15). Груз подвесили сначала к пружине с жесткостью c_1 = 2 кН/м, а затем к пружине с жесткостью c_2 = 4 кН/м. Найти отношение частот и отношение периодов колебаний груза в этих двух случаях.

Решение

$$k_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m}}, \qquad k_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m}}, \qquad \frac{k_1}{k_2} = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707;$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1}, \qquad T_2 = \frac{2\pi}{k_2}, \qquad \frac{T_1}{T_2} = \frac{k_2}{k_1} = \sqrt{2} = 1{,}414.$$

ЗАДАЧА 18.16 (32.16). Тело массой m находится на наклонной плоскости, составляющей угол α с вертикалью. К телу прикреплена пружина, жесткость которой c. Пружина параллельна наклонной плоскости. Найти уравнение движения тела, если в начальный момент оно было прикреплено к концу нерастянутой пружины и ему была сообщена начальная скорость v_0, направленная вниз по наклонной плоскости. Начало координат взять в положении статического равновесия.

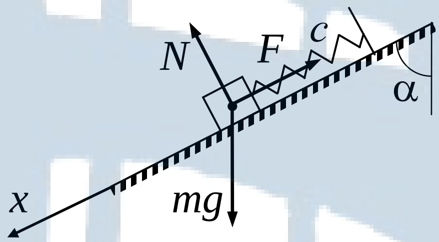


Рис. 18.16

Решение

Координату x отсчитываем от положения равновесия груза, в котором статическое удлинение пружины $\lambda_0 = \dfrac{mg\cos\alpha}{c}$.

Дифференциальное уравнение движения $m\ddot{x} + cx = 0$,

где $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$.

Начальные условия движения

$$x_0 = -\lambda_0 = -\frac{mg\cos\alpha}{c}; \qquad \dot{x}_0 = v_0.$$

Окончательно, $x = \dfrac{v_0}{k}\sin kt - \dfrac{mg\cos\alpha}{c}\cos kt$.

ЗАДАЧА 18.17 (32.17). На гладкой плоскости, наклоненной к горизонту под углом α находится прикрепленный к пружине груз весом P. Статическое удлинение пружины равно f. Определить колебания груза, если в начальный момент пружина была растянута из ненапряженного состояния на длину, равную $3f$, и груз отпущен без начальной скорости.

Решение

Рисунок к задаче аналогичен предыдущему рисунку.

Из условия равновесия имеем $cf = mg\sin\alpha$,

откуда $c = \dfrac{mg\sin\alpha}{f}$.

Дифференциальное уравнение движения $m\ddot{x} + cx = 0$,

где x отсчитывается от положения равновесия и $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{g\sin\alpha}{f}}$.

Начальные условия движения $x_0 = 3f - f = 2f$; $\dot{x}_0 = 0$.

Решение уравнения $x = A\sin\left(\sqrt{\dfrac{c}{m}}t + \alpha\right)$.

Используя начальные условия, получим $x = 2f\cos kt$.

ЗАДАЧА 18.18 (32.18). Тело массой M = 12 кг, прикрепленное к концу пружины, совершает гармонические колебания. При помощи секундомера установлено, что тело совершило 100 полных колебаний за 45 с. После этого к концу пружины добавочно прикрепили груз массой M_1 = 6 кг. Определить период колебаний двух грузов на пружине.

Решение

$$k = \sqrt{\frac{c}{M}}, \qquad T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{c}};$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{c}{M + M_1}}, \qquad T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = 2\pi\sqrt{\frac{M + M_1}{c}}.$$

Отсюда $T_1 = T\sqrt{\dfrac{M+M_1}{M}} = 0,45\sqrt{\dfrac{12+6}{12}} = 0,55$ с,

где $T = \dfrac{t}{n} = \dfrac{45}{100} = 0,45$ с.

ЗАДАЧА 18.19 (32.19). В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения одного груза *M* и двух грузов $M + M_1$, если в обоих случаях грузы были подвешены к концу нерастянутой пружины.

Решение

Дифференциальные уравнения движения грузов

$$M\ddot{x} + cx = 0, \qquad (M+M_1)\ddot{x}_1 + cx_1 = 0,$$

где x и x_1 отсчитываются от соответствующих положений равновесия грузов.

Начальные условия движения

$$x_0 = -\frac{Mg}{c}; \qquad \dot{x}_0 = 0; \qquad x_{10} = -\frac{(M+M_1)g}{c}; \qquad \dot{x}_{10} = 0.$$

Для этих начальных условий решения имеют вид

$$x = -\frac{Mg}{c}\cos kt; \qquad x_1 = -\frac{(M+M_1)g}{c}\cos k_1 t,$$

где $k = \sqrt{\dfrac{c}{M}}$; $k_1 = \sqrt{\dfrac{c}{M+M_1}}$,

а жесткость пружины c определяется из условий предыдущей задачи $T = 0,45 = \sqrt{\dfrac{M}{c}}$, Н/м.

Подставляя с, получим $k = 14$ с$^{-1}$; $k_1 = 11,4$ с$^{-1}$ и

$$x = -0,05\cos 14t \text{ м}; \quad x_1 = -0,0753\cos 11,4t \text{ м}.$$

ЗАДАЧА 18.20 (32.20). Груз *M*, подвешенный к неподвижной точке *A* на пружине, совершает малые гармонические колебания в вертикальной плоскости, скользя без трения по дуге окружности, диаметр которой *AB* равен *l*; натуральная длина пружины *a*; жесткость пружины такова, что при действии силы, равной весу груза *M*, она получает удлинение, равное *b*. Определить период *T* колебаний в том случае, когда $l = a + b$; массой пружины пренебречь и считать, что при колебаниях она остается растянутой.

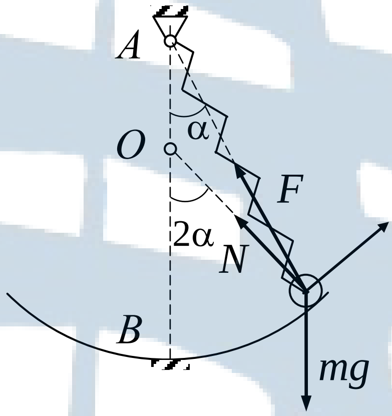


Рис. 18.20

Решение

Уравнение движения точки M в проекции на касательную имеет вид

$$m \cdot OM(2\ddot{\alpha}) = -mg\sin 2\alpha + F\sin\alpha,$$

где $F = c(l\cos\alpha - a)$; $c = \dfrac{mg}{b}$; $l = a + b$; $OM = \dfrac{l}{2}$.

Таким образом,

$$ml\ddot{\alpha} = -mg\sin 2\alpha + \frac{mg}{b}\sin\alpha\left[l\cos\alpha - l + b\right],$$

откуда $\ddot{\alpha} = -\dfrac{g}{l}\sin 2\alpha + \dfrac{g}{lb}\sin\alpha\left[-l(1-\cos\alpha) + b\right]$.

С точностью до малых второго порядка получим

$$\ddot{\alpha} = -\frac{2g}{l}\alpha + \frac{g}{l}\alpha \quad \text{или} \quad \ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha = 0,$$

откуда $k = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ и $T = \dfrac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

ЗАДАЧА 18.21 (32.21). В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения груза M, если в начальный момент $\angle BAM = \varphi_0$ и точке M сообщили начальную скорость v_0, направленную по касательной к окружности вниз.

Решение

Здесь для уравнения, полученного в предыдущей задаче, имеем начальные условия

$$\alpha(0) = \varphi_0; \qquad \dot{\alpha}(0) = -\frac{v_0}{l}.$$

Тогда решение имеет вид

$$\alpha = A\sin kt + B\cos kt = \varphi_0 \cos kt - \frac{v_0}{kl}\sin kt.$$

ЗАДАЧА 18.22 (32.22). Тело E, масса которого равна m, находится на гладкой горизонтальной плоскости. К телу прикреплена пружина жесткости c, второй конец которой прикреплен к шарниру O_1. Длина недеформированной пружины равна l_0; в положении равновесия имеет конечный предварительный натяг, равный $F_0 = c(l - l_0)$, где $l = OO_1$. Учитывая в горизонтальной составляющей упругой силы пружины лишь линейные члены относительно отклонения тела от положения равновесия, определить период малых колебаний тела.

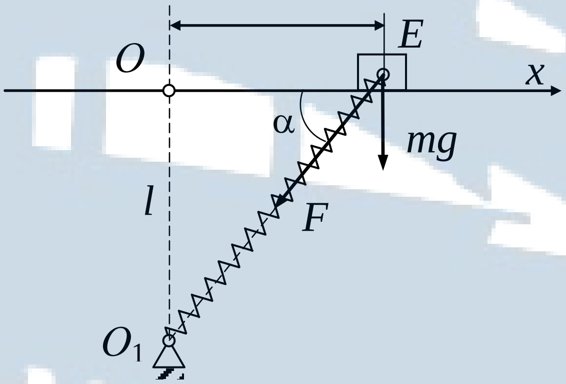


Рис. 18.22

Решение

Уравнение движения тела $m\ddot{x} = -F\cos\alpha$,

где $F = c\left(l - l_0 + \dfrac{l}{\sin\alpha} - l\right) = c\left(\dfrac{l}{\sin\alpha} - l_0\right)$.

С учетом этого $m\ddot{x} = -c(l\operatorname{ctg}\alpha - l_0\cos\alpha)$.

Очевидно $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{x}{l}$; $\quad \cos\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} \approx \dfrac{x}{l}$.

Теперь получим $m\ddot{x} = -c\left(x - l_0 \dfrac{x}{l}\right) = -\left(c\dfrac{l - l_0}{l}\right)x$.

Отсюда $k = \sqrt{\dfrac{c(l - l_0)}{ml}}$ и $T = \dfrac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\dfrac{ml}{c(l - l_0)}}$.

Выразим l_0 через F_0: $l_0 = l - \dfrac{F_0}{c}$.

Тогда $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{ml}{c\left(\dfrac{F_0}{c}\right)}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{ml}{F_0}}$.

ЗАДАЧА 18.23 (32.23). Материальная точка массой m подвешена к концу нерастянутой пружины с коэффициентом жесткости c и отпущена с начальной скоростью v_0, направленной вниз. Найти уравнение движения и период колебаний точки, если в момент времени, когда точка находилась в крайнем нижнем положении, к ней прикладывают силу Q = const, направленную вниз.

Начало координат выбрать в положении статического равновесия, т. е. на расстоянии P/c от конца нерастянутой пружины.

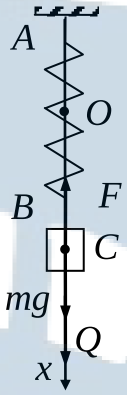


Рис. 18.23

Решение

Уравнение движения тела $m\ddot{x} = -cx$; $x(0) = -\dfrac{mg}{c}$; $\dot{x}(0) = v_0$.

Решение уравнения при этих начальных условиях

$$x = A\sin kt + B\cos kt = \frac{v_0}{k}\sin kt + \frac{mg}{c}\cos kt, \text{ где } k = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

$$\max_t x(t) = \sqrt{\left(\frac{v_0}{k}\right)^2 + \left(\frac{mg}{c}\right)^2} = \sqrt{A^2 + B^2} = \xi_0,$$

причем в этот момент времени $\dot{x}(t) = 0$.

Далее уравнение движения принимает вид

$$m\ddot{x} = -cx + Q; \quad x(0) = \xi_0; \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Решение уравнения при этих начальных условиях

$$x = A_1 \sin kt + B_1 \cos kt + \frac{Q}{c}.$$

С учетом начальных условий $x = \left(\xi_0 - \frac{Q}{c}\right)\cos kt + \frac{Q}{c}$.

Период колебаний $T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$.

ЗАДАЧА 18.24 (32.24). Определить период свободных колебаний груза массой *m*, прикрепленного к двум параллельно включенным пружинам, и коэффициент жесткости пружины, эквивалентной данной двойной пружине, если груз расположен так, что удлинения обеих пружин, обладающих заданными коэффициентами жесткости c_1 и c_2, одинаковы.

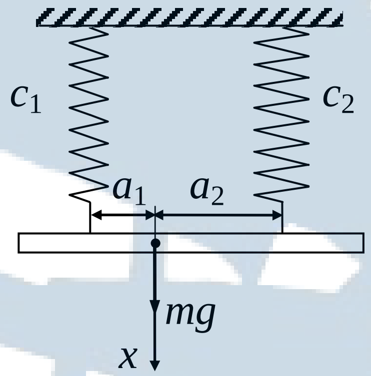


Рис. 18.24

Решение

Поскольку удлинения пружин одинаковы, то моменты их сил упругости равны

$$F_1 a_1 = F_2 a_2; \quad c_1 x a_1 = c_2 x a_2, \quad \text{откуда} \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{c_2}{c_1}.$$

Расчет сводится к расчету эквивалентной пружины с жесткостью $c = c_1 + c_2$, поскольку пружины соединены параллельно.

Период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{c}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{c_1 + c_2}}$.

ЗАДАЧА 18.25 (32.25). В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения груза, если его подвесили к нерастянутым пружинам и сообщили ему начальную скорость v_0, направленную вверх.

Решение

Для уравнения в решении предыдущей задачи, если x отсчитывать от положения равновесия, имеем следующие начальные условия

$$x(0) = -\frac{mg}{c_1 + c_2}; \qquad \dot{x}(0) = -v_0.$$

Тогда решение дифференциального уравнения будет иметь вид

$$x = A\sin kt + B\cos kt = -\frac{v_0}{k}\sin kt - \frac{mg}{c_1 + c_2}\cos kt,$$

где $k = \sqrt{\dfrac{c_1 + c_2}{m}}$.

ЗАДАЧА 18.26 (32.26). Определить период свободных колебаний груза массой m, зажатого между двумя пружинами с разными коэффициентами жесткости c_1 и c_2.

Решение

Расчет сводится к расчету эквивалентной пружины с жесткостью $c = c_1 + c_2$, поскольку пружины соединены параллельно.

Период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{c}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{c_1 + c_2}}$.

ЗАДАЧА 18.27 (32.27). В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения груза, если в положении равновесия ему сообщили скорость v_0, направленную вниз.

Решение

Уравнение движения тела $m\ddot{x} = -cx$,
при начальных условиях $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = v_0$.

Решение уравнения $x = A\sin kt$.

Подставляя начальные условия, получим

$$x = \frac{v_0}{k}\sin kt, \quad \text{где } k = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}.$$

ЗАДАЧА 18.28 (32.28). Определить коэффициент жесткости c пружины, эквивалентной двойной пружине, состоящей из двух последовательно включенных пружин с разными коэффициентами жесткости c_1 и c_2, и указать также период колебаний груза массой m, подвешенного на указанной двойной пружине.

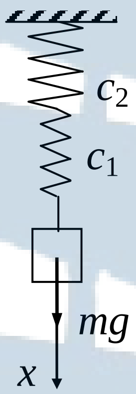


Рис. 18.28

Решение

Расчет сводится к расчету эквивалентной пружины с жесткостью $c = \dfrac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$, поскольку пружины соединены последовательно.

Период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{c}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m(c_1 + c_2)}{c_1 c_2}}$.

ЗАДАЧА 18.29 (32.29). В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения груза, если в начальный момент он находился ниже положения равновесия на расстоянии x_0 и ему сообщили скорость v_0, направленную вверх.

Решение

Уравнение движения тела $m\ddot{x} = -cx$, где $c = \dfrac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$,

при начальных условиях $x(0) = x_0$; $\dot{x}(0) = -v_0$.

Решение уравнения

$$x = A\sin kt + B\cos kt = x_0 \cos kt - \frac{v_0}{k}\sin kt, \text{ где } k = \sqrt{\frac{c_1 c_2}{m(c_1 + c_2)}}.$$

ЗАДАЧА 18.30 (32.30). Определить коэффициент жесткости составной пружины, состоящей из двух последовательно соединенных пружин с разными коэффициентами жесткости c_1 = 9,8 Н/см и c_2 = 29,4 Н/см. Найти период колебаний, амплитуду и уравнения движения груза массой 5 кг, подвешенного к указанной составной пружине, если в начальный момент груз был смещен из положения статического равновесия на 5 см вниз и ему была сообщена начальная скорость 49 см/с, направленная также вниз.

Решение

Уравнение движения тела $m\ddot{x} = -cx$,

где $c = \dfrac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} = \dfrac{9{,}8 \cdot 29{,}4}{9{,}8 + 29{,}4} = 7{,}35$ Н/см,

при начальных условиях $x(0) = 5$ см/с; $\dot{x}(0) = 49$ см/с.

Круговая частота колебаний

$$k = \sqrt{\frac{c_1 c_2}{m(c_1 + c_2)}} = \sqrt{\frac{7{,}35 \cdot 10^2}{5}} = 12{,}1\,\text{с}^{-1}.$$

Решение уравнения

$$x = A\sin kt + B\cos kt = 5\cos 12{,}1t + 4{,}04\sin 12{,}1t.$$

Амплитуда колебаний

$$a = \sqrt{(x_0)^2 + \left(\frac{v_0}{k}\right)^2} = \sqrt{5^2 + \left(\frac{49}{12{,}1}\right)^2} = 6{,}43\,\text{см}.$$

ЗАДАЧА 18.31 (32.31). Тело A, масса которого равна m, может перемещаться по горизонтальной прямой. К телу прикреплена пружина, коэффициент жесткости которой c. Второй конец пружины укреплен в неподвижной точке B. При угле $\alpha = \alpha_0$ пружина не деформирована. Определить частоту и период малых колебаний тела.

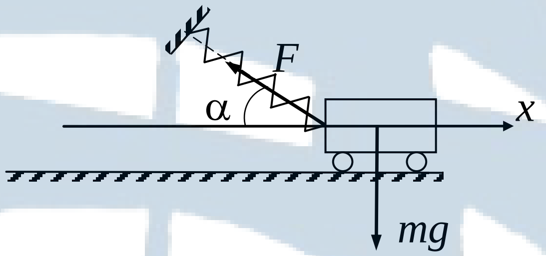


Рис. 18.31

Решение

Дифференциальное уравнение движения тела $m\ddot{x} = -F\cos\alpha_0$.

Сила упругости пружины $F = c\lambda = cx\cos\alpha_0$.

С учетом этого $m\ddot{x} = -cx\cos^2\alpha_0$ или $\ddot{x} + k^2x = 0$,

где $k = \sqrt{\dfrac{c\cos^2\alpha_0}{m}}$.

Период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{c\cos^2\alpha_0}}$.

ЗАДАЧА 18.32 (32.32). Точка A, масса которой равна m, прикреплена пружинами, как указано на рисунке. В исходном положении точка находится в равновесии и все пружины не напряжены. Определить коэффициент жесткости эквивалентной пружины при малых колебаниях точки вдоль оси x в абсолютно гладких направляющих и частоту свободных колебаний точки.

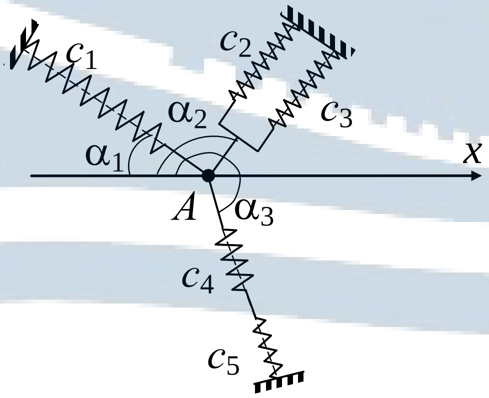


Рис. 18.32

Решение

При перемещении точки A вдоль оси x, имеем:

$\lambda_1 = x\cos\alpha_1$; $\lambda_2 = x\cos\alpha_2$; $\lambda_3 = x\cos\alpha_3$.

Жесткость параллельно соединенных пружин 2 и 3

$c_{12} = c_1 + c_2$.

Жесткость последовательно соединенных пружин 4 и 5

$$c_{45} = \frac{c_4 c_5}{c_4 + c_5}.$$

Уравнение движения точки A по оси x

$$m\ddot{x} = -c_1 x\cos^2\alpha_1 - c_{23} x\cos^2\alpha_2 - c_{45} x\cos^2\alpha_3.$$

Отсюда $c = c_1\cos^2\alpha_1 + c_{23}\cos^2\alpha_2 + c_{45}\cos^2\alpha_3 =$

$$= c_1\cos^2\alpha_1 + (c_2 + c_3)\cos^2\alpha_2 + \frac{c_4 c_5}{c_4 + c_5}\cos^2\alpha_3.$$

ЗАДАЧА 18.33 (32.33). Определить коэффициент жесткости пружины, эквивалентной трем пружинам, показанным на рисунке, при колебаниях точки M в абсолютно гладких направляющих вдоль оси x. Решить ту же задачу, если направляющие расположены вдоль оси y. Определить частоты этих колебаний.

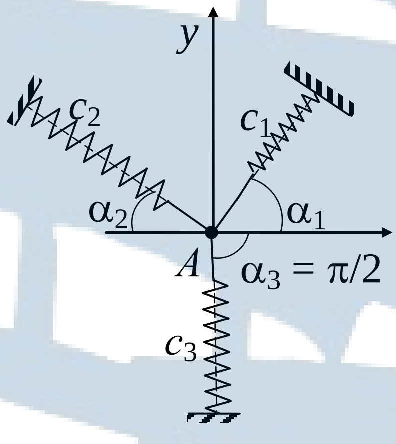


Рис. 18.33

Решение

При перемещении точки A вдоль оси x, имеем:

$\lambda_1 = -x\cos\alpha_1$; $\lambda_2 = x\cos\alpha_2$; $\lambda_3 = x\cos\alpha_3 = 0$.

При перемещении точки A вдоль оси y, имеем:

$\lambda_1 = -y\sin\alpha_1$; $\lambda_2 = -y\sin\alpha_2$; $\lambda_3 = y\sin\alpha_3 = y$.

БГАРФ

Уравнение движения точки A по осям

$$m\ddot{x} = -c_1 x\cos^2\alpha_1 - c_2 x\cos^2\alpha_2;$$

$$m\ddot{y} = -c_1 y\sin^2\alpha_1 - c_2 y\sin^2\alpha_2 - c_3 y.$$

Отсюда получим

$$c_x = c_1\cos^2\alpha_1 + c_2\cos^2\alpha_2;$$

$$c_y = c_1\sin^2\alpha_1 + c_2\sin^2\alpha_2 + c_3.$$

Искомые частоты колебаний

$$k_x = \sqrt{\frac{c_x}{m}}; \qquad k_y = \sqrt{\frac{c_y}{m}}.$$

ЗАДАЧА 18.34 (32.34). Определить коэффициент жесткости эквивалентной пружины, если груз M массой m прикреплен к стержню, массой которого можно пренебречь. Стержень шарнирно закреплен в точке O и прикреплен тремя вертикальными пружинами к фундаменту. Коэффициенты жесткости пружин c_1, c_2, c_3. Пружины прикреплены к стержню на расстояниях a_1, a_2, a_3 от шарнира. Груз M прикреплен к стержню на расстоянии b от шарнира. В положении равновесия стержень горизонтален. Эквивалентная пружина крепится к стержню на расстоянии b от шарнира. Найти частоту малых колебаний груза.

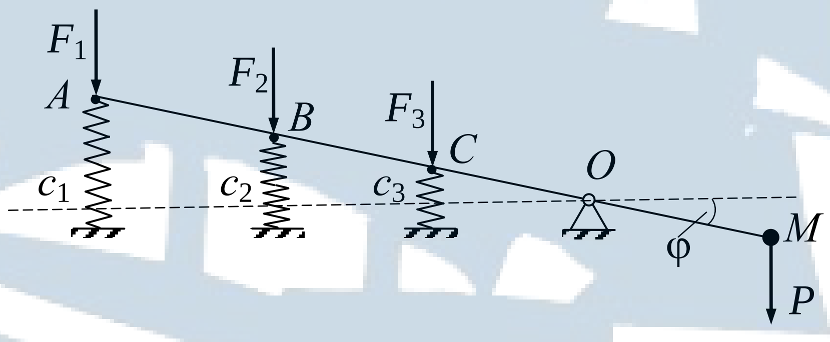


Рис. 18.34

Решение

Повернем балку на малый угол φ по часовой стрелке, приложив к ней силу P. При этом возникнут перемещения

$$\lambda_1 = \varphi \cdot OA = a_1\varphi;$$

$$\lambda_2 = \varphi \cdot OB = a_2\varphi;$$

$$\lambda_3 = \varphi \cdot OC = a_3\varphi$$

и силы упругости

$$F_1 = c_1\lambda_1; \qquad F_2 = c_2\lambda_2; \qquad F_3 = c_3\lambda_3.$$

Эквивалентная пружина жесткостью c, укрепленная на расстоянии $OM = b$ от точки O, должна создавать тот же момент относительно точки O

$$(cb\varphi)\cdot b = F_1a_1 + F_2a_2 + F_3a_3$$

или

$$cb^2\varphi = c_1a_1^2\varphi + c_2a_2^2\varphi + c_3a_3^2\varphi.$$

Теперь $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$, где $c = \dfrac{1}{b^2}(c_1a_1^2 + c_2a_2^2 + c_3a_3^2)$.

ЗАДАЧА 18.35 (32.35). Винтовая пружина состоит из n участков, коэффициенты жесткости которых соответственно равны c_1, c_2, ..., c_n. Определить коэффициент жесткости c однородной пружины, эквивалентной данной, и период свободных колебаний точки, масса которой равна m.

Решение

Пусть под действием силы P деформации участков с жесткостями c_1, …, c_n равны, соответственно, x_1, …, x_n. Жесткость эквивалентной пружины определяется как

$c = \dfrac{P}{x}$, где $x = x_1 + x_1 + \ldots. + x_n$.

Учитывая, что пружина невесомая, получим

$$x_1 = \frac{P}{c_1}, \ldots, \; x_n = \frac{P}{c_n}.$$

Ко всем участкам пружины приложена одна и та же сила P (по третьему закону Ньютона).

Тогда получим $x = \dfrac{P}{c} = \dfrac{P}{c_1} + \dfrac{P}{c_2} + \ldots. + \dfrac{P}{c_n}$.

Отсюда $\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{c_1} + \dfrac{1}{c_2} + \ldots. + \dfrac{1}{c_n} = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{c_k}$.

Период колебаний $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{c}}$.

БГАРФ

ЗАДАЧА 18.36 (32.36). Груз массой 10 кг, лежащий на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости, зажат между двумя пружинами одинаковой жесткости c = 19,6 Н/см. В некоторый момент груз был сдвинут на 4 см от положения равновесия вправо и отпущен без начальной скорости. Найти уравнение движения, период колебаний, а также максимальную скорость груза.

Рис. 18.36

Решение

Пусть начальная деформация пружин (в положении равновесия) равна λ_0 ($\lambda_0 > 0$ – пружины растянуты). Сдвиг на x вправо приведет к деформациям:

1) левой пружины

$\lambda_1 = \lambda_0 + x$, и сила упругости в проекции на ось x $F_1 = -c(\lambda_0 + x)$;

2) правой пружины

$\lambda_2 = \lambda_0 - x$, и сила упругости в проекции на ось x $F_2 = c(\lambda_0 - x)$.

Аналогично рассматривается случай сжатых пружин.

Уравнение движения

$$m\ddot{x} = -c(\lambda_0 + x) + c(\lambda_0 - x),$$

$$m\ddot{x} + 2cx = 0,$$

откуда $k = \sqrt{\dfrac{2c}{m}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 19{,}6 \cdot 10^2}{10}} = 19{,}8\ \text{с}^{-1}$.

При заданных начальных условиях $x(0) = 4$ см, $\dot{x}(0) = 0$ получим

$$x = 4\cos 19{,}8t; \quad T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{19{,}8} = 0{,}317\ \text{с};$$

$$\dot{x}_{\max} = 4 \cdot 19{,}8 = 79{,}2\ \text{см/с}.$$

ЗАДАЧА 18.37 (32.37). Груз P массой m подвешен к стержню AB, который соединен двумя пружинами, с коэффициентами жесткости c_2 и c_3, со стержнем DE. Последний прикреплен к потолку в точке Н пружиной, коэффициент жесткости которой c_1. При колебаниях стержни AB и DE остаются горизонтальными. Определить коэффициент жесткости одной эквивалентной пружины, при которой груз P будет колебаться с той же частотой. Найти период свободных колебаний груза. Массой стержней пренебречь.

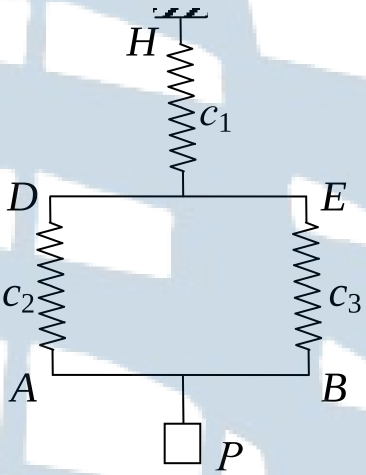


Рис. 18.37

Решение

Заменим сначала параллельно соединенные пружины 2 и 3

$c_{23} = c_2 + c_3$,

затем последовательно соединенные пружины 1 и 23

$$c = \frac{c_1 c_{23}}{c_1 + c_{23}} = \frac{c_1(c_2 + c_3)}{c_1 + c_2 + c_3}.$$

Период колебаний $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{c}}$.

ЗАДАЧА 18.38 (32.38). Определить собственную частоту колебаний груза Q массой m, подвешенного на конце упругой консоли длины l. Пружина, удерживающая груз, имеет жесткость c. Жесткость на конце консоли определяется формулой $c_1 = 3EJ/l^3$ (E – модуль упругости; J – момент инерции). Массой консоли пренебречь.

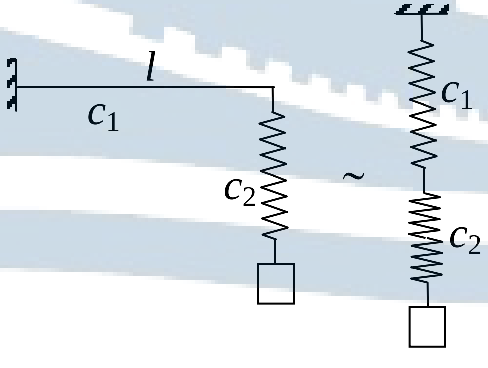


Рис. 18.38

Решение

Заменим консоль эквивалентной пружиной жесткостью $c_1 = 3EJ/l^3$.

Получим две последовательно соединенные пружины с жесткостями c_1 и c_2, а эквивалентная им пружина будет иметь жесткость

$$c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}.$$

Частота колебаний $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$.

ЗАДАЧА 18.39 (32.39). Колебания груза массой M = 10 кг, лежащего на середине упругой балки жесткости c = 20 Н/см, происходят с амплитудой 2 см. Определить величину начальной скорости груза, если в момент времени t = 0 груз находился в положении равновесия.

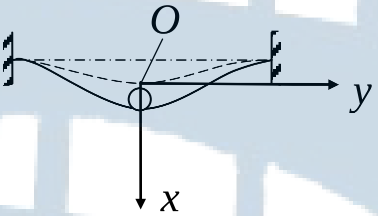


Рис. 18.39

Решение

Если отсчитывать перемещение груза от положения равновесия, то его уравнение движения тела $m\ddot{x} = -\ c$ при начальных условиях $x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = -v_0$.

Решение уравнения

$$x = A\sin kt + B\cos kt = \frac{v_0}{k}\sin kt, \text{ где } k = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

По условию задачи амплитуда колебаний $a = \dfrac{v_0}{k} = 2$, следовательно,

$$v_0 = 2k = 2\sqrt{\frac{20\cdot 10^2}{10}} = 28{,}3 \text{ см/с}.$$

БГАРФ

ЗАДАЧА 18.40 (32.40). Груз Q массой m закреплен горизонтально натянутым тросом $AB = l$. При малых вертикальных колебаниях груза натяжение троса S можно считать постоянным. Определить частоту свободных колебаний груза, если расстояние груза от конца троса A равно a.

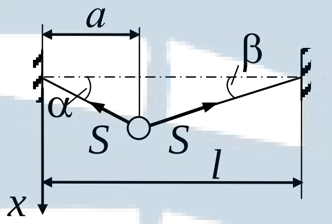


Рис. 18.40

Решение

Координату x (перемещение груза) отсчитываем от положения равновесия (горизонтального положения нити). Тогда уравнение движения груза по оси x (силой тяжести пренебрегаем)

$$m\ddot{x} = -S\sin\alpha - S\sin\beta.$$

Тогда $\sin\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$; $\qquad \sin\beta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + (l-a)^2}}$

или, с точностью до малых второго порядка,

$$\sin\alpha = \frac{x}{a}; \qquad \sin\beta = \frac{x}{l-a}.$$

Далее, $m\ddot{x} = -Sx\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{l-a}\right)$ или $m\ddot{x} = -Sx\dfrac{l}{a(l-a)}$,

откуда $k = \sqrt{\dfrac{Sl}{ma(l-a)}}$.

ЗАДАЧА 18.41 (32.41). Груз весом 490,5 Н лежит посередине балки AB. Момент инерции поперечного сечения балки $J = 80$ см^4. Определить длину балки l из условия, чтобы период свободных колебаний груза на балке был равен $T = 1$ с.

Примечание. Статический прогиб балки определяется формулой $f = Pl^3/(48EJ)$, где модуль упругости $E = 2{,}05\cdot10^{11}$ Н/м^2.

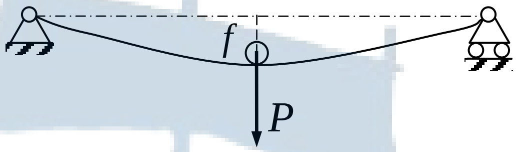


Рис. 18.41

Решение

Определим жесткость балки на изгиб

$$cf = P \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{48EJ}{l^3}.$$

Период колебаний $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{c}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{Pl^3}{48gEJ}}$,

откуда

$$l = \sqrt[3]{\frac{48gEJT^2}{4\pi^2 P}} = \sqrt[3]{\frac{48\cdot 9{,}81\cdot 2{,}05\cdot 10^{11}\cdot 80\cdot 10^{-8}}{4\cdot 3{,}14^2\cdot 490{,}5}} = 15{,}86 \text{ м}.$$

ЗАДАЧА 18.42 (32.42). Груз Q массой m зажат между двумя вертикальными пружинами с коэффициентами жесткости c_1 и c_2. Верхний конец первой пружины закреплен неподвижно, а нижний конец второй пружины прикреплен к середине балки. Определить длину балки l так, чтобы период колебаний груза был равен T. Момент инерции поперечного сечения балки J, модуль упругости E.

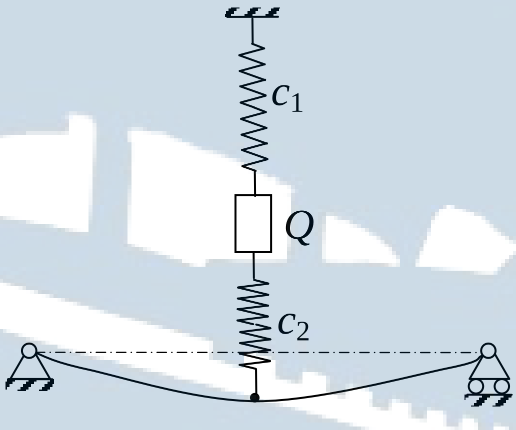


Рис. 18.42

Решение

Заменим балку эквивалентной пружиной жесткостью $c_3 = \dfrac{48EJ}{l^3}$ (см. решение предыдущей задачи).

Заменим последовательно соединенные пружины 2 и 3:

$$c_{23} = \frac{c_2 c_3}{c_2 + c_3}.$$

Теперь заменим параллельно соединенные пружины 1 и 23. Жесткость полученной эквивалентной пружины

$$c = c_1 + \frac{c_2 c_3}{c_2 + c_3} = \frac{c_3(c_1 + c_2) + c_1 c_2}{c_2 + c_3}.$$

Период колебаний $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{c}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m(c_2 + c_3)}{c_3(c_1 + c_2) + c_1 c_2}}$.

$$\frac{T^2}{4\pi^2} c_3(c_1 + c_2) + \frac{T^2}{4\pi^2} c_1 c_2 = m(c_2 + c_3),$$

$$c_3\left[\frac{T^2}{4\pi^2}(c_1 + c_2) - m\right] = mc_2 - \frac{T^2}{4\pi^2} c_1 c_2,$$

$$c_3 = \frac{48EJ}{l^3} = \frac{c_2\left(m - \dfrac{T^2}{4\pi^2} c_1\right)}{\dfrac{T^2}{4\pi^2}(c_1 + c_2) - m}.$$

Отсюда

$$l = \sqrt[3]{\frac{48EJ\left(c_1 + c_2 - \dfrac{4\pi^2 m}{T^2}\right)}{c_2\left(\dfrac{4\pi^2 m}{T^2} - c_1\right)}}.$$

ЗАДАЧА 18.43 (32.43). Найти уравнение движения и период колебаний груза *Q* массой *m*, подвешенного к пружине с коэффициентом жесткости c_1, если пружина прикреплена к середине балки длины *l*. Жесткость балки на изгиб *EJ*. В начальный момент груз находился в положении статического равновесия и ему была сообщена скорость v_0, направленная вниз.

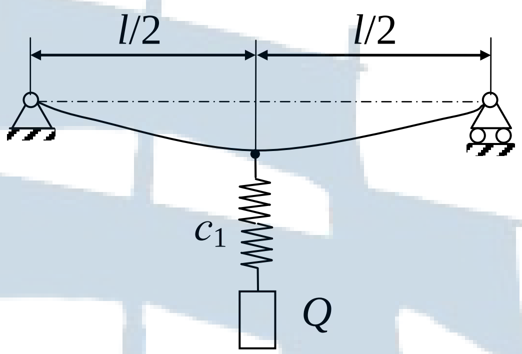


Рис. 18.43

Решение

Заменим балку эквивалентной пружиной жесткостью $c_2 = \dfrac{48EJ}{l^3}$.

Заменим последовательно соединенные пружины 1 и 2

$$c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} = \frac{48EJc_1}{c_1 l^3 + 48EJ}.$$

Уравнение движения тела $m\ddot{x} = -cx$

при начальных условиях $x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = v_0$.

Решение уравнения $x = A\sin kt + B\cos kt = \dfrac{v_0}{k}\sin kt$,

где $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{48EJc_1}{\left(c_1 l^3 + 48EJ\right)m}}$.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi\sqrt{\frac{\left(c_1 l^3 + 48EJ\right)m}{48EJc_1}}.$$

ЗАДАЧА 18.44 (32.44). Груз весом Q зажат между двумя вертикальными пружинами, коэффициенты жесткости которых равны c_1 и c_2. Верхний конец первой пружины закреплен неподвижно. Нижний конец второй пружины прикреплен к свободному концу балки, заделанной другим концом в стене. Зная, что свободный конец заделанной балки под действием силы P, приложенной к свободному концу балки, дает прогиб $f = Pl^3/(3EJ)$, где EJ – заданная жесткость балки при изгибе, определить длину балки l, при которой груз будет колебаться с данным периодом T. Найти уравнение движения груза, если в начальный момент он был подвешен к концам нерастянутых пружин и отпущен без начальной скорости.

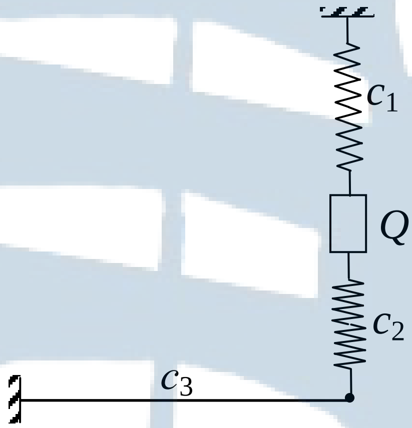


Рис. 18.44

Решение

Решение задачи аналогично предыдущей.

Заменим балку эквивалентной пружиной жесткостью $c_3 = \dfrac{48EJ}{l^3}$.

Заменим последовательно соединенные пружины 2 и 3

$$c_{23} = \frac{c_2 c_3}{c_2 + c_3}.$$

Теперь заменим параллельно соединенные пружины 1, 2 и 3. Жесткость полученной эквивалентной пружины

$$c = c_1 + \frac{c_2 c_3}{c_2 + c_3} = \frac{c_3 c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3}{c_2 + c_3}.$$

Далее решаем уравнение $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{c}}$

относительно c_3, а затем уже находим l

$$l = \sqrt[3]{\frac{3EJ\left(c_1 + c_2 - \dfrac{4\pi^2 Q}{gT^2}\right)}{c_2\left(\dfrac{4\pi^2 Q}{gT^2} - c_1\right)}}.$$

Это решение справедливо при соблюдении условия

$$c_1 < \frac{4\pi^2 Q}{gT^2} < c_1 + c_2.$$

Решая эти неравенства относительно T, получим

$$2\pi\sqrt{\frac{Q}{g(c_1+c_2)}} < T < 2\pi\sqrt{\frac{Q}{gc_1}}.$$

Левая часть этого неравенства соответствует колебаниям при закрепленным нижнем конце пружины c_3 (т. е. $c_3 \to \infty$), а правая – при свободном нижнем конце пружины c_2 (т. е. $c_3 \to 0$).

Таким образом, при фиксированных c_1, c_2 задаваемые условия задачи не могут быть произвольными.

Далее, если отсчитывать x вертикально вниз от положения равновесия, то будем иметь дифференциальное уравнение колебаний $m\ddot{x} = -cx$ при начальных условиях

$$x(0) = -\lambda_0 = -\frac{mg}{c}; \qquad \dot{x}(0) = 0.$$

Решение уравнения

$$x = A\sin kt + B\cos kt = -\frac{Q}{k}\cos kt, \text{ где } k = \sqrt{\frac{cg}{Q}}.$$

ЗАДАЧА 18.45 (32.45). Стержень OA длиной l, на конце которого помещен груз массой m, может поворачиваться вокруг оси O. На расстоянии а от оси O к стержню прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c. Определить собственную частоту колебаний груза, если стержень OA в положении равновесия занимает горизонтальное положение. Массой стержня пренебречь.

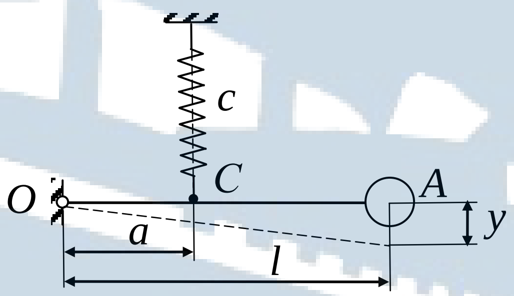


Рис. 18.45

Решение

Воспользуемся для решения задачи уравнением Лагранжа II рода.

За обобщенную координату примем перемещение y груза.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}.$$

Кинетическая энергия $T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2$.

Потенциальная энергия

$$\Pi = \Pi_G + \Pi_C = -mgy + \frac{a^2}{2l^2}cy^2 + c\frac{ay}{l}f_{\text{ст}}.$$

Здесь перемещение точки C $y_C = \frac{ay}{l}$.

Найдем статическую деформацию пружины из условия

$$\left.\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right|_{y=0} = -mg + \frac{ca}{l}f_{\text{ст}} = 0, \text{ откуда } f_{\text{ст}} = \frac{mgl}{ca}.$$

Окончательно, для П получим $\Pi = \frac{ca^2}{2l^2}y^2$.

Вычисляем производные

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\ddot{y}, \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial y} = \frac{ca^2}{l^2}y.$$

Подставляя в исходное уравнение, получим $m\ddot{y} + \frac{ca^2}{l^2}y = 0$, откуда искомая частота колебаний $k = \frac{a}{l}\sqrt{\frac{c}{m}}$.

ЗАДАЧА 18.46 (32.46). Груз P массой m подвешен на пружине к концу стержня длиной l, который может поворачиваться вокруг оси O. Коэффициент жесткости пружины c_1. Пружина, поддерживающая стержень, установлена на расстоянии b от точки O и имеет коэффициент жесткости c_2. Определить собственную частоту колебаний груза P. Массой стержня пренебречь.

БГАРФ

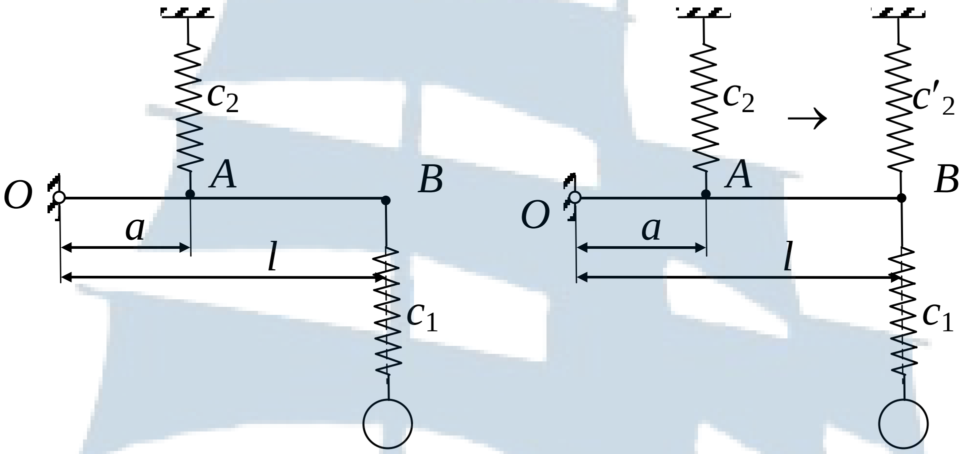


Рис. 18.46

Решение

Заменим пружину c_2 эквивалентной, приложенной в точке B и имеющей жесткость c_2' из уравнения моментов этих сил упругости относительно точки O при повороте стержня на малый угол α

$$b(c_2 b\alpha) = l(c_2' l\alpha), \text{ откуда } c_2' = c_2\left(\frac{b}{l}\right)^2.$$

В результате груз будет колебаться на двух последовательно соединенных пружинах, что соответствует одной пружине с эквивалентной жесткостью

$$c = \frac{c_1 c_2'}{c_1 + c_2'} = \frac{c_1 c_2}{c_2 + \dfrac{l^2}{b^2} c_1}.$$

Отсюда $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{c_1 c_2}{m\left(c_2 + \dfrac{l^2}{b^2} c_1\right)}}$.

ЗАДАЧА 18.47 (32.47). Для определения ускорения силы тяжести в данном месте земного шара производят два опыта. К концу пружины подвешивают груз P_1 и измеряют статическое удлинение пружины l_1. Затем к концу этой же пружины подвешивают другой груз P_2 и опять измеряют статическое удлинение l_2. После этого повторяют оба опыта, заставляя оба груза по очереди совершать свободные колебания, и измеряют при этом периоды колебаний T_1 и T_2. Второй опыт делают для того, чтобы учесть влияние массой самой пружины, считая, что при движении груза это влияние эквивалентно прибавлению к колеблющейся массе некоторой добавочной массой. Найти формулу для определения ускорения силы тяжести по этим опытным данным.

Решение

Запишем уравнения равновесия грузов (первый опыт)

$m_1g = cl_1;$ $\qquad\qquad$ $m_2g = cl_2.$

Результат проведения второго опыта – периоды колебаний грузов

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m}{c}}; \qquad\qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2 + m}{c}},$$

где m – масса дополнительного груза, учитывающая влияние массы пружины.

Выразим отсюда m:

$$m = \frac{T_1^2 c}{4\pi^2} - m_1; \qquad m = \frac{T_2^2 c}{4\pi^2} - m_2.$$

Учитывая, что из первого опыта

$$m_1 = \frac{cl_1}{g}; \qquad\qquad m_2 = \frac{cl_2}{g},$$

приравнивая выражения для m, получим

$$\frac{T_1^2 c}{4\pi^2} - \frac{cl_1}{g} = \frac{T_2^2 c}{4\pi^2} - \frac{cl_2}{g},$$

откуда $g = \dfrac{4\pi^2(l_1 - l_2)}{T_1^2 - T_2^2}.$

ЗАДАЧА 18.48 (32.48). По горизонтальной хорде (пазу) вертикально расположенного круга движется без трения точка M массой 2 кг под действием силы притяжения F, пропорциональной по величине расстоянию до центра O, причем коэффициент пропорциональности 98 Н/м. Расстояние от центра круга до хорды равно 20 см, радиус окружности 40 см. Определить закон движения точки, если в начальный момент она находилась в правом крайнем положении M_0 и отпущена без начальной скорости. С какой скоростью точка проходит через середину хорды?

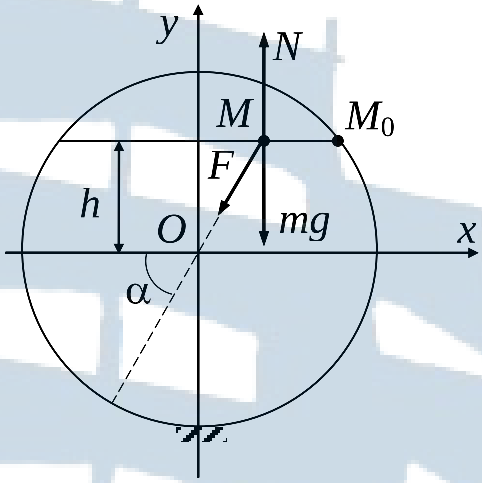


Рис. 18.48

Решение

Сила притяжения $F = \mu \cdot OM = \mu\sqrt{h^2 + x^2}$.

Уравнение движения точки M

$m\ddot{x} = -F\cos\alpha$ или $m\ddot{x} = -\mu\sqrt{h^2 + x^2}\cos\alpha$,

где $\cos\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}}$, откуда $\ddot{x} + \dfrac{\mu}{m}x = 0$.

Начальные условия: при $t = 0$,

$x_0 = \sqrt{r^2 - h^2} = \sqrt{0{,}4^2 - 0{,}2^2} = 0{,}346$ м; $\dot{x}_0 = 0$.

Решение уравнения

$x = a\sin(kt + \alpha)$, где $k = \sqrt{\dfrac{\mu}{m}} = \sqrt{\dfrac{98}{2}} = 7$ с$^{-1}$,

принимает вид $x = 0{,}346\cos 7t$, м.

Скорость точки меняется по закону $\dot{x} = -242\sin 7t$ см/с.

Моменты прохождения точкой середины хорды определяются уравнением $x = 0$, т. е. $34{,}6\cos 7t = 0$.

Отсюда $7t = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$

Следовательно, точка проходит середину хорды со скоростью

$\dot{x} = \pm 242{,}2$ см/с.

ЗАДАЧА 18.49 (32.49). К стержню *AB*, массой которого пренебречь, прикреплены три пружины. Две, с жесткостью c_1 и c_2, удерживают стержень и расположены на его концах. Третья пружина, жесткость которой c_3, прикреплена к середине стержня и несет груз *P* массой *m*. Определить собственную частоту колебаний груза.

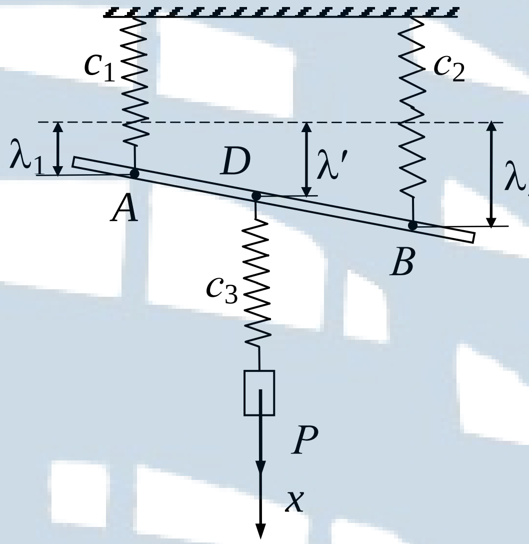


Рис. 18.49

Решение

Если заменить исходную систему грузом с эквивалентной пружиной, то частота колебаний будет $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$. Выразим жесткость эквивалентной пружины c через c_1, c_2, c_3. Разобьем задачу на два этапа. На первом этапе параллельные пружины c_1 и c_2 заменим эквивалентной пружиной жесткостью c'.

Так как $AD = DB$, то из равенства моментов сил F_1 и F_2 относительно точки D получим, $c_1\lambda_1 = c_2\lambda_2$, где λ_1 и λ_2 – деформации пружин. Очевидно, что для эквивалентной пружины $\lambda' = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$ и $F' = F_1 + F_2$.

Отсюда получим

$$c'\lambda' = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2, \qquad \Rightarrow \qquad c' = \frac{\lambda_1 + c_2\lambda_2}{\lambda'} = c_1\frac{\lambda_1}{\lambda'} + c_2\frac{\lambda_2}{\lambda'}.$$

Так как $\lambda' = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$, то $2 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda'} + \dfrac{\lambda_2}{\lambda'}$ и $\dfrac{\lambda_1}{\lambda'} = 2 - \dfrac{\lambda_2}{\lambda'}$.

Теперь, используя, что $c_1\lambda_1 = c_2\lambda_2$, получим

$$c_1\frac{\lambda_1}{\lambda'} = c_2\frac{\lambda_2}{\lambda'},$$

$$c_1\left(2-\frac{\lambda_2}{\lambda'}\right) = c_2\frac{\lambda_2}{\lambda'}, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\lambda_2}{\lambda'} = \frac{2c_1}{c_1+c_2} \quad \text{и}$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda'} = \frac{\lambda_2}{\lambda'}\frac{c_2}{c_1} = \frac{2c_2}{c_1+c_2}.$$

Отсюда получим

$$c' = c_1\frac{\lambda_1}{\lambda'} + c_2\frac{\lambda_2}{\lambda'} = c_1\frac{2c_2}{c_1+c_2} + c_2\frac{2c_1}{c_1+c_2} = \frac{4c_1c_2}{c_1+c_2}.$$

На втором этапе две последовательные пружины c'и c_3 заменяем одной пружиной.

$$\lambda = \lambda' + \lambda_3, \qquad \frac{F}{c} = \frac{F'}{c'} + \frac{F_3}{c_3}.$$

Так как пружины невесомые, то $F = F' = F_3$. Поэтому $\frac{1}{c} = \frac{1}{c'} + \frac{1}{c_3}$.

Отсюда $c = \dfrac{c'c_3}{c'+c_3} = \dfrac{4c_1c_2c_3}{(c_1+c_2)\left(\dfrac{4c_1c_2}{c_1+c_2}+c_3\right)} = \dfrac{4c_1c_2c_3}{4c_1c_2+c_1c_3+c_2c_3}$.

Искомая частота колебаний $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{4c_1c_2c_3}{m(4c_1c_2+c_1c_3+c_2c_3)}}$.

ЗАДАЧА 18.50 (32.50). Груз массой 10 кг, прикрепленный к пружине с коэффициентом жесткости c = 1,96 кН/м, совершает колебания. Определить полную механическую энергию груза и пружины, пренебрегая массой пружины, построить график зависимости упругой силы от перемещения и показать на нем потенциальную энергию пружины. Принять положение статического равновесия за начало отсчета потенциальной энергии.

БГАРФ

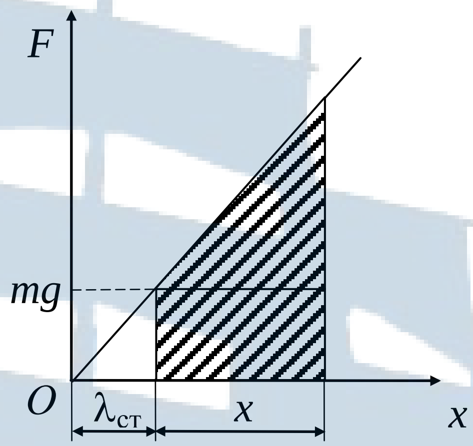


Рис. 18.50

Решение

Полная механическая энергия системы $E = T + П$.

Кинетическая энергия $T = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{m\dot{x}^2}{2}$.

Потенциальная энергия складывается из работы силы тяжести *mg* и работы силы упругости пружины *F* при перемещении этими силами груза из рассматриваемого положения, задаваемого координатой *x*, в положение нулевого уровня потенциальной энергии ($x = 0$).

$$П = -mgx + \frac{c}{2}\left((x+\lambda_{ст})^2 - \lambda_{ст}^2\right) = \frac{cx^2}{2}, \text{ так как } mg = c\lambda_{ст}.$$

Здесь деформация пружины $\lambda = x + \lambda_{ст}$.

Окончательно $E = \dfrac{m\dot{x}^2}{2} + \dfrac{cx^2}{2} = 5\dot{x}^2 + 980x^2$.

Сила упругости пружины $F = c\lambda = c(x+\lambda_{ст}) = cx + mg$.

График зависимости силы упругости показан на рис. 18.50.

Потенциальная энергия пружины

$$П = \int_{x+\lambda_{ст}}^{\lambda_{ст}} c(x+\lambda_{ст})d(x+\lambda_{ст}) = \frac{cx^2}{2} + mgx.$$

На графике потенциальная энергия пружины – площадь заштрихованной трапеции.

ЗАДАЧА 18.51 (32.51). Материальная точка массой *m* находится в поле действия силы с потенциалом $П = (x^2 + 4y^2 + 16z^2)k/2$. Доказать, что при движении точки из любого (ненулевого) начального положения через некоторое время точка снова придет в это положение. Определить это время. Будет ли скорость при возвращении равна начальной скорости?

Решение

Если потенциал силового поля $\Pi = (x^2 + 4y^2 + 16z^2)k/2$, то проекции силы, действующих на точку,

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -kx; \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} = -4ky; \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} = -16kz.$$

Дифференциальные уравнения движения точки

$$m\ddot{x} = -kx, \qquad m\ddot{y} = -4ky, \qquad m\ddot{z} = -16kz$$

или $$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \qquad \ddot{y} + \frac{4k}{m}y = 0, \qquad \ddot{z} + \frac{16k}{m}x = 0.$$

Решения этих уравнений

$$x = A_1 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha_1\right); \qquad y = A_2 \sin\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha_2\right);$$

$$z = A_3 \sin\left(4\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha_3\right).$$

Периоды колебаний

$$T_x = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}; \qquad T_y = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}; \qquad T_z = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

При движении точка снова придет в начальное положение в том случае, если периоды соотносятся между собой как рациональные числа. В данном случае

$$\frac{T_x}{T_y} = 2; \qquad \frac{T_y}{T_z} = 2; \qquad \frac{T_x}{T_z} = 4.$$

Следовательно, точка вернется в начальное положение. Произойдет это через промежуток времени, равный наименьшему общему кратному периодов T_x, T_y, T_z, т. е. через время $T = T_x = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Так как скорость точки вдоль осей координат изменяется также по гармоническим законам с теми же периодами

$$\dot{x} = A_1\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha_1\right); \qquad \dot{y} = 2\sqrt{\frac{k}{m}}A_2\cos\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha_2\right);$$

$$\dot{z} = 4\sqrt{\frac{k}{m}}A_3\cos\left(4\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha_3\right),$$

то ее значение через время $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ совпадает с начальным значением.

Следует заметить, что при нулевых начальных условиях движение точки отсутствует.

ЗАДАЧА 18.52 (32.52). Материальная точка массой m находится в поле действия силы, потенциал которой $\Pi = (x^2 + 2y^2 + 5z^2)k/2$.

Вернется ли точка в этом случае в исходное положение по прошествии некоторого времени?

Решение

Если потенциал силового поля $\Pi = (x^2 + 2y^2 + 5z^2)k/2$,

то $F_x = -\dfrac{\partial\Pi}{\partial x} = -kx$; $F_y = -\dfrac{\partial\Pi}{\partial y} = -2ky$; $F_z = -\dfrac{\partial\Pi}{\partial z} = -5kz$.

Дифференциальные уравнения движения точки

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial\Pi}{\partial x} \quad \text{или} \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0,$$

$$\ddot{y} + 2\frac{k}{m}y = 0, \quad \ddot{z} + 5\frac{k}{m}z = 0.$$

Периоды колебательных движений материальной точки вдоль осей координат

$$T_x = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}; \qquad T_y = \sqrt{2}\pi\sqrt{\frac{m}{k}}; \qquad T_z = 2\frac{\sqrt{5}}{5}\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Отсюда видно, что отношения периодов колебаний иррациональны:

$$\frac{T_x}{T_y} = \sqrt{2}; \qquad \frac{T_y}{T_z} = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Поэтому нельзя указать момент времени, когда все три координаты примут исходные значения. Точка в процессе сложения трех колебательных движений не вернется в исходное положение.

БГАРФ

Свободные колебания материальной точки с демпфированием

ЗАДАЧА 18.53 (32.53). Пластина D массой 100 г, подвешенная на пружине AB в неподвижной точке A, движется между полюсами магнита. Вследствие вихревых токов движение тормозится силой, пропорциональной скорости. Сила сопротивления движению равна $kv\Phi^2$ Н, где $k = 0{,}001$; v – скорость в м/с; Φ – магнитный поток между полюсами N и S. В начальный момент скорость пластинки равна нулю и пружина не растянута. Удлинение ее на 1 м получается при статическом действии силы в 19,6 Н, приложенной в точке B. Определить движение пластинки в том случае, когда $\Phi = 10\sqrt{5}$ Вб (вебер – единица магнитного потока в СИ).

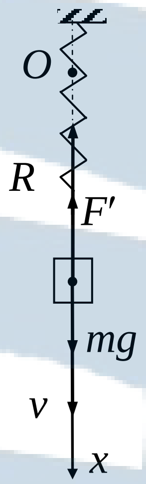


Рис. 18.53

Решение

Движение пластины вдоль оси x, начало которой выбрано в положении статического равновесия (точка O), описывается дифференциальным уравнением $m\ddot{x} = mg - F - R$.

Сила сопротивления $\bar{R} = -\mu\Phi^2\bar{v}$.

Сила упругости пружины $F = c\lambda = c(x + \lambda_{ст})$,

где статическая деформация пружины определяется из условия равновесия $mg = c\lambda_{ст}$.

Тогда дифференциальное уравнение принимает вид

$$\ddot{x} + \frac{\mu\Phi^2}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0,$$

где $n = \dfrac{\mu\Phi^2}{2m} = \dfrac{0{,}001\cdot(10\cdot\sqrt{5})^2}{2\cdot 0{,}1} = 2{,}5\ \text{с}^{-1}$.

Составим характеристическое уравнение дифференциального уравнения $\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$,
корни которого, $\lambda_{1,2} = -n \pm k_1 i = -2{,}5 \pm 13{,}77i$.

Так как $n < k$ (случай малого сопротивления), то решение запишем в виде

$$x = e^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) = e^{-2{,}5t}(C_1 \cos 13{,}77t + C_2 \sin 13{,}77t).$$

Начальные условия:

при $t = 0$,

$$x_0 = -\lambda_{\text{ст}} = -\frac{mg}{c} = -\frac{0{,}1 \cdot 9{,}8}{19{,}6} = -0{,}05 \text{ м}; \qquad \dot{x}_0 = 0.$$

Отсюда получим $x = e^{-2{,}5t}(0{,}05\cos 13{,}77t + 0{,}00907\sin 13{,}77t)$.

Пластина совершает затухающие колебания.

ЗАДАЧА 18.54 (32.54). Определить движение пластинки D при условиях предыдущей задачи в том случае, когда магнитный поток $\Phi = 100$ Вб.

Решение

Воспользуемся результатами предыдущей задачи.

При увеличении магнитного потока Φ увеличивается коэффициент демпфирования n. Теперь $n = \dfrac{\mu\Phi^2}{2m} = \dfrac{0{,}001 \cdot 100^2}{2 \cdot 0{,}1} = 50 \text{ с}^{-1}$.

Получили случай большого сопротивления $n > k$.

Решение дифференциального уравнения в этом случае имеет вид

$$k_2 = \sqrt{n^2 - k^2} = \sqrt{50^2 - 14^2} = 48;$$

$$x = e^{-nt}(C_1 e^{k_2 t} + C_2 e^{-k_2 t}) = e^{-50t}(C_1 e^{48t} + C_2 e^{-48t}).$$

Из начальных условий $C_1 = 0{,}001$ и $C_1 = -0{,}051$.

Пластина совершает апериодическое движение

$$x = e^{-50t}\left(0{,}001e^{-48t} - 0{,}051e^{48t}\right) = -0{,}051e^{-2t} + 0{,}001e^{-98t} \text{ м}.$$

ЗАДАЧА 18.55 (32.55). Цилиндр веса P, радиуса r и высоты h подвешен на пружине AB, верхний конец которой В закреплен; цилиндр погружен в воду. В положении равновесия цилиндр погружается в воду на половину своей высоты. В начальный момент времени цилиндр был погружен в воду на 2/3 своей высоты и затем без начальной скорости пришел в движение по вертикальной прямой. Считая жесткость пружины равной c и, предполагая, что действие воды сводится к добавочной архимедовой силе, определить движение цилиндра относительно положения равновесия. Принять удельный вес воды равным γ.

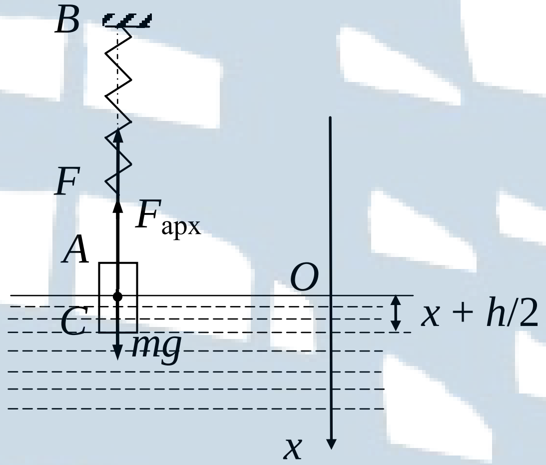


Рис. 18.55

Решение

Начало координат принято на оси x в положении статического равновесия цилиндра.

Сила упругости пружины $F = c\lambda = c(x + \lambda_{ст})$.

Сила Архимеда $F_{арх} = \pi r^2 \left(\dfrac{h}{2} + x\right)\gamma$.

Статическая деформация пружины определяется из условия равновесия $mg - \pi r^2 \dfrac{h}{2}\gamma - c\lambda_{ст} = 0$.

Дифференциальное уравнение движения центра масс цилиндра $m\ddot{x} - F - F_{арх} = 0$ или $\ddot{x} + \dfrac{c + \pi r^2\gamma}{m} x = 0$,

где $m = \dfrac{P}{g}$; $k = \sqrt{\dfrac{c + \pi r^2\gamma}{m}}$ – частота колебаний цилиндра.

Решение уравнения $x = A\sin(kt + \alpha)$.

Начальные условия:

при $t = 0$, $x_0 = \dfrac{h}{6}$ м; $\dot{x}_0 = 0$.

Постоянные интегрирования

$$A=\frac{h}{6}; \qquad \alpha=\frac{\pi}{2}.$$

Окончательно $x=\frac{h}{6}\cos\sqrt{\frac{g}{P}(c+\pi r^2\gamma)}t$.

ЗАДАЧА 18.56 (32.56). В предыдущей задаче определить колебательное движение цилиндра, если сопротивление воды пропорционально первой степени скорости и равно βv.

Решение

В условия предыдущей задачи добавляется сила сопротивления $F=\beta v$.

Поэтому дифференциальное уравнение принимает вид

$$\ddot{x}+\frac{\beta}{m}\dot{x}+k^2x=0.$$

Движение цилиндра будет носить колебательный характер (затухающие колебания) в случае малого сопротивления, $n<k$. Коэффициент демпфирования $n=\frac{\beta}{2m}$, поэтому

$$\frac{\beta}{2m}<\sqrt{\frac{c+\pi r^2\gamma}{m}} \quad \text{или} \quad \frac{c+\pi r^2\gamma}{m}>\left(\frac{\beta}{2m}\right)^2.$$

Решение уравнения

$x=Ae^{-nt}\sin(k_1t+\alpha)$, где $k_1=\sqrt{k^2-n^2}$.

Из начальных условий:

при $t=0$, $\quad x_0=\frac{h}{6}$ м; $\quad \dot{x}_0=0$

получаем постоянные интегрирования

$$\frac{h}{6}=A\sin\alpha, \qquad 0=A\sin\alpha+Ak_1\cos\alpha.$$

Отсюда

$$A=\frac{h}{6}\sqrt{1+\left(\frac{n}{k_1}\right)^2}=\frac{h}{6}\sqrt{\frac{k^2}{k^2-n^2}}; \qquad \alpha=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{k^2-n^2}}{n}.$$

Окончательно

$$x = \frac{h}{6}\sqrt{\frac{k^2}{k^2-n^2}}e^{-nt}\sin\left(\sqrt{k^2-n^2}\,t + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{k^2-n^2}}{n}\right),$$

где $k = \sqrt{\dfrac{c+\pi r^2\gamma}{m}}$, $n = \dfrac{\beta}{2m}$, $m = \dfrac{P}{g}$.

ЗАДАЧА 18.57 (32.57). Тело A массой 0,5 кг лежит на негладкой горизонтальной плоскости и соединено с неподвижной точкой B пружиной, ось которой BC горизонтальна. Коэффициент трения тела о плоскость 0,2; пружина такова, что для удлинения ее на 1 см требуется сила 2,45 Н. Тело A отодвинуто от точки B так, что пружина вытянулась на 3 см, и затем отпущено без начальной скорости. Найти: 1) число размахов, которые совершит тело A; 2) величины размахов; 3) продолжительность T каждого из них.

Тело остановится, когда в положении, где скорость его равна нулю, сила упругости пружины будет равна силе трения или меньше ее.

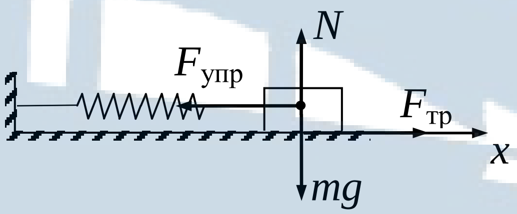


Рис. 18.57

Решение

Начало координат принято на оси x в положении статического равновесия тела.

Нормальная реакция $N = mg$.

Сила трения скольжения $F_{тр} = fN = mgf$.

Сила упругости пружины $F = c\lambda = cx$.

Дифференциальное уравнение движения $m\ddot{x} = -cx \pm mgf$.

Здесь подразумевается, что $\pm mgf = mgf \cdot \operatorname{sign}\dot{x}$.

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = \pm gf, \quad x = A\sin(kt+\alpha) \pm fg\frac{m}{c},$$

где $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{245}{0{,}5}} = 22{,}1\ \text{с}^{-1}$.

Из начальных условий:

при $t = 0$ $x_0 = 0,03$ м; $\dot{x}_0 = 0$

получаем постоянные интегрирования

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad A = x_0 \mp fg\frac{m}{c} = 0,03 \mp 0,004 \text{ м.}$$

Итак, $x = A\cos kt \pm fg\dfrac{m}{c} = A\cos 22,1t \pm 0,004$.

1. Рассмотрим движение от положения $x_0 = 0,03$ м до первой остановки (движение влево). Так как здесь $\dot{x} < 0$, то в дифференциальном уравнении берем знак «+» (верхний знак). Значит $x = 0,026\cos 22,1t + 0,004$. Скорость $\dot{x} = -0,575\sin 22,1t$. Скорость равна нулю в момент времени $\tau = \dfrac{\pi}{k} = \dfrac{3,14}{22,1} = 0,14$ с. Положение тела

$$x_1 = x(\tau) = 0,026\cos\pi + 0,004 = -0,022 \text{ м}$$

точка слева от $x = 0$.

Сравним силу упругости с силой трения в этот момент:

$F = c|x| = 245 \cdot 0,022 = 5,38$ Н;

$F_{\text{тр}} = mgf = 0,2 \cdot 0,5 \cdot 9,8 = 0,98$ Н.

Так как $F > F_{\text{тр}}$, то тело продолжит движение, но теперь направо, так как $\ddot{x}(\tau) = -245 \cdot (-0,022) + 1,96 = 7,4 > 0$.

Итак, продолжительность первого размаха равна $\tau = 0,14$ с.

Величина первого размаха

$l_1 = x_0 - x_1 = 0,03 - (-0,022) = 0,052$ м.

2. Рассмотрим движение с начальными условиями $x_1 = x(0) = -0,022$ м, $\dot{x}(0) = 0$. Так как $\dot{x} > 0$, то в дифференциальном уравнении берем теперь знак «–» (нижний знак).

Значит $x = \left(x_1 + \dfrac{mgf}{c}\right)\cos 22,1t - \dfrac{mgf}{c} = -0,018\cos 22,1t - 0,004$.

Скорость $\dot{x} = 0,398\sin 22,1t = 0$ опять в момент времени $\tau = 0,14$ с.

Положение тела $x_2 = x(\tau) = -0,018\cos\pi - 0,004 = 0,014$ м.

Сила упругости $F = c|x_2| = 245 \cdot 0,014 = 3,43$ Н $> F_{\text{тр}} = 0,98$ Н.

Поэтому тело продолжит движение, но теперь влево.

Величина второго размаха

$l_2 = x_2 - x_1 = 0{,}014 - (-0{,}022) = 0{,}036$ м.

3. Рассмотрим движение с начальными условиями $x(0) = x_2 = 0{,}014$ м, $\dot{x}(0) = 0$. Так как $\dot{x} < 0$, то в соотношениях берем теперь верхние знаки.

Решение $x = \left(x_2 - \dfrac{mgf}{c} \right) \cos 22{,}1t + \dfrac{mgf}{c} = 0{,}010 \cos 22{,}1t + 0{,}004$.

Скорость $\dot{x} = 0{,}221 \sin 22{,}1t = 0$ опять в момент времени $\tau = 0{,}14$ с.

Положение тела $x_3 = x(\tau) = 0{,}010 \cos\pi + 0{,}004 = -0{,}006$ м.

Сила упругости $F = c|x_3| = 245 \cdot 0{,}006 = 1{,}47 > F_{тр}$.

Движение продолжится (направо).

Величина третьего размаха

$l_3 = x_2 - x_3 = 0{,}014 + 0{,}006 = 0{,}020$ м.

4. Рассмотрим движение направо с начальными условиями $x(0) = x_3 = -0{,}006$ м, $\dot{x}(0) = 0$. Теперь берем нижние знаки.

$$x = \left(x_3 + \frac{mgf}{c} \right) \cos 22{,}1t - \frac{mgf}{c} = -0{,}002 \cos 22{,}1t - 0{,}004.$$

Скорость $\dot{x} = -0{,}044 \sin 22{,}1t = 0$ при $\tau = 0{,}14$ с.

Положение тела

$x_4 = x(\tau) = -0{,}002 \cos\pi - 0{,}004 = -0{,}002$ м.

Сила упругости

$F = c|x_4| = 245 \cdot 0{,}002 = 0{,}49$ Н $< F_{тр} = 0{,}98$ Н.

Поэтому движение остановится.

Величина последнего четвертого размаха

$l_4 = x_4 - x_3 = -0{,}002 + 0{,}006 = 0{,}004$ м.

ЗАДАЧА 18.58 (32.58, а, б). Груз массой M = 20 кг, лежащий на наклонной негладкой плоскости, прикрепили к нерастянутой пружине и сообщили ему начальную скорость v_0 = 0,5 м/с, направленную вниз. Коэффициент трения скольжения f = 0,08, коэффициент жесткости пружины c = 20 Н/см. Угол, образованный наклонной плоскостью с горизонтом, α = 45°. Определить: 1) период колебаний; 2) число максимальных отклонений от положения равновесия, которые совершит груз; 3) величины этих отклонений.

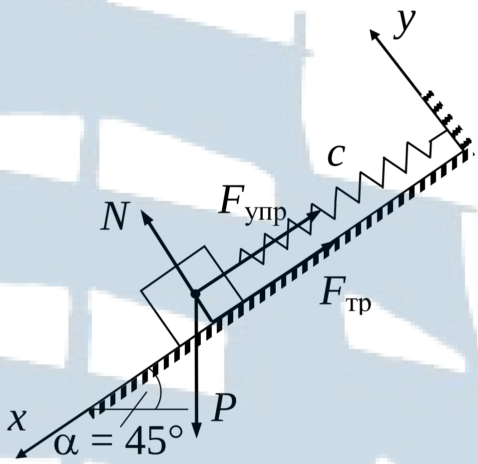


Рис. 18.58, а

Решение

Ось x направлена вниз по наклонной плоскости, начало координат совмещено с нейтральным положением пружины.

Уравнения движения

$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - cx - fN\operatorname{sign}\dot{x}$,

$0 = N - mg\cos\alpha, \qquad \Rightarrow \qquad N = mg\cos\alpha,$

$F_{тр} = -fN\operatorname{sign}\dot{x}$ – сила трения, которая всегда направлена против скорости.

Тогда $\ddot{x} = g\sin\alpha - \omega^2 x - fg\cdot\operatorname{sign}\dot{x}$, где $\omega^2 = \dfrac{c}{m}$.

Прежде чем решать это нелинейное уравнение, рассмотрим вопрос о положениях равновесия системы. Эти положения соответствуют таким позициям $x = x_*$, для которых выполняется равенство

$g\sin\alpha - \omega^2 x_* + \dfrac{F_{тр.п}}{m} = 0$, где $F_{тр.п}$ – это сила трения покоя, модуль которой удовлетворяет неравенству $\left|F_{тр.п}\right| \le fN = fmg\cos\alpha$.

Отсюда получим, что x_* необходимо удовлетворяет неравенству $\left|g\sin\alpha - \omega^2 x_*\right| \le fg\cos\alpha$, которое влечет за собой неравенства

$$\frac{1}{\omega^2}g(\sin\alpha - fg\cos\alpha) \le x_* \le \frac{1}{\omega^2}g(\sin\alpha + fg\cos\alpha).$$

Введем обозначения

$\mu_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha), \qquad \mu_2 = g(\sin\alpha + f\cos\alpha).$

Приведенные рассуждения позволяют сделать вывод, что положениям равновесия соответствует отрезок

$$x_* \in \left[\frac{1}{\omega^2}\mu_1, \frac{1}{\omega^2}\mu_2 \right].$$

Тело остается в равновесии в любой точке этого отрезка, если, конечно, его начальная скорость в этой точке равна нулю. Этот отрезок иногда называют «зоной застоя».

Чтобы решить нелинейное дифференциальное уравнение движения, его удобно переписать в нормальной форме Коши, введя обозначения $x_1 = \omega x$, $x_2 = x$. Тогда получим систему

$$\dot{x}_1 = \omega x_2, \qquad x_2 = -\omega x_1 + \mu_1 \qquad \text{при } x_2 > 0;$$
$$\dot{x}_1 = \omega x_2, \qquad x_2 = -\omega x_1 + \mu_2 \qquad \text{при } x_2 < 0.$$

Решим эту систему уравнений. Для этого умножим первое уравнение на $\left(x_1 - \frac{\mu_1}{\omega} \right)$, а второе уравнение – на x_2, и сложим.

Получим $\dot{x}_1 \left(x_1 - \frac{\mu_1}{\omega} \right) + \dot{x}_2 x_2 = \omega x_2 \left(x_1 - \frac{\mu_1}{\omega} \right) + x_2(\omega x_1 + \mu_1) = 0$.

Отсюда следует, что

$$\dot{x}_1 \left(x_1 - \frac{\mu_1}{\omega} \right) + \dot{x}_2 x_2 = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(x_1 - \frac{\mu_1}{\omega} \right)^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \right] = 0,$$

т. е. $\left(x_1 - \frac{\mu_1}{\omega} \right)^2 + x_2^2 = \text{const} = \left(x_1(0) - \frac{\mu_1}{\omega} \right)^2 + x_2^2(0)$.

Таким образом, фазовые траектории (при $x_2 = \dot{x} > 0$) представляют собой полуокружности с центром в точке $\left\{ x_1^+ = \frac{\mu_1}{\omega}, x_2^+ = 0 \right\}$. Аналогично получается, что для последней системы фазовые траектории (при $x_2 = \dot{x} < 0$) представляют собой полуокружности с центром в точке $\left\{ x_1^- = \frac{\mu_2}{\omega}, x_2^- = 0 \right\}$. Результаты этого решения представлены на фазовой плоскости (ниже на рис. 18.58, б).

На этом рисунке представлена одна траектория при $x_2 > 0$ (полуокружность *AB*) и следующая за ней по непрерывности траектория при $x_2 < 0$ (полуокружность BC). Отметим, что отрезок $\left[x_1^+, x_1^-\right]$, где $x_1^+ = \dfrac{\mu_1}{\omega}$, $x_1^- = \dfrac{\mu_2}{\omega}$, представляет собой положения равновесия (так как $x_1 = \omega x_*$). Процесс движения закончится тогда, когда траектория попадет на этот отрезок. Далее, нетрудно заметить, что радиус окружности при переходе из области $x_2 > 0$ в область $x_2 < 0$ уменьшается в точности на величину

$$\Delta = x_1^- - x_1^+ = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\omega} = \frac{2\,fg\cos\alpha}{\omega}.$$

Таким образом, (см. рис. 18, б) $AC = \Delta = \dfrac{2\,fg\cos\alpha}{\omega}$.

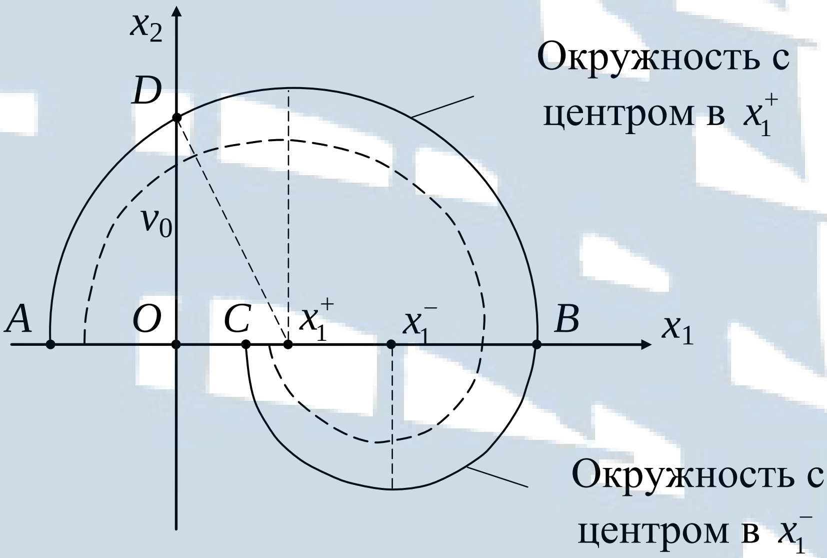


Рис. 18.58, б

Ясно, что попадание на отрезок $\left[x_1^+, x_1^-\right]$ может произойти тогда, когда радиус очередной окружности меньше Δ. Итак, количество размахов до достижения равновесия выражается формулой

$$n = \left[\frac{\sqrt{\left(x_1(0) - \dfrac{\mu_1}{\omega}\right)^2 + x_2^2(0)}}{\Delta}\right].$$

Переходя к исходным обозначениям, будем иметь

$$n = \left[\frac{\omega}{2\, fg\cos\alpha} \sqrt{\left(\omega x(0) - \frac{\mu_1}{\omega}\right)^2 + (\dot{x}(0))^2} \right],$$

где $[x]$ – ближайшее к x и не большее его целое число.

Для рассматриваемой задачи

$$x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = 0{,}5,$$

$$\mu_1 = g\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - f) = 6{,}356, \qquad \omega^2 = \frac{c}{m} = \frac{20\cdot 10^2}{20} = 100.$$

Тогда получим

$$n = \left[\frac{1}{9{,}8\cdot 0{,}008\cdot\sqrt{2}} \sqrt{(6{,}356)^2 + \frac{1}{4}\cdot 100} \right] = [7{,}315] = 7,$$

т. е. число максимальных отклонений от «зоны застоя» $[x_1^+, x_1^-]$ равно 7. Величины этих отклонений каждый раз уменьшаются на $\Delta = \dfrac{2\, fg\cos\alpha}{\omega}$ для x_1 и на

$$\Delta^* = \frac{\Delta}{\omega} = \frac{2\, fg\cos\alpha}{\omega^2} = 0{,}01105 \text{ м} = 1{,}105 \text{ см для } x.$$

Покажем, как получить величину первого максимального отклонения от «зоны застоя», т. е. координату точки B ($x_1(B)$, см. рис. 18.58, б). По условию задачи мы выходим из точки D, для которой $OD = v_0 = 0{,}5$ м/с. Затем точка движется по окружности, радиус которой равен $R = \sqrt{v_0^2 + \dfrac{\mu_1^2}{\omega^2}}$.

Тогда будем иметь $x_1(B) = \dfrac{\mu_1}{\omega}\sqrt{v_0^2 + \dfrac{\mu_1^2}{\omega^2}}$,

а переходя к переменной $x = \dfrac{x_1}{\omega}$, получим

$$x_{\max}^{(1)}(B) = \frac{\mu_1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega}\sqrt{v_0^2 + \frac{\mu_1^2}{\omega^2}} = 14{,}4 \text{ см}.$$

Отклонение от точки равновесия x_1^- будет

$$\Delta_1^- = x_{\max}^{(1)} - \frac{\mu_2}{\omega^2} = 6{,}98 \text{ см}.$$

Отклонение от точки x_1^+ будет $\Delta_1^+ = x_{\max}^{(1)} - \dfrac{\mu_{12}}{\omega^2} = 8$ см, а отклонение от середины отрезка (которое, наверное, подразумевается в условии задачи) будет $\Delta_2 = \dfrac{1}{2}(\Delta_1^- + \Delta_1^+) = 7{,}5$ см. Далее это отклонение будет все время уменьшаться на $\Delta^* = 1{,}105$ см, и мы получим все искомые ответы.

ЗАДАЧА 18.59 (32.59). Тело массой M = 0,5 кг совершает колебания на горизонтальной плоскости под действием двух одинаковых пружин, прикрепленных к телу одним концом и к неподвижной стойке – другим; оси пружин лежат на одной горизонтальной прямой. Коэффициенты жесткости пружин $c_1 = c_2$ = 1,225 Н/см, коэффициент трения при движении тела f = 0,2, при покое f_0 = 0,25. В начальный момент тело было отодвинуто от своего среднего положения O вправо в положение x_0 = 3 см и отпущено без начальной скорости. Найти: 1) область возможных равновесных положений тела – «область застоя»; 2) величину размахов тела; 3) число его размахов; 4) продолжительность каждого из них; 5) положение тела после колебаний.

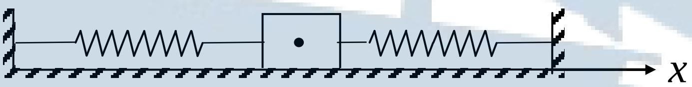


Рис. 18.59

Решение

Направим ось x вправо. Начало координат примем в положении равновесия тела. Пусть λ_0 – начальная деформация пружин. Тогда уравнение движения

$$m\ddot{x} = -c(-\lambda_0 + x) - c(\lambda_0 + x) + F_{\text{тр}},$$

где $F_{\text{тр}}$ – сила трения, которая равна: $F_{\text{тр}} = -fmg \cdot \operatorname{sign}\dot{x}$ при $\dot{x} \neq 0$, а при $\dot{x} = 0$ $|F_{\text{тр}}| \leq f_0 mg$ (т. е. это сила трения покоя). Таким образом,

$$m\ddot{x} = -2cx - fmg \cdot sign\dot{x}, \quad \dot{x} \neq 0,$$

$$m\ddot{x} = -2cx \pm F_{\text{тр}}, \quad \dot{x} = 0, \quad |F_{\text{тр}}| \leq f_0 mg.$$

Область «застоя» (равновесных положений) определяется решениями $-\frac{f_0 mg}{2c} \le x \le \frac{f_0 mg}{2c} = 0{,}5$ см.

Решим уравнение $m\ddot{x} = -2cx \pm fmg$

при начальных условиях $x(0) = x_0 = 3$ см, $\dot{x}(0) = 0$, при $k = \sqrt{\frac{2c}{m}}$,

$$x = A\sin kt + B\cos kt \pm \frac{fmg}{2c},$$

откуда $A = 0$, $B = x_0 \mp \frac{fmg}{2c} = 3 \mp \frac{fmg}{2c}$, $x = 3\cos kt + \frac{fmg}{2c}(1 - \cos kt)$, причем надо выбрать знак «+», так как $\dot{x} = -Bk\sin kt < 0$ (так как $B > 0$ заведомо). Далее, $x = 0$ при $t_1 = T = \frac{\pi}{k} = 0{,}141$ с.

При этом $x(t_1) = -3 + \frac{fmg}{c} = -3 + 0{,}8$ см, а размах от точки $x_0 = 3$ см, будет 3 + 2,2 = 5,2 см.

Далее решение аналогично, только надо брать знак «–» при *f*, начальные условия $x_0 = 2{,}2$ см, $\dot{x}(0) = 0$.

Получим $x = -2{,}2\cos kt - \frac{fmg}{2c}(1 - \cos kt)$,

$$\dot{x} = \left(2{,}2 - \frac{fmg}{2c}\right)k\sin kt < 0.$$

Опять $\dot{x}$ обратится в нуль при $t_1 = \frac{\pi}{k} = 0{,}141$ с, причем

$$x(t_1) = 2{,}2 - \frac{fmg}{c} = 2{,}2 - 0{,}8 = 1{,}4 \text{ см},$$

тогда размах 2,2 + 1,4 = 3,6 см.

Затем будет x = –1,4 + 0,8 = –0,6 см, размах 0,6 – 0,8 = – 0,2 см.

И последнее будет x = –0,6 – 0,8 = – 0,2 см, размах 0,6 – 0,2 = = 0,4 см.

В точке – 0,2 будет остановка, так как эта точка принадлежит интервалу [– 0,5, 0,5] и в этой точке $\dot{x} = 0$.

БГАРФ

ЗАДАЧА 18.60 (32.60). Под действием силы сопротивления R, пропорциональной первой степени скорости ($R = \alpha v$), тело массой m, подвешенное к пружине жесткости c, совершает затухающие колебания. Определить, во сколько раз период затухающих колебаний T превосходит период незатухающих колебаний T_0, если отношение $n/k = 0{,}1$ ($k^2 = c/m$, $n = \alpha/(2m)$).

Решение

Уравнение движения

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = 0$$

имеет вид $x = e^{-\frac{\alpha t}{2m}}\left(A\sin kt + B\cos kt\right)$, где $k = \sqrt{\dfrac{c}{m} - \dfrac{\alpha^2}{4m^2}}$.

Отсюда период затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\frac{2m}{\sqrt{4mc - \alpha^2}},$$

период незатухающих колебаний $T_0 = \dfrac{2\pi}{k_0} = 2\pi\dfrac{2m}{\sqrt{4mc}}$,

откуда

$$\frac{T}{T_0} = \sqrt{\frac{4mc}{4mc - \alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{\alpha^2}{4mc}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0{,}1)^2}} = 1{,}005.$$

ЗАДАЧА 18.61 (32.61). В условиях предыдущей задачи определить, через сколько полных колебаний амплитуда уменьшится в сто раз.

Решение

Имеем $e^{-\frac{\alpha nT}{2m}} = 100$,

$$n = \frac{2m}{\alpha T}\ln 100 = \frac{2m}{\alpha}\frac{\sqrt{4mc - \alpha^2}}{4\pi m}\ln 100 =$$

$= \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{4mc}{\alpha^2} - 1}\ln 100 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{100 - 1}\ln 100 = 7{,}275$ (полных колебаний).

ЗАДАЧА 18.62 (32.62). Для определения сопротивления воды движению модели судна при очень малых скоростях модель M пустили плавать в сосуде, привязав нос и корму посредством двух одинаковых пружин A и B, силы натяжения которых пропорциональны удлинениям. Результаты наблюдений показали, что отклонения модели от положения равновесия после каждого размаха уменьшаются, составляя геометрическую прогрессию, знаменатель которой равен 0,9, а продолжительность каждого размаха T = 0,5 с. Определить силу R сопротивления воды, приходящуюся на каждый килограмм массы модели, при ее скорости равной 1 м/с, предполагая, что сопротивление воды пропорционально первой степени скорости.

Решение

Уравнение движения

$$m\ddot{x}+\alpha\dot{x}+cx=0 \quad \text{или} \quad \ddot{x}+\frac{\alpha}{m}\dot{x}+\frac{c}{m}x=0$$

имеет вид

$$x=e^{-\frac{\alpha t}{2m}}\left(A\sin kt+B\cos kt\right), \quad \text{где } k=\sqrt{\frac{c}{m}-\frac{\alpha^2}{4m^2}}.$$

Отсюда

$$\frac{\alpha T}{2m}=\ln\frac{10}{9} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\alpha}{m}=\frac{2}{T}\ln\frac{10}{9}=0,42\ \text{Н}.$$

ЗАДАЧА 18.63 (32.63). В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения модели, если в начальный момент пружина A была растянута, а пружина B сжата на величину Δl = 4 см и модель была отпущена без начальной скорости.

Решение

Начальные условия движения $x(0)=4$ см, $\dot{x}(0)=0$.

Решение имеет вид $x=e^{-\frac{\alpha t}{2m}}\left(A\sin kt+B\cos kt\right)$.

Постоянные интегрирования ищем из уравнений

$$x(0)=e^{-0,21t}\left(A\sin kt+B\cos kt\right)\Big|_{t=0}=4,$$

$$\dot{x}(0)=e^{-0,21t}\Big[-0,21t\left(A\sin kt+B\cos kt\right)+$$
$$+\left(Ak\sin kt-Bk\cos kt\right)\Big]\Big|_{t=0}=0.$$

Отсюда

$B = 4, \qquad -0{,}21 \cdot B + Ak = 0, \qquad A = \dfrac{0{,}21 \cdot 4}{k},$

где $k = \dfrac{2\pi}{T_0}$.

Период колебаний $T_0 = 2 \cdot 1/2 = 1$с.

Тогда искомая частота колебаний $k = \dfrac{2\pi}{T_0} = \dfrac{2\pi}{1} = 6{,}28\ \text{c}^{-1}$.

ЗАДАЧА 18.64 (32.64). Для определения вязкости жидкости Кулон употреблял следующий метод: подвесив на пружине тонкую пластинку *A*, он заставлял ее колебаться сначала в воздухе, а затем в той жидкости, вязкость которой надлежало определить, и находил продолжительность одного размаха: T_1 – в первом случае и T_2 – во втором. Сила трения между пластинкой и жидкостью может быть выражена формулой $2Skv$, где $2S$ – поверхность пластинки; v – ее скорость; k – коэффициент вязкости. Пренебрегая трением между пластинкой и воздухом, определить коэффициент k по найденным из опыта величинам T_1 и T_2, если масса пластинки равна m.

Решение

Пусть c – жесткость пружины.

Уравнение движения пластинки без сопротивления

$m\ddot{x} + cx = 0$, с сопротивлением $m\ddot{x} + 2kS\dot{x} + cx = 0$.

Период колебаний пластинки без сопротивления

$$T_1 = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}},$$

период колебаний пластинки с сопротивлением

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m^2}{cm - S^2k^2}}.$$

Исключая из выражений для периодов величину c, получим

$$T_2^2 = \pi^2 \frac{1}{\dfrac{c}{m} - \dfrac{S^2k^2}{m^2}} = \pi^2 \frac{1}{\dfrac{\pi^2}{T_1^2} - \dfrac{S^2k^2}{m^2}},$$

откуда $k = \dfrac{\pi m}{T_1T_2}\sqrt{T_2^2 - T_1^2}$.

ЗАДАЧА 18.65 (32.65). Тело массой 5 кг подвешено на пружине, коэффициент жесткости которой равен 2 кН/м. Сопротивление среды пропорционально скорости. Амплитуда после четырех колебаний уменьшилась в 12 раз. Определить период и логарифмический декремент колебаний.

Решение

Уравнение движения

$m\ddot{x}+\alpha\dot{x}+cx=0$ или $\ddot{x}+2n\dot{x}+k^2x=0$,

где $n=\dfrac{\alpha}{2m}$, $k^2=\dfrac{c}{m}$.

Решение уравнения

$x=e^{-nt}\left(A\sin k_1t+B\cos k_1t\right)$,

$k_1=\sqrt{k^2-n^2}$, $T=\dfrac{2\pi}{\sqrt{k^2-n^2}}$.

Кроме того, по условию задачи $e^{4nT}=12$.

Отсюда

$$4nT=\ln 12; \quad 16n^2T^2=(\ln 12)^2; \quad \frac{16n^2 4\pi^2}{k^2-n^2}=(\ln 12)^2;$$

$$64n^2\pi^2=k^2(\ln 12)^2-n^2(\ln 12)^2; \quad n^2=\frac{k^2(\ln 12)^2}{64\pi^2+(\ln 12)^2}=3{,}87.$$

Отсюда $T=0{,}316$ с.

Логарифмический декремент колебаний $\lambda=\dfrac{nT}{2}=0{,}3106$.

ЗАДАЧА 18.66 (32.66). В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения тела, если его подвесили к концу нерастянутой пружины и отпустили без начальной скорости.

Решение

Воспользуемся результатами решения предыдущей задачи.

Коэффициент демпфирования $n=\sqrt{3{,}87}=1{,}97$ с$^{-1}$.

Частота колебаний без демпфирования

$$k=\sqrt{\frac{c}{m}}=\sqrt{\frac{2000}{5}}=20\ ^{-1}.$$

Частота колебаний с демпфированием

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{400 - 3{,}876} = 19{,}9\ ^{-1}.$$

Статическая деформация пружины

$$\lambda_{ст} = \frac{mg}{c} = \frac{5 \cdot 9{,}81}{2000} = 0{,}0245 \text{ м.}$$

Уравнение движения $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0$.

Решение уравнения

$$x = e^{-nt}\left(A\sin k_1 t + B\cos k_1 t\right) = e^{-1{,}97t}\left(A\sin 19{,}9t + B\cos 19{,}9t\right).$$

Начальные условия

$$x(0) = \lambda_{ст} = -0{,}0245 \text{ м}, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Выражение для скорости точки

$$x = -1{,}97e^{-1{,}97t}\left(A\sin 19{,}9t + B\cos 19{,}9t\right) +$$
$$+ e^{-1{,}97t}\left(19{,}9A\cos 19{,}9t - 19{,}9B\sin 19{,}9t\right).$$

Подставляя сюда начальные условия, получим

A = – 0,00242 м, B = – 0,245 м.

Окончательно,

$$x = e^{-1{,}97t}\left(-0{,}242\sin 19{,}9t - 2{,}45\cos 19{,}9t\right), \text{ см.}$$

ЗАДАЧА 18.67 (32.67). Тело массы 6 кг, подвешенное на пружине, при отсутствии сопротивления колеблется с периодом T = 0,4π с, а если действует сопротивление, пропорциональное первой степени скорости, с периодом T_1 = 0,5π с. Найти коэффициент пропорциональности α в выражении силы сопротивления R = – αv и определить движение тела, если в начальный момент пружина была растянута из положения равновесия на 4 см и тело представлено самому себе.

Решение

Уравнение движения $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0$.

Период колебаний без демпфирования

$$T = \frac{2\pi}{k} = 0{,}4\pi,$$

откуда $k = \dfrac{2\pi}{0{,}4\pi} = 5 \text{ с}^{-1}$.

БГАРФ

Частота колебаний $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$,

откуда $c = k^2 m = 5^2 \cdot 6 = 150$ Н/м.

Период колебаний с демпфированием

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} = 0{,}5\pi,$$

откуда $n = \sqrt{k^2 - \dfrac{4\pi^2}{T_1^2}} = \sqrt{5^2 - \dfrac{4\pi^2}{(0{,}5\pi)^2}} = 3\ \text{с}^{-1}$.

Получили $n < k$ (случай малого сопротивления).

Частота колебаний с демпфированием

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4\ \text{с}^{-1}.$$

Решение уравнения в этом случае

$$x = e^{-nt}\left(A\sin k_1 t + B\cos k_1 t\right) = e^{-3t}\left(A\sin 4t + B\cos 4t\right).$$

Начальные условия $x(0) = 4$ см, $\dot{x}(0) = 0$.

Отсюда находим постоянные интегрирования

$A = 3$ см, $B = 4$ см.

Решение уравнения $x = e^{-3t}\left(3\sin 4t + 4\cos 4t\right)$.

Найдем теперь решение в другой, амплитудной, форме

$$x = Ce^{-3t}(\sin 4t + \alpha).$$

$$C_1 = C\sin\alpha, \qquad C_2 = C\cos\alpha,$$

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\ \text{см}.$$

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{C_1}{C_2} = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}.$$

Окончательно, $x = 5e^{-3t}\sin\left(4t + \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}\right)$.

ЗАДАЧА 18.68 (32.68). Тело массой 1,96 кг, подвешенное на пружине, которая силой 4,9 Н растягивается на 10 см, при движении встречает сопротивление, пропорциональное первой степени скорости и при скорости 1 м/с равное 19,6 Н. В начальный момент пружина растянута из положения равновесия на 5 см и тело пришло в движение без начальной скорости. Найти закон этого движения.

БГАРФ

Решение

Жесткость пружины $c = \dfrac{4{,}9}{0{,}1} = 49$ Н/м.

Коэффициент демпфирования

$\alpha = \dfrac{19{,}6}{1} = 19{,}6\,\dfrac{\text{Н}\cdot\text{с}}{\text{м}}$.

Уравнение движения $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0$.

Здесь

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{49}{1{,}96}} = 5\ \text{с}^{-1}.$$

$$n = \frac{\alpha}{2m} = \frac{19{,}6}{2\cdot 1{,}96} = 5\ \text{с}^{-1}.$$

Получили $n = k$ – предельный случай.

Решение уравнения ищем в виде $x = e^{-nt}(At + B)$.

Скорость точки $\dot{x} = e^{-nt}(-Ant - nB + A)$.

Подставляя сюда начальные условия, получим

$A = 25$ см, $B = 5$ см и $x = 5e^{-nt}(5t + 1)$.

Точка совершает апериодическое движение.

ЗАДАЧА 18.69 (32.69). Грузы массой m_1 = 2 кг и m_2 = 3 кг подвешены в положении статического равновесия к пружине, коэффициент жесткости которой c = 392 Н/м. Масляный демпфер вызывает силу сопротивления, пропорциональную первой степени скорости и равную $R = -\alpha v$, где α = 98 Н·с/м. Груз m_2 сняли. Найти после этого уравнение движения груза m_1.

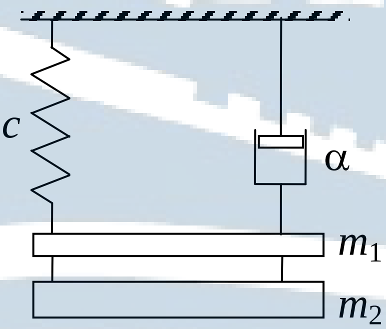


Рис. 18.69

Решение

Деформация обеих пружин в положении равновесия

$$\lambda_1 = \frac{(m_1 + m_2)}{c} = \frac{2+3}{392} = 0{,}125 \text{ м},$$

а деформация пружины только с грузом m_1

$$\lambda_2 = \frac{m_1}{c} = \frac{2}{392} = 0{,}0510 \text{ м}.$$

Тогда начальное условие для груза 1 (после снятия груза 2)

$x(0)=\lambda_2 - \lambda_1 = 0{,}075$ м (если, конечно, подразумевается, что x отсчитывается от нового положения равновесия груза 1 вниз) и $\dot{x}(0) = 0$.

Уравнение движения

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0,$$

где $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{392}{2}} = 14 \text{ с}^{-1}.$

$$n = \frac{\alpha}{2m} = \frac{98}{2\cdot 2} = 24{,}5 \text{ с}^{-1}.$$

Характеристическое уравнение

$p^2 + 49p + 196 = 0$, корни которого

$$v_{1,2} = -24{,}5 \pm \sqrt{24{,}5^2 - 196} = -24{,}5 \pm 20{,}1.$$

Решение уравнения

$$x = C_1 e^{-4{,}39t} + C_2 e^{-44{,}5t},$$

скорость точки $\dot{x} = -4{,}39 C_1 e^{-4{,}39t} - 44{,}5 C_2 e^{-44{,}5t}$.

Подставляя сюда начальные условия, получим

$C_1 = 8{,}32$ см, $\qquad C_2 = -\,0{,}82$ см

и $x = 8{,}32 e^{-4{,}39t} - 0{,}82 C_1 e^{-44{,}5t}$, см.

ЗАДАЧА 18.70 (32.70). Статическое удлинение пружины под действием груза веса P равно f. На колеблющийся груз действует сила сопротивления среды, пропорциональная скорости. Определить наименьшее значение коэффициента сопротивления α, при котором процесс движения будет апериодическим. Найти период затухающих колебаний, если коэффициент сопротивления меньше найденного значения.

Решение

Уравнение движения

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0,$$

где $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{P}{fm}}$ с$^{-1}$, так как $c = \dfrac{P}{f}$, $n = \dfrac{\alpha}{2m}$ с$^{-1}$.

Корни характеристического уравнения

$$\nu_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}\,.$$

Колебания будут затухающими и апериодическими при $n \geq k$, т.е. $\dfrac{\alpha^2}{4m^2} \geq \dfrac{P}{fm}$, $\alpha \geq 2\sqrt{\dfrac{Pm}{f}} = 2\sqrt{\dfrac{P^2 m}{gf}} = 2\dfrac{P}{\sqrt{gf}}$.

Если же $n < k$, то процесс будет периодическим (затухающим) с периодом

$$T = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{g}{f} - \dfrac{\alpha^2}{4m^2}}}, \quad \text{где } m = \frac{P}{g}.$$

ЗАДАЧА 18.71 (32.71). Груз массой 100 г, подвешенный к концу пружины, движется в жидкости. Коэффициент жесткости пружины c = 19,6 Н/м. Сила сопротивления движению пропорциональна первой степени скорости груза: $R = \alpha v$, где α = 3,5 Н·с/м.

Найти уравнение движения груза, если в начальный момент груз был смещен из положения равновесия на x_0 = 1 см и отпущен без начальной скорости.

Решение

Уравнение движения

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0,$$

где $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{19{,}6}{0{,}1}} = 14$ с$^{-1}$, $n = \dfrac{\alpha}{2m} = \dfrac{3{,}5}{2 \cdot 0{,}1} = 17{,}5$ с$^{-1}$.

Корни характеристического уравнения

$$\nu_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2} = -17{,}5 \pm \sqrt{17{,}5^2 - 14^2} = -17{,}5 \pm 10{,}5.$$

Подставляя сюда начальные условия, получим

C_1 = 1,32 см, C_2 = – 0,32 см и $x = 1{,}32e^{-7t} - 0{,}32e^{-28t}$, см.

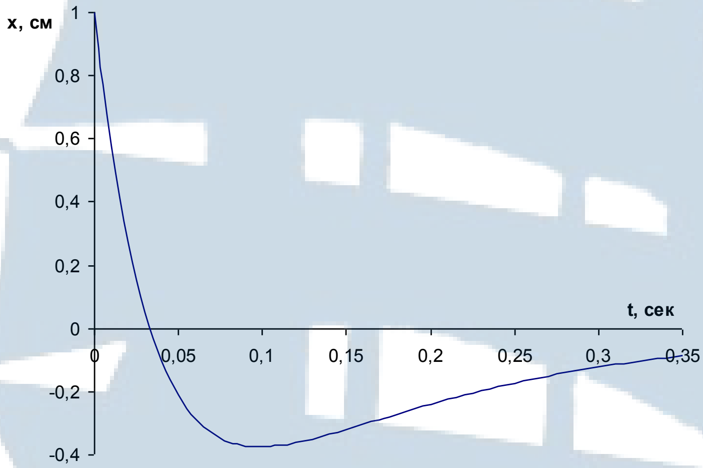
ЗАДАЧА 18.72 (32.72). В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения груза и построить график зависимости перемещения от времени, если в начальный момент груз смещен из положения статического равновесия на расстояние x_0 = 1 см и ему сообщена начальная скорость 50 см/с в направлении, противоположном смещению.

Решение

Здесь начальные условия другие $x(0) = 1\,\text{см}$, $\dot{x}(0) = -50\ \text{см/с}$.

Отсюда

$$C_1 = -\frac{22}{21}\ \text{см},\quad C_2 = \frac{43}{21}\ \text{см}\quad \text{и}\quad x = -\frac{22}{21}e^{-7t} + \frac{43}{21}e^{-28t},\ \text{см}.$$



ЗАДАЧА 18.73 (32.73). В условиях задачи 32.71 в начальный момент груз смещен из положения равновесия на расстояние x_0 = 5 см и ему сообщена начальная скорость v_0 = 100 см/с в том же направлении. Найти уравнение движения груза и построить график зависимости перемещения от времени.

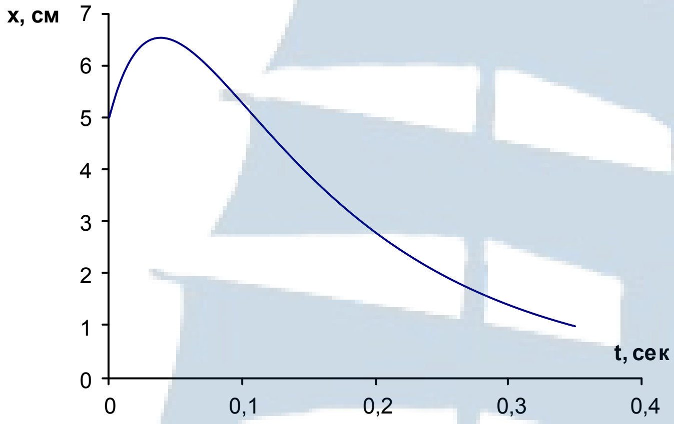
Решение

Здесь начальные условия другие $x(0) = 5\,\text{см}$, $\dot{x}(0) = 100\ \text{см/с}$.

Решение уравнения $x = C_1e^{-7t} + C_2e^{-28t}$,

скорость точки $\dot{x} = -7C_1e^{-7t} - 28C_2e^{-28t}$.

Отсюда C_1 = 11,4 см, C_2 = –6,4 см и $x = 11{,}4e^{-7t} - 6{,}4e^{-28t}$, см.



ЗАДАЧА 18.74 (32.74). Составить дифференциальное уравнение малых колебаний тяжелой точки *A*, находящейся на конце стержня, закрепленного шарнирно в точке *O*, считая силу сопротивления среды пропорциональной первой степени скорости с коэффициентом пропорциональности α, и определить частоту затухающих колебаний. Вес точки *A* равен *P*, коэффициент жесткости пружины *c*, длина стержня *l*, расстояние *OB* = *b*. Массой стержня пренебречь. В положении равновесия стержень горизонтален. При каком значении коэффициента α движение будет апериодическим?

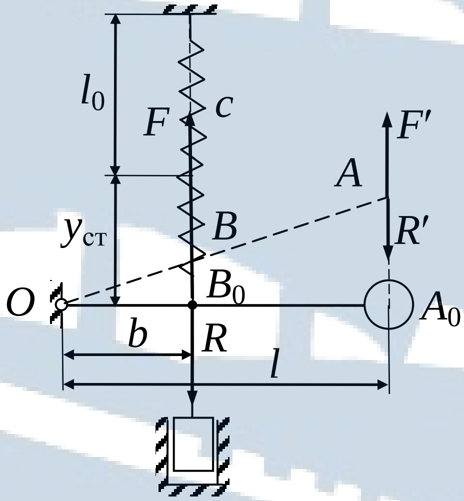


Рис. 18.74

Решение

Уравнение движения $m\ddot{y} = F - R$.

Сила упругости (приведенная к точке *A*) $F' = F\dfrac{b}{l} = cy\left(\dfrac{b}{l}\right)^2$, сила сопротивления (приведенная к точке A)

$$R' = R\left(\frac{b}{l}\right) = \alpha\dot{y}\left(\frac{b}{l}\right)^2.$$

Начало координат соответствует горизонтальному положению стержня.

Теперь

$$m\ddot{y} + \alpha\dot{y}\left(\frac{b}{l}\right)^2 + cy\left(\frac{b}{l}\right)^2 = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{y} + 2n\dot{y} + k^2 y = 0,$$

где $n = \dfrac{\alpha b^2 g}{2l^2 P}$, $\qquad k = \dfrac{b}{l}\sqrt{\dfrac{cg}{P}}$,

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{\frac{b^2 cg}{l^2 P} - \frac{\alpha^2 b^4 g^2}{4l^4 P^2}} = \frac{b}{l}\sqrt{\frac{cg}{P} - \left(\frac{\alpha bg}{2lP}\right)^2}.$$

Условие апериодичности движения $n \geq k$

$$\frac{\alpha b^2 g}{2l^2 P} \geq \frac{b}{l}\sqrt{\frac{cg}{P}}, \text{ отсюда } \alpha \geq \frac{2l}{b}\sqrt{\frac{cP}{g}}.$$

ЗАДАЧА 18.75 (32.75). При колебаниях груза массой 20 кг, подвешенного на пружине, было замечено, что наибольшее отклонение после 10 полных колебаний уменьшилось вдвое. Груз совершил 10 полных колебаний за 9 с. Как велик коэффициент сопротивления α (при сопротивлении среды, пропорциональном первой степени скорости) и каково значение коэффициента жесткости c?

Решение

Уравнение движения

$$m\ddot{y} = P_x - F_x - R_x \quad \text{или} \quad m\ddot{y} = P_x - c(f_{\text{ст}} + x) - \alpha v_x.$$

Принимая начало координат в положении статического равновесия, получим

$$m\ddot{x} + cx + \alpha\dot{x} = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0,$$

где $k^2 = \dfrac{c}{m}$, $\qquad 2n = \dfrac{\alpha}{m}$.

Решение этого уравнения при малом сопротивлении

$$x = e^{-nt}(C_1 \sin k_1 t + C_2 \cos k_1 t), \text{ где } k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}.$$

Тогда $\dfrac{e^{-nt_1}}{e^{-n(t_1+10T_1)}} = 2$,

где $T_1 = \dfrac{t}{N} = \dfrac{9}{10} = 0{,}9$ с – период колебаний точки; $e^{n10T_1} = 2$;

$10nT_1 = \ln 2$; $\quad 10\dfrac{\alpha}{2m}T_1 = \ln 2$,

откуда $\alpha = \dfrac{2m\ln 2}{10T_1} = \dfrac{2\cdot 20\cdot \ln 2}{10\cdot 0{,}9} = 3{,}08$ Н·с/м.

Теперь $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$, $\quad \dfrac{2\pi}{T_1} = \sqrt{\dfrac{c}{m} - \dfrac{\alpha}{2m}}$,

откуда $c = \dfrac{4\pi^2 m}{T_1^2} - \dfrac{\alpha^2}{4m} = \dfrac{4\cdot 20\cdot \pi^2}{0{,}9^2} - \dfrac{3{,}08^2}{4\cdot 20} = 974{,}9$ Н/м.

ЗАДАЧА 18.76 (32.76). Составить дифференциальное уравнение малых колебаний точки A и определить частоту затухающих колебаний. Вес точки A равен P, коэффициент жесткости пружины c, расстояние $OA = b$, $OB = l$. Сила сопротивления среды пропорциональна первой степени скорости, коэффициент пропорциональности равен α. Массой стержня OB, шарнирно закрепленного в точке O, пренебречь. В положении равновесия стержень горизонтален. При каком значении коэффициента α движение будет апериодическим?

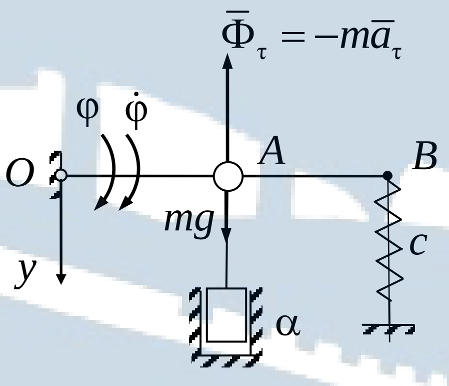


Рис. 18.76

Решение

Для решения задачи воспользуемся решением задачи 32.74, т.е. составим уравнение моментов сил (включая и силы инерции) относительно точки O.

$$m(b\ddot{\varphi})b + \alpha(b\dot{\varphi})b - mgb + c(\lambda_0 + l\varphi)l = 0.$$

Поскольку начало координат принимается в положении равновесия (φ = 0), то $-mgb + c\lambda_0 l = 0$, где λ_0 – статическое удлинение пружины, получим $mb^2\ddot{\varphi} + \alpha b^2\dot{\varphi} + cl^2 = 0$.

Переходя к вертикальной координате y, получим

$$\frac{P}{g}\ddot{y} + \alpha\dot{y} + c\frac{l^2}{b^2}y = 0,$$

откуда частота $k_1 = \sqrt{\frac{cl^2 g}{Pb^2} - \frac{\alpha^2 l^2}{4P^2}}$,

а движение будет апериодическим, если под корнем будет отрицательное значение, т. е. $\alpha \geq \frac{2l}{b}\sqrt{\frac{cP}{g}}$.

ЗАДАЧА 18.77 (32.77). Тело массой 5 кг подвешено к концу пружины жесткости 20 Н/м и помещено в вязкую среду. Период его колебаний в этом случае равен 10 с. Найти постоянную демпфирования, логарифмический декремент колебаний и период свободных колебаний.

Решение

Коэффициент демпфирования $n = \frac{\alpha}{2m}$.

Частота колебаний $k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{20}{5}} = 2$ с$^{-1}$.

Теперь из выражения $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ найдем, учитывая, что $T_1 = \frac{2\pi}{k_1}$

$$n = \sqrt{k^2 - \frac{4\pi^2}{T_1^2}} = \sqrt{4 - \frac{4\pi^2}{10^2}} = 1{,}898, \text{ с}^{-1} \quad \text{и}$$

$\alpha = 2mn = 2 \cdot 5 \cdot 1{,}898 = 19$ Н·с/м.

Логарифмический декремент колебаний

$$\lambda = \frac{nT_1}{2} = \frac{1{,}898 \cdot 10}{2} = 3{,}8.$$

Период свободных колебаний $T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2} = 3{,}14$ с.

ЗАДАЧА 18.78 (32.78). Найти уравнение прямолинейного движения точки массой m, находящейся под действием восстанавливающей силы $Q = -cx$ и постоянной силы F_0. В начальный момент $t = 0$, $x_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = 0$. Найти также период колебаний.

Решение

Уравнение движения

$$m\ddot{x} = Q + F_0 = -cx + F_0 \quad \text{или} \quad \ddot{x} + k^2 x = \frac{F_0}{c}.$$

Начало координат принимаем в положении статического равновесия.

Решение ищем в виде

$$x = \frac{F_0}{c} + A\sin kt + B\cos kt.$$

Скорость точки

$$\dot{x} = Ak\cos kt - Bk\sin kt.$$

Из нулевых начальных условий отсюда получим

$$A = 0, \qquad B = -F_0/k \qquad \text{и} \qquad x = \frac{F_0}{c}(1 - \cos kt).$$

Период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{c}}$.

ЗАДАЧА 18.79 (32.79). Определить уравнение прямолинейного движения точки массой m, находящейся под действием восстанавливающей силы $Q = -cx$ и силы $F = \alpha t$. В начальный момент точка находится в положении статического равновесия и скорость ее равна нулю.

Решение

Уравнение движения $m\ddot{x} = -cx + \alpha t$.

Начало координат принимаем в положении статического равновесия.

Начальные условия $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

Решение уравнения ищем в виде $x = Dt + A\sin kt + B\cos kt$.

Подставляя это в исходное уравнение, получим

$$0 = -cDt + \alpha t, \text{ откуда } D = \frac{\alpha}{c} \quad \text{и} \quad x = \frac{\alpha}{c}t + A\sin kt + B\cos kt.$$

БГАРФ

Константы A и B найдем из начальных условий

$$B = 0, \qquad A = -\frac{D}{k} = -\frac{\alpha}{kc}.$$

Теперь $x = \frac{\alpha}{c}t - \frac{\alpha}{kc}\sin kt$.

Учитывая, что $c = mk^2$, окончательно получим

$$x = \frac{\alpha}{mk^3}(kt - \sin kt).$$

ЗАДАЧА 18.80 (32.80). Найти уравнение прямолинейного движения точки массой m, на которую действует восстанавливающая сила $Q = -cx$ и сила $F = F_0 e^{-\alpha t}$, если в начальный момент точка находилась в положении равновесия в состоянии покоя.

Решение

Уравнение движения $m\ddot{x} = -cx + F_0 e^{-\alpha t}$.

Начало координат принимаем в положении статического равновесия.

Начальные условия $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

Решение уравнения ищем в виде $x = De^{-\alpha t} + A\sin kt + B\cos kt$.

Подставляя это в исходное уравнение, получим

$$mD\alpha^2 e^{-\alpha t} = -cDe^{-\alpha t} + F_0 e^{-\alpha t}, \text{ откуда } D = \frac{F_0}{m\alpha^2 + c} \text{ и}$$

$$x = \frac{F_0}{m\alpha^2 + c}e^{-\alpha t} + A\sin kt + B\cos kt.$$

Скорость точки

$$\dot{x} = -\frac{F_0\alpha}{m\alpha^2 + c}e^{-\alpha t} + Ak\cos kt - Bk\sin kt.$$

Учитывая начальные условия, получим

$$0 = B + \frac{F_0}{m\alpha^2 + c}, \qquad 0 = Ak - \frac{F_0\alpha}{m\alpha^2 + c},$$

откуда $B = -\frac{F_0}{m\alpha^2 + c}$, $\quad A = \frac{F_0\alpha}{k(m\alpha^2 + c)}$

и, окончательно, $x = \frac{F_0}{m\alpha^2 + c}\left(e^{-\alpha t} + \frac{\alpha}{k}\sin kt - \cos kt\right).$

ЗАДАЧА 18.81 (32.81). На пружине, коэффициент жесткости которой c = 19,6 Н/м, подвешен магнитный стержень массы 100 г. Нижний конец магнита проходит через катушку, по которой идет переменный ток $i = 20\sin 8\pi t$ А. Ток идет с момента времени t = 0, втягивая стержень в соленоид; до этого момента магнитный стержень висел на пружине неподвижно. Сила взаимодействия между магнитом и катушкой определяется равенством $F = 0{,}016\pi i$ Н. Определить вынужденные колебания магнита.

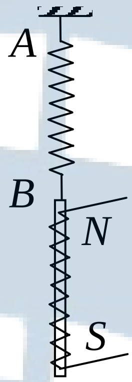


Рис. 18.81

Решение

Вертикальную координату x отсчитываем от положения равновесия вниз. Тогда уравнение движения

$$m\ddot{x} = -cx + F = -cx + 0{,}016\pi \cdot 20\sin 8\pi t.$$

Решение ищем в виде $x = A\sin 8\pi t + B\cos 8\pi t$.

После подстановки этого выражения и приравнивания коэффициентов в левой и правой частях уравнения, получим

$$B = 0, \qquad mA(8\pi)^2 = -cA + 0{,}016\pi \cdot 20,$$

откуда $A = \dfrac{0{,}016\pi \cdot 20}{19{,}6 - \dfrac{1}{10}64\pi^2} = -0{,}023$ м.

Таким образом, уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$x = -2{,}3\sin 8\pi t \text{ см}.$$

ЗАДАЧА 18.82 (32.82). В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения магнитного стержня, если его подвесили к концу нерастянутой пружины и отпустили без начальной скорости.

Решение

В задаче меняются начальные условия

$$x(0) = -\frac{mg}{c} = -\frac{0{,}1 \cdot 9{,}8}{19{,}6} = -0{,}05 \text{ м}, \qquad \dot{x}(0) = 0.$$

Используя частное решение, полученное в предыдущей задаче, ищем решение в виде

$$x = A\sin kt + B\cos kt - 2{,}3\sin 8\pi t,$$

где $k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{19{,}6}{0{,}1}} = 14 \text{ с}^{-1}$.

Скорость точки

$$\dot{x} = Ak\sin kt - Bk\cos kt - 2{,}3 \cdot 8\pi\cos 8\pi t.$$

Учитывая начальные условия, получим

$$-5 = B, \qquad 0 = Ak - 2{,}3 \cdot 8\pi,$$

откуда $B = -5$ см, $\qquad A = \frac{2{,}3 \cdot 8\pi}{14} = 4{,}13$ см

и, окончательно, $x = 4{,}13\sin 14t - 5\cos 14t - 2{,}3\sin 8\pi t$.

ЗАДАЧА 18.83 (32.83). В условиях задачи 32.81 найти уравнение движения магнитного стержня, если ему в положении статического равновесия сообщили начальную скорость $v_0 = 5$ см/с.

Решение

Здесь начальные условия

$$x(0) = 0 \text{ м}, \qquad \dot{x}(0) = 5 \text{ см/с}.$$

Ищем решение в виде

$$x = A\sin kt + B\cos kt - 2{,}3\sin 8\pi t.$$

Скорость точки

$$\dot{x} = Ak\sin kt - Bk\cos kt - 2{,}3 \cdot 8\pi\cos 8\pi t.$$

Поступая аналогично решению предыдущей задачи, получим

$$0 = B, \qquad 5 = Ak - 2{,}3 \cdot 8\pi,$$

откуда $B = 0$, $\qquad A = \frac{5 + 2{,}3 \cdot 8\pi}{14} = 4{,}48$ см

и, окончательно, $x = 4{,}48\sin 14t - 2{,}3\sin 8\pi t$.

ЗАДАЧА 18.84 (32.84). Гиря M подвешена на пружине AB, верхний конец которой совершает гармонические колебания по вертикальной прямой амплитуды a и частоты n, так что $O_1C = a\sin nt$ см. Определить вынужденные колебания гири M при следующих данных: масса гири равна 400 г, от действия силы 39,2 Н пружина удлиняется на 1 м, $a = 2$ см, $n = 7$ рад/с.

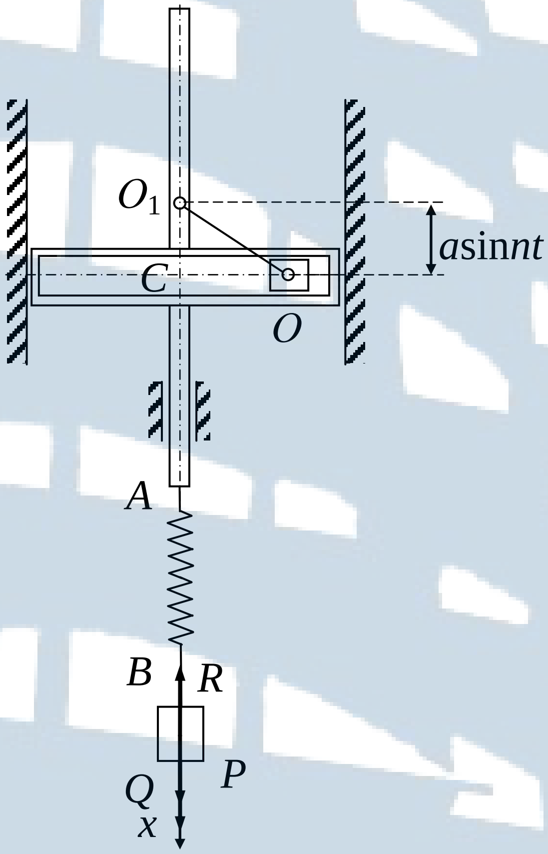


Рис. 18.84

Решение

Вертикальную координату x отсчитываем от положения равновесия вниз. Тогда уравнение движения

$$m\ddot{x} = P + Q - R,$$

где P – вес гири; Q – вынуждающая сила; R – восстанавливающая сила, или $m\ddot{x} = P + c(a\sin nt) - c(f_{\text{ст}} + x)$.

Но $P - cf_{\text{ст}} = 0$ и уравнение движения принимает вид $m\ddot{x} = ca\sin nt - cx$.

Уравнение вынужденных колебаний является частным решением этого уравнения, и имеет вид $x = H\sin nt$.

Подставляя это решение в исходное уравнение, получим

$$-n^2 H\sin nt + \frac{c}{m}H\sin nt = \frac{ca}{m}\sin nt,$$

откуда $H = \dfrac{ac}{c-n^2m} = \dfrac{0{,}02\cdot 39{,}2}{39{,}2-7^2\cdot 0{,}4} = 0{,}04$ м.

Окончательно, $x = 0{,}04\sin 7t$.

ЗАДАЧА 18.85 (32.85). Определить движение гири *M* (см. задачу 32.84), подвешенной на пружине *AB*, верхний конец которой *A* совершает гармонические колебания по вертикали амплитуды *a* и круговой частоты *k*, статическое растяжение пружины под действием веса гири равно δ. В начальный момент точка *A* занимает свое среднее положение, а гиря *M* находится в покое; начальное положение гири принять за начало координат, а ось *Ox* направить по вертикали вниз.

Решение

Будем отсчитывать x_B – координату точки *B* – от положения ее статического равновесия.

Пусть l_0 – удлинение пружины, уравновешивающее груз *mg*: $mg = c\lambda_0 = c\delta$. Тогда уравнение движения

$$m\ddot{x}_B = mg - c(l_0 + x_B - x_A) = -cx_B + ca\sin kt.$$

Решение уравнения ищем в виде

$$x_B = A\sin\omega t + B\cos\omega t + D\sin kt.$$

Здесь $\omega = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{g}{\delta}}$.

Чтобы найти *D*, подставим это решение в исходное уравнение. Получим $-Dmk^2\sin kt = -cD\sin kt + ca\sin kt$,

откуда $D = \dfrac{ca}{c-mk^2} = \dfrac{\left(\dfrac{mg}{\delta}\right)a}{\dfrac{mg}{\delta}-mk^2} = -\dfrac{ga}{\delta k^2 - g}$.

Определим константы интегрирования *A* и *B*, используя начальные условия $x_B(0) = 0$ и $\dot{x}_B(0) = 0$.

Получим $0 = B,\quad 0 = A\omega + kD,\quad A = -\dfrac{k}{\omega}D = \dfrac{ga}{\delta k^2 - g}\cdot\dfrac{k\sqrt{\delta}}{\sqrt{g}}$.

Теперь $x_B = \dfrac{ga}{\delta k^2 - g}\left[k\sqrt{\dfrac{\delta}{g}}\sin\sqrt{\dfrac{\delta}{g}}t - \sin kt\right]$ при $k^2 \neq \dfrac{g}{\delta}$.

Выясним, что будет при $k^2 \to \dfrac{g}{\delta}$. Обозначим $k_1 = \sqrt{\dfrac{g}{\delta}}$.

Тогда $x_B = \dfrac{a}{\left(\dfrac{k^2}{k_1^2}\right) - 1}\left[\dfrac{k}{k_1}\sin k_1 t - \sin kt\right]$.

Введем параметр α по формуле $k = (1+\alpha)k_1$ и будем затем устремлять $\alpha \to 0$ при фиксированных l и t.

Имеем $x_B = \dfrac{a}{(1+\alpha)^2 - 1}\left[(1+\alpha)\sin k_1 t - \sin(k_1 t + \alpha k_1 t\right]$.

Используя разложение

$\sin(k_1 t + \alpha k_1 t) = \sin k_1 t + (k_1 t\cos k_1 t)\alpha + O(\alpha^2)$,

получим $\lim\limits_{\alpha\to 0} x_B = \lim\limits_{\alpha\to 0}\left[\dfrac{\alpha}{2\alpha + \alpha^2}\left(\alpha\sin k_1 t - \alpha k_1 t\cos k_1 t + O(\alpha^2)\right)\right] =$

$$= \lim_{\alpha\to 0}\left[\frac{a}{2 + \alpha}\left(\sin k_1 t - k_1 t\cos k_1 t + O(\alpha)\right)\right] =$$

$= \dfrac{a}{2}\left(\sin k_1 t - k_1 t\cos k_1 t\right)$, где $k_1 = \sqrt{\dfrac{g}{\delta}} = k$.

ЗАДАЧА 18.86 (32.86). Статический прогиб рессор груженого товарного вагона $\Delta l_{ст}$ = 5 см. Определить критическую скорость движения вагона, при которой начнется «галопирование» вагона, если на стыках рельсов вагон испытывает толчки, вызывающие вынужденные колебания вагона на рессорах; длина рельсов L = 12 м.

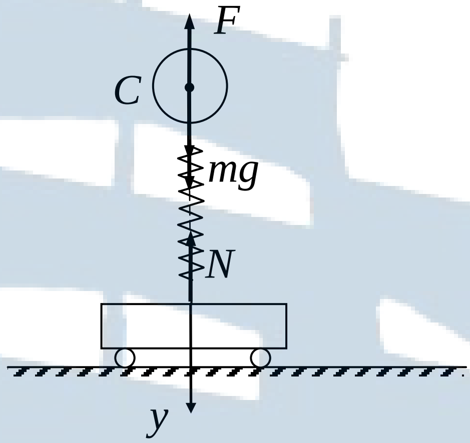


Рис. 18.86

Решение

Поместим начало координат в положении статического равновесия вагона. Вертикальное движение вагона определяется дифференциальным уравнением $\ddot{y} + \dfrac{c}{m} y = \dfrac{N_0}{m} \sin pt$.

Здесь $N = N_0 \sin pt$ нормальная реакция со стороны рельсов. Частота вынужденных колебаний вагона $p = \dfrac{2\pi}{\frac{L}{v}} \left(\dfrac{1}{c} \right)$.

«Галопирование» вагона (резонанс) произойдет при совпадении собственной и вынуждающей частот $p = k$. Поэтому решим уравнение $\sqrt{\dfrac{c}{m}} = \dfrac{2\pi}{L} v$,

где жесткость пружины (рессоры) определяется уравнением

$$mg = c\Delta l_{\text{ст}}, \qquad \sqrt{\frac{g}{\Delta l_{\text{ст}}}} = \frac{2\pi}{L} v,$$

откуда $v = \dfrac{L}{2\pi} \sqrt{\dfrac{g}{\Delta l_{\text{ст}}}} = \dfrac{12}{2\pi} \sqrt{\dfrac{9,81}{0,05}} = 26,7$ м/с или 96 км/час.

ЗАДАЧА 18.87 (32.87). Индикатор машины состоит из цилиндра *A*, в котором ходит поршень *B*, упирающийся в пружину *D*; с поршнем соединен стержень *BC*, к которому прикреплен пишущий штифт *C*. Предполагая, что давление пара, выраженное в паскалях, изменяется согласно формуле $p = 10^5(4 + 3\sin 2\pi t/T)$, где T – время одного оборота вала, определить амплитуду вынужденных колебаний штифта C, если вал совершает 180 об/мин, при следующих данных: площадь поршня индикатора σ = 4 см^2, масса подвижной части индикатора 1 кг, пружина сжимается на 1 см силой 29,4 Н.

Решение

Дифференциальное уравнение движения поршня

$$m\ddot{x} = \sigma p - Q - cx = -c(x + f_{\text{ст}}) + 16 + 12\sin 2\pi\nu t =$$
$$= 12\sin 2\pi\nu t - cx.$$

Здесь ν – частота вращения вала. Тогда $T = \dfrac{1}{\nu} = \dfrac{600}{1800} = \dfrac{1}{3}$ с.

Здесь учтено, что в положении равновесия $0 = -cf_{\text{ст}} + 16$.

Перепишем уравнение в виде $\ddot{x} + cx = p_0 \sin 6\pi t$.

Общее решение этого уравнения нас не интересует. Частное решение будем искать в виде $x = A\sin 6\pi t$.

Подставляя это решение в исходное уравнение, получим

$$-36\pi^2 \sin 6\pi t + cA\sin 6\pi t = p_0 \sin 6\pi t,$$

откуда $A = \dfrac{p_0}{c - 36\pi^2} = \dfrac{12 \cdot 9,81}{29,4 \cdot 100 - 36\pi^2} = 0,0454$ м.

ЗАДАЧА 18.88(32.88) В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения штифта C, если в начальный момент система находилась в покое в положении статического равновесия.

Решение

Начальные условия $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = 0$.

Решение уравнения ищем в виде

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt + B\sin(bt - \varepsilon).$$

Так как $b < k$, то сдвиг фаз ε = 0.

Скорость точки

$$\dot{x} = kC_1 \sin kt - kC_2 \sin kt + bB\cos bt.$$

Подставляя начальные условия, получим

$$C_1 = -\frac{bB}{k} = -\frac{0,0464 \cdot 6\pi}{54,2} = -0,016 \text{ м}, \qquad C_2 = 0.$$

Окончательно уравнение движения штифта

$$x = -0,016\sin 54,2t + 0,0464\sin 6\pi t \text{ м}.$$

ЗАДАЧА 18.89 (32.89). Груз массой m = 200 г, подвешенный к пружине, коэффициент жесткости которой 9,8 Н/см находится под действием силы $S = H\sin pt$, где H = 20 Н, p = 50 рад/с. В начальный момент x_0 = 2 см, v_0 = 10 см/с. Начало координат выбрано в положении статического равновесия. Найти уравнение движения груза.

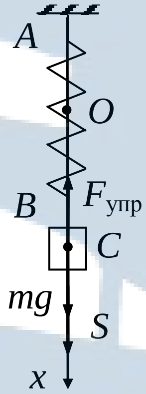


Рис. 18.89

Решение

Направим ось x вертикально вниз. Начало координат примем в положении статического равновесия груза при отсутствии возмущающей силы.

Уравнение равновесия груза $mg - c\lambda_{ст} = 0$. Отсюда $\lambda_{ст} = \dfrac{mg}{c}$.

Уравнение движения груза $m\ddot{x} = mg - c(x + \lambda_{ст}) + S$,

которое перепишем в виде $m\ddot{x} + k^2 x = h\sin pt$,

где $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{980}{0,2}} = 70\ \text{с}^{-1}$; $p = 50\ \text{с}^{-1}$; $h = \dfrac{H}{m} = \dfrac{20}{0,2} = 100\ \text{с}^{-1}$.

Решение уравнения ищем в виде

$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt + B\sin(pt - \varepsilon)$.

Амплитуда вынужденных колебаний

$$B = \frac{h}{k^2 - p^2} = \frac{100}{70^2 - 50^2} = 0,0417\ \text{м}.$$

Так как $p < k,$ то сдвиг фаз $\varepsilon = 0$.

Скорость точки $\dot{x} = kC_1 \sin kt - kC_2 \sin kt + bB\cos bt$.

Подставляя начальные условия $x_0 = 0{,}02$ м и $\dot{x}_0 = 0{,}1$ м/с, получим:

$$0{,}1 = 70C_1 + 0{,}0417 \cdot 50 \text{ м}; \quad C_2 = 0{,}02 \text{ м}; \quad C_1 = -0{,}0283 \text{ м}.$$

Искомое уравнение движения

$$x = -2{,}83\sin kt + 2\cos kt + 4{,}17\sin 50t \text{, см.}$$

ЗАДАЧА 18.90 (32.90). В условиях предыдущей задачи изменилась частота возмущающей силы, получив значение *p* = 70 рад/с. Определить уравнение движения груза.

Решение

Частота возмущающей силы *p* теперь совпадает с собственной частотой колебаний, т. е. $p = k = 70$ с$^{-1}$ – имеет место резонанс.

В этом случае уравнение вынужденных колебаний груза имеет вид

$$x = \frac{ht}{2p}\sin\left(pt - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{100}{2 \cdot 70}t\left(70t - \frac{\pi}{2}\right) = -0{,}714t\cos 70t .$$

Полный закон движения груза

$$x = C_1\sin 70t + C_2\cos 70t - 0{,}714t\cos 70t .$$

Скорость точки

$$\dot{x} = 70C_1\cos 70t - 70\sin 70t - 0{,}714\cos 70t + 49{,}98\sin 70t .$$

Начальные условия $x(0) = 0{,}02$ м и $\dot{x}(0) = 0{,}1$ м/с.

Подставляя начальные условия в уравнение движения, получим $C_1 = -0{,}0116$ м, $\quad C_2 = 0{,}02$ м.

Искомое уравнение $x = 1{,}16\sin 70t + 2\cos 70t - 71{,}4t\cos 70t$ см.

ЗАДАЧА 18.91 (32.91). Груз массой 24,5 кг висит на пружине жесткости 392 Н/м. На груз начинает действовать сила $F(t) = 156{,}8\sin 4t$ Н. Определить закон движения груза.

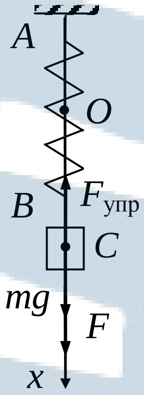


Рис. 18.91

Решение

Направим ось x вертикально вниз. Начало координат примем в положении статического равновесия груза при отсутствии возмущающей силы.

Уравнение равновесия груза

$mg - c\lambda_{\text{ст}} = 0$. Отсюда $\lambda_{\text{ст}} = \dfrac{mg}{c}$.

Уравнение движения груза $m\ddot{x} = mg - c(x + \lambda_{\text{ст}}) + F$,

которое перепишем в виде $m\ddot{x} + k^2 x = h\sin pt$,

где $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{392}{24,5}} = 4$ с$^{-1}$; $h = \dfrac{H}{m} = \dfrac{156,8}{24,5} = 6,4$ с$^{-1}$.

Частота возмущающей силы p теперь совпадает с собственной частотой колебаний, т. е. $p = k$ – имеет место резонанс.

В этом случае уравнение вынужденных колебаний груза имеет вид $x_2 = \dfrac{ht}{2p}\sin\left(pt - \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{6,4}{2\cdot 4}t\left(70t - \dfrac{\pi}{2}\right) = -0,8t\cos 4t$.

Полный закон движения груза

$x = C_1\sin 4t + C_2\cos 4t - 0,8t\cos 4t$.

Скорость точки

$\dot{x} = 4C_1\cos 4t - 4\sin 4t - 0,8\cos 4t + 3,2\sin 4t$.

Начальные условия $x(0) = 0$ м и $\dot{x}(0) = 0,1$ м/с.

Подставляя начальные условия в уравнение движения, получим $C_1 = 0,2$ м, $C_2 = 0$ м.

Искомое уравнение $x = 0,2\sin 4t - 0,8t\cos 4t$, м.

БГАРФ

ЗАДАЧА 18.92 (32.92). Груз массы 24,5 кг висит на пружине жесткости 392 Н/м. Определить движение груза, если на него начинает действовать сила F = 39,2cos6t Н.

Рисунок к задаче аналогичен рис. 18.91.

Решение

Направим ось x вертикально вниз. Начало координат примем в положении статического равновесия груза при отсутствии возмущающей силы.

Уравнение равновесия груза

$mg - c\lambda_{\text{ст}} = 0$. Отсюда $\lambda_{\text{ст}} = \dfrac{mg}{c}$.

Уравнение движения груза $m\ddot{x} = mg - c(x + \lambda_{\text{ст}}) + F$,

которое перепишем в виде $m\ddot{x} + k^2 x = h\cos 6t$,

где $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{392}{24,5}} = 4\ \text{с}^{-1}$; $\quad h = \dfrac{H}{m} = \dfrac{39,2}{24,5} = 1,6\ \text{с}^{-1}$.

Частное решение дифференциального уравнения ищем в виде $x_2 = A\sin 6t + B\cos 6t$.

Вычисляя производные и подставляя в уравнение, получим $-36A\sin 6t - 36B\cos 6t + 16A\sin 6t + 16B\cos 6t = 1,6\cos 6t$.

Приравнивая коэффициенты при синусе и косинусе, имеем $A = 0$, $\quad B = -0,08$ м.

Поэтому $x_2 = -0,08\cos 6t$.

Полное решение $x = 0,08\cos 4t - 0,08\cos 6t$

или $x = 0,08(\cos 4t - \cos 6t) = 0,08 \cdot 2\sin 5t \sin t = 0,16\sin t \sin 5t$.

Колебания носят характер биений.

ЗАДАЧА 18.93 (32.93). Груз на пружине колеблется так, что его движение описывается дифференциальным уравнением $m\ddot{x} + cx =$ $= 5\cos\omega t + 2\cos 3\omega t$. Найти закон движения груза, если в начальный момент его смещение и скорость были равны нулю, а также определить, при каких значениях ω наступит резонанс.

Решение

Уравнение движения груза

$\ddot{x} + \dfrac{c}{m} = \dfrac{5}{m}\cos\omega t + \dfrac{2}{m}\cos 3\omega t$.

Частное решение дифференциального уравнения ищем в виде $x_2 = A\cos\omega t + B\cos 3\omega t$. Вычисляя производные и подставляя в уравнение, получим

$$-A\omega^2\cos\omega t - 9B\omega^2\cos 3\omega t + \frac{c}{m}A\cos\omega t + \frac{c}{m}B\cos 3\omega t =$$

$$= \frac{5}{m}\cos\omega t + \frac{2}{m}\cos 3\omega t.$$

Приравнивая коэффициенты при синусе и косинусе, имеем

$$\begin{cases} -A\omega^2 + \dfrac{c}{m}A = \dfrac{5}{m}, \\ -9B\omega^2 + \dfrac{c}{m}B = \dfrac{2}{m}. \end{cases}$$

Отсюда $A = \dfrac{5}{c - m\omega^2}$, $\quad B = \dfrac{2}{c - 9m\omega^2}$.

Поэтому

$$x = C_1\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t + C_2\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t + \frac{5}{c - m\omega^2}\cos\omega t + \frac{2}{c - 9m\omega^2}\cos 3\omega t.$$

Скорость точки

$$x = C_1\sqrt{\frac{c}{m}}\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t - C_2\sqrt{\frac{c}{m}}\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t -$$

$$-\frac{5\omega}{c - m\omega^2}\sin\omega t - \frac{6\omega}{c - 9m\omega^2}\sin 3\omega t.$$

Используя нулевые начальные условия, получим

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = \frac{47m\omega^2 - 7c}{(c - m\omega^2)(c - 9m\omega^2)}.$$

Окончательно, уравнение движения груза

$$x = \frac{47m\omega^2 - 7c}{(c - m\omega^2)(c - 9m\omega^2)}\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t +$$

$$+\frac{5}{c - m\omega^2}\cos\omega t + \frac{2}{c - 9m\omega^2}\cos 3\omega t.$$

Так как возмущающая сила есть суперпозиция двух гармонически меняющихся сил, то резонанс может наступить в двух случаях: $\sqrt{\dfrac{c}{m}} = \omega$ и $\sqrt{\dfrac{c}{m}} = 3\omega$,

откуда $\omega_{1кр} = \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{c}{m}}$, $\omega_{2кр} = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$.

Вынужденные колебания с демпфированием

ЗАДАЧА 18.94 (32.94). На пружине, коэффициент жесткости которой c = 19,6 Н/м, подвешены магнитный стержень массой 50 г, проходящий через соленоид, и медная пластинка массой 50 г, проходящая между полюсами магнита. По соленоиду течет ток $i = 20\sin 8\pi t$, А, который развивает силу взаимодействия с магнитным стержнем $0{,}016\pi i$, Н. Сила торможения медной пластинки вследствие вихревых токов равна $kv\Phi^2$, где $k = 0{,}001$, $\Phi = 10\sqrt{5}$, Вб и v – скорость пластинки в м/с. Определить вынужденные колебания пластинки.

Решение

Масса груза $m = m_1 + m_2 = 0{,}05 + 0{,}05 = 0{,}1$ кг.

Направим ось x вертикально вниз. Начало координат примем в положении статического равновесия груза при отсутствии возмущающей силы.

Движение груза определяется дифференциальным уравнением

$$m\ddot{x} = mg - F_{упр} - F_{сопр} + F.$$

Сила упругости $F_{упр} = c(x + \lambda_{ст})$.

Сила сопротивления $F_{сопр} = k\Phi^2 \dot{x}$.

Возбуждающая сила

$$F = 0{,}016\pi i = 0{,}016\pi \cdot 20\sin 8\pi t = 0{,}32\pi \sin 8\pi t.$$

Поэтому $\ddot{x} + 5\dot{x} + 196x = 3{,}2\pi \sin 8\pi t$.

Вынужденные колебания описываются уравнением

$$x_2 = A\sin(pt - \varepsilon),$$

где возбуждающая частота $p = 8\pi$;

амплитуда вынужденных колебаний

$$A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} =$$

$$= \frac{3,2\pi}{\sqrt{(14^2 - (8\pi)^2)^2 + 4\cdot(5/2)^2\cdot(8\pi)^2}} = 0,022 \text{ м.}$$

Сдвиг фаз

$$\varepsilon = \operatorname{arctg}\frac{2np}{k^2 - p^2} = \operatorname{arctg}\frac{2\cdot(5/2)\cdot 8\pi}{14^2 - (8\pi)^2} = \operatorname{arctg}(-0,29) = 0,91\pi .$$

Окончательно,

$$x = 0,022\sin(8\pi t - 0,91\pi) \text{ м.}$$

ЗАДАЧА 18.95 (32.95). В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения пластинки, если ее подвесили вместе с магнитным стержнем к концу нерастянутой пружины и сообщили им начальную скорость 5 см/с, направленную вниз.

Решение

Начальные условия $x(0) = -\lambda_{\text{ст}} = -\dfrac{mg}{c} = -0,05$ м и $\dot{x}(0) = 0,05$ м/с.

Решение дифференциального уравнения определяется соотношением между n и k. Здесь $n = 2,5\text{с}^{-1}$ и $k = 14\ \text{с}^{-1}$, значит, $n < k$. Тогда для малого сопротивления

$$x = e^{-nt}(C_1\sin k_1 t + C_2\cos k_1 t) + A\sin(pt - \varepsilon) =$$

$$= e^{-2,5t}(C_1\sin 13,77t + C_2\cos 13,77t) + 0,022\sin(8\pi t - 0,91\pi).$$

Скорость точки

$$\dot{x} = -2,5e^{-2,5t}(C_1\sin 13,77t + C_2\cos 13,77t) +$$

$$+e^{-2,5t}(13,77C_1\cos 13,77t - 13,77C_2\sin 13,77t) +$$

$$+8\pi\cdot 0,022\cos(8\pi t - 0,91\pi).$$

Отсюда $\quad -0,05 = C_2 + 0,022\sin(-0,91\pi)$,

$$0,05 = -2,5C_2 + 13,77C_1 + 0,022\cdot 8\pi\cos(-0,91\pi),$$

откуда $\quad C_1 = 0,0342$ м, $\qquad C_2 = -0,0439$ м.

Отсюда закон движения пластины

$$x = e^{-2,5t}(3,42\sin 13,77t - 4,39\cos 13,77t) + 2,2\sin(8\pi t - 0,91\pi) \text{ см.}$$

ЗАДАЧА 18.96 (32.96). Материальная точка массой m = 2 кг подвешена к пружине, коэффициент жесткости которой 4 кН/м. На точку действуют возмущающая сила $S = 120\sin(pt+\delta)$ Н и сила сопротивления движению, пропорциональная первой степени скорости и равная $R = 0{,}5\sqrt{mc}\,v$ Н. Чему равно наибольшее значение A_{max} амплитуды вынужденных колебаний? При какой частоте p амплитуда вынужденных колебаний достигает наибольшего значения?

Решение

Направим ось x вертикально вниз. Начало координат примем в положении статического равновесия груза при отсутствии возмущающей силы.

Движение груза определяется дифференциальным уравнением

$$m\ddot{x} = mg - F_{\text{упр}} - F_{\text{сопр}} + S.$$

Сила упругости $F_{\text{упр}} = c(x+\lambda_{\text{ст}})$; $m\ddot{x} = mg - F_{\text{упр}}$,

$$m\ddot{x} = mg - c(x+\lambda_{\text{ст}}) - 0{,}5\sqrt{mc}\,\dot{x} + 120\sin(pt+\delta)$$

В положении равновесия $mg = c\lambda_{\text{ст}}$, поэтому

$$\ddot{x} = -\frac{c}{m}x - \frac{0{,}5\sqrt{mc}}{m}\dot{x} + \frac{120}{m}\sin(pt+\delta)$$

или $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h\sin(pt+\delta)$.

Решение для вынужденных колебаний точки имеет вид

$$x = A\sin(pt+\delta-\varepsilon),$$

где $n = \dfrac{0{,}5\sqrt{mc}}{2m} = \sqrt{\dfrac{mc}{16m}} = \sqrt{\dfrac{4000}{16}} = 11{,}18\ \text{с}^{-1}$,

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{4000}{2}} = 44{,}7\ \text{с}^{-1},$$

$$h = \frac{H}{m} = \frac{120}{2} = 60\ \text{м/с}^2.$$

Максимальная амплитуда вынужденных колебаний

$$A_{max} = \frac{h}{2n\sqrt{k^2-n^2}} = \frac{60}{2\cdot 31{,}6\sqrt{44{,}7^2-11{,}18^2}} = 0{,}062\ \text{м}$$

при частоте $p_1 = \sqrt{k^2-2n^2} = \sqrt{44{,}7^2-2\cdot 11{,}18^2} = 41{,}83\ \text{с}^{-1}$.

ЗАДАЧА 18.97 (32.97). В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения точки, если в начальный момент времени ее положение и скорость были равны: x_0 = 2 см; v_0 = 3 см/с. Частота возмущающей силы p = 30 рад/с, начальная фаза возмущающей силы δ = 0. Начало координат выбрано в положении статического равновесия.

Решение

Решение дифференциального уравнения движения точки в случае малого сопротивления имеет вид

$$x = x_1 + x_2;$$

$$x_1 = e^{-nt}(C_1 \sin k_1 t + C_2 \cos k_1 t) =$$

$$= e^{-11{,}18t}(C_1 \sin 43{,}3t + C_2 \cos 43{,}3t);$$

$$x_2 = A\sin(pt - \varepsilon),$$

где амплитуда вынужденных колебаний

$$A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} =$$

$$= \frac{60}{\sqrt{(44{,}7^2 - 30^2)^2 + 4 \cdot 11{,}18 \cdot 30^2}} = 0{,}0466 \text{ м}.$$

Сдвиг фаз

$$\varepsilon = \operatorname{arctg}\frac{2np}{k^2 - p^2} = \operatorname{arctg}\frac{2 \cdot 11{,}18 \cdot 8\pi}{44{,}7^2 - 30^2} = 0{,}174\pi.$$

Теперь

$$x = e^{-11{,}18t}(C_1 \sin 43{,}3t + C_2 \cos 43{,}3t) + 0{,}0466\sin(30t - 0{,}174\pi).$$

Начальные условия $x(0) = 0{,}02$ м и $\dot{x}(0) = 0{,}03$ м/с.

Подставляя начальные условия в выражения для x и $\dot{x}$, получим константы интегрирования $C_1 = -0{,}0155$ м, $C_2 = 0{,}0442$ м.

Окончательно

$$x = e^{-11{,}18t}(-1{,}55\sin 43{,}3t + 4{,}42\cos 43{,}3t) +$$

$$+4{,}66\sin(30t - 0{,}174\pi) \text{ см}.$$

ЗАДАЧА 18.98 (32.98). Материальная точка массой 3 кг подвешена на пружине с коэффициентом жесткости c = 117,6 Н/м. На точку действуют возмущающая сила $F = H\sin(6{,}26t + \beta)$ Н и сила вязкого сопротивления среды $R = -\alpha v$ (R в Н). Как изменится амплитуда вынужденных колебаний точки, если вследствие изменения температуры вязкость среды (коэффициент α) увеличится в три раза?

Решение

Дифференциальное уравнение движения точки

$$m\ddot{x} = mg - c(x + \lambda_{\text{ст}}) - \alpha\dot{x} + H\sin(6{,}26t + \delta)$$

или $\ddot{x} + \dfrac{\alpha}{m}\dot{x} + \dfrac{c}{m}x = \dfrac{H}{m}\sin(6{,}26t + \delta)$.

Коэффициент демпфирования $n = \dfrac{\alpha}{2m}$;

собственная частота $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$;

приведенная амплитуда возмущающей силы $h = \dfrac{H}{m}$;

амплитуда вынужденных колебаний $A = \dfrac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}$.

$k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{117{,}6}{3}} = 6{,}26$ с$^{-1}$, что совпадает с частотой возмущающей силы p = 6,26 с$^{-1}$.

Имеет место резонанс.

Амплитуда вынужденных колебаний при резонансе $A = \dfrac{h}{2np}$.

Тогда $$\frac{A_1}{A} = \frac{\dfrac{h}{2n_1p}}{\dfrac{h}{2np}} = \frac{n}{n_1} = \frac{\dfrac{\alpha}{2m}}{\dfrac{3\alpha}{2m}} = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, амплитуда вынужденных колебаний уменьшится в три раза.

ЗАДАЧА 18.99 (32.99). Тело массой 2 кг, прикрепленное пружиной к неподвижной точке *A*, движется по гладкой наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, под действием возмущающей силы *S* = 180sin10*t*, Н и силы сопротивления, пропорциональной скорости *R* = – 29,4*v*, Н. Коэффициент жесткости пружины *c* = 5 кН/м. В начальный момент тело находилось в покое в положении статического равновесия. Найти уравнение движения тела, периоды *T* свободных и T_1 вынужденных колебаний, сдвиг фазы вынужденных колебаний и возмущающей силы.

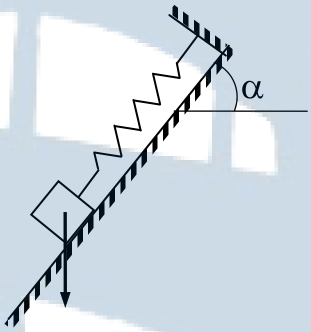


Рис. 18.99

Решение

Начало координат – в положении статического равновесия.

Дифференциальное уравнение движения точки

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - F - R + S \quad \text{или} \quad \ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = \frac{S}{m}.$$

Коэффициент демпфирования $n = \dfrac{\alpha}{2m} = \dfrac{29,4}{2\cdot 2} = 7,35 \text{ с}^{-1}$;

собственная частота $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{5000}{2}} = 50 \text{ с}^{-1}$.

Решение дифференциального уравнения при $n < k$

$$x = Ae^{-nt}(\sin k_1 t + \beta) + B\sin(pt - \varepsilon).$$

Частота затухающих собственных колебаний

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{50^2 - 7,35^2} = 49,46 \text{ с}^{-1}.$$

Период затухающих собственных колебаний

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{6,28}{49,46} = 0,127 \text{ с};$$

период вынужденных колебаний $T_B = \dfrac{2\pi}{p} = \dfrac{6,28}{10} = 6,28 \text{ с}.$

Амплитуда вынужденных колебаний

$$A=\frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}=$$

$$=\frac{180/2}{\sqrt{(50^2-10^2)^2+4\cdot 7,35^2\cdot 10^2}}=0,0374 \text{ м.}$$

Сдвиг фаз $\varepsilon=\operatorname{arctg}\dfrac{2np}{k^2-p^2}=\operatorname{arctg}\dfrac{2\cdot 7,35\cdot 10}{50^2-10^2}=3°30'$.

Начальные условия – нулевые.

Подставляя начальные условия в выражения для x и $\dot{x}$, получим

$$x=e^{-7,35t}(0,228\sin 49,46t-0,72\cos 49,46t)+$$
$$+3,74\sin(10t\ -3°30') \text{ см.}$$

ЗАДАЧА 18.100 (32.100). На тело массой 0,4 кг, прикрепленное к пружине с коэффициентом жесткости c = 4 кН/м, действуют сила S = 40sin50t Н и сила сопротивления среды R = – αv, где α = 25 Н·с/м, v – скорость тела (v в м/с). В начальный момент тело покоится в положении статического равновесия. Найти закон движения тела и определить значение частоты возмущающей силы, при котором амплитуда вынужденных колебаний будет максимальной.

Решение

Начало координат – в положении статического равновесия.

Дифференциальное уравнение движения точки

$$\ddot{x}+\frac{\alpha}{m}\dot{x}+\frac{c}{m}x=\frac{S_0}{m}\sin pt$$

Коэффициент демпфирования $n=\dfrac{\alpha}{2m}=\dfrac{25}{2\cdot 0,4}=31,25\ \text{с}^{-1}$;

собственная частота $k=\sqrt{\dfrac{c}{m}}=\sqrt{\dfrac{4000}{0,4}}=100\ \text{с}^{-1}$;

приведенная амплитуда возмущающей силы $h=\dfrac{S_0}{m}=\dfrac{40}{0,4}=100\ \text{м/с}^2$.

Решение дифференциального уравнения при $n<k$

$$x=Ae^{-nt}(\sin k_1t+\beta)+B\sin(pt\ -\varepsilon).$$

Частота затухающих собственных колебаний

$k_1=\sqrt{k^2-n^2}=\sqrt{100^2-31{,}25^2}=95\ \text{с}^{-1}$.

Амплитуда вынужденных колебаний

$$A=\frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}=$$

$$=\frac{100}{\sqrt{(100^2-50^2)^2+4\cdot 31{,}25^2\cdot 50^2}}=0{,}0123\ \text{м}.$$

Сдвиг фаз $\varepsilon=\operatorname{arctg}\dfrac{2np}{k^2-p^2}=\operatorname{arctg}\dfrac{2\cdot 31{,}25\cdot 50}{100^2-50^2}=22°36'$.

Начальные условия – нулевые.

Подставляя начальные условия в выражения для x и $\dot{x}$, получим

$0=A\sin\beta+B\sin(-\varepsilon)$,

$0=-nA\sin\beta+Ak_1\cos\beta+Bp\cos(-\varepsilon)$, откуда

$$A=B\sqrt{\sin^2\varepsilon+\frac{n\sin\varepsilon-p\cos\varepsilon}{k_1}}=$$

$$=0{,}0123\sqrt{\sin^2 22°36'+\frac{(31{,}25\sin 22°36'-50\cos 22°36')^2}{95^2}}=$$

$=0{,}0064$ м.

$$\alpha=-\arcsin\left(\frac{B}{A}\sin\varepsilon\right)=-\arcsin\left(\frac{0{,}0123}{0{,}0064}\sin 22°36'\right)=-47°.$$

Следовательно,

$x=0{,}64e^{-31{,}25t}(\sin 95t-47°)+1{,}23\sin(50t\ \ -22°36')$.

Для определения максимальной амплитуды вынужденных колебаний B в зависимости от частоты p следует исследовать функцию

$$B(p)=\frac{100}{\sqrt{(100^2-p^2)^2+4\cdot 31{,}25^2\cdot p^2}}.$$

Максимальное значение $B(p)$ достигается при минимальном значении функции $f(p)=(100^2-p^2)^2+4\cdot 31{,}25^2\cdot p^2$.

Вычислим $f'(p)=-2(100^2-p^2)\cdot 2p+7812{,}5p=0$.

Получим $p_1=0$, $p_2=89{,}7\ \text{с}^{-1}$.

Проверим в этих точках знак второй производной

$$f''(p) = -4(100^2 - p^2) + 8p^2 + 7812{,}5;$$

$$f''(p_1) < 0, \qquad f''(p_1) < 0.$$

Поэтому минимальное значение $f(p)$ в точке p_2 = 89,7 с$^{-1}$, а значит B_{max} при p_2 = 89,7 с$^{-1}$.

$B_{max} = B(89{,}7)$ = 1,684 см.

ЗАДАЧА 18.101 (32.101). На тело массой M кг, прикрепленное к пружине с коэффициентом жесткости c Н/м, действуют возмущающая сила $S = H\sin pt$, Н и сила сопротивления $R = -\alpha v$ (R в Н), где v – скорость тела. В начальный момент тело находилось в положении статического равновесия и не имело начальной скорости. Найти уравнение движения тела, если $c > \alpha^2/(4M)$.

Решение

Начало координат – в положении статического равновесия.

Дифференциальное уравнение движения точки

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{H}{m}\sin pt.$$

Коэффициент демпфирования $n = \dfrac{\alpha}{2m}$; собственная частота $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$; приведенная амплитуда возмущающей силы $h = \dfrac{H}{m}$.

По условию $c > \dfrac{\alpha^2}{4m}$, поэтому $n < k$.

Решение дифференциального уравнения

$$x = e^{-nt}(C_1 \sin k_1 t + C_2 \cos k_1 t) + B\sin(pt - \varepsilon),$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$.

Здесь $B = \dfrac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}$, $\qquad \varepsilon = \operatorname{arctg}\dfrac{2np}{k^2 - p^2}$.

Сделаем преобразование

$$\sin\left(pt - \operatorname{arctg}\frac{2np}{k^2 - p^2}\right) = \sin pt \cdot \cos\left(\operatorname{arctg}\frac{2np}{k^2 - p^2}\right) -$$

$$-\cos pt \cdot \sin\left(\operatorname{arctg}\frac{2np}{k^2-p^2}\right) = \sin pt \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2np}{k^2-p^2}\right)^2}} -$$

$$-\cos pt \cdot \frac{\frac{2np}{k^2-p^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{2np}{k^2-p^2}\right)^2}} = \sin pt \cdot \frac{k^2-p^2}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}} -$$

$$-\cos pt \cdot \frac{2np}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}.$$

Поэтому

$$x = e^{-nt}(C_1 \sin\sqrt{k^2-n^2}t + C_2 \cos\sqrt{k^2-n^2}t) +$$

$$+\frac{H/m}{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}\left[(k^2-p^2)\sin pt - 2np\cos pt\right].$$

Для определения C_1 и C_2 воспользуемся нулевыми начальными условиями. После подстановки их в x и $\dot{x}$, получим

$$C_1 = \frac{\frac{H}{m}p(2n^2+p^2-k^2)}{\left[(k^2-p^2)^2+4n^2p^2\right]\sqrt{k^2-p^2}},$$

$$C_2 = \frac{\frac{H}{m}2np}{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}.$$

ЗАДАЧА 18.102 (32.102). На тело массой 6 кг, подвешенное к пружине с жесткостью c = 17,64 кН/м, действует возмущающая сила $P_0\sin pt$. Сопротивление жидкости пропорционально скорости. Каким должен быть коэффициент сопротивления α вязкой жидкости, чтобы максимальная амплитуда вынужденных колебаний равнялась утроенному значению статического удлинения пружины? Чему равняется коэффициент расстройки z (отношение круговой частоты вынужденных колебаний к круговой частоте свободных

БГАРФ

колебаний)? Найти сдвиг фазы вынужденных колебаний и возмущающей силы.

Решение

Начало координат – в положении статического равновесия.

Дифференциальное уравнение движения точки

$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h\sin pt$.

Коэффициент демпфирования $n = \dfrac{\alpha}{2m} = \dfrac{\alpha}{12}$; собственная частота $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{17640}{6}} = 54{,}2$ с$^{-1}$; приведенная амплитуда возмущающей силы $h = \dfrac{H}{m} = \dfrac{P_0}{6}$.

В положении равновесия $mg = c\lambda_{\text{ст}}$, поэтому

$\lambda_{\text{ст}} = \dfrac{mg}{c} = \dfrac{6 \cdot 9{,}81}{17640} = 0{,}0033$ м.

Амплитуда вынужденных колебаний

$$A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}.$$

Найдем $B_{\max}$. Для этого определим, при каком значении p функция $f(p) = (k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2$ достигает минимального значения.

$$f'(p) = 2(k^2 - p^2) \cdot 2\text{p} + 8n^2 p = 0 \qquad \Rightarrow \qquad p_1 = 0;$$

$$p_2 = \sqrt{k^2 - 2n^2} = \sqrt{2940 - 0{,}0139\alpha^2};$$

$$f''(p) = 12p^2 - 4k^2 + 8n^2.$$

Рассмотрим два случая.

1. $k^2 \le 2n^2$. Это имеет место, когда $2940 \le 2\dfrac{\alpha^2}{12^2}$, т. е. при $\alpha \ge 460$ кг/с. Тогда p_2 не существует и $p = 0$ – единственная критическая точка. $f''(p) > 0$. Поэтому $f(0)$ – минимальное значение. $B(0) = \dfrac{h}{k^2}$ – фиксированная величина. Менять ее в зависимости от коэффициента α не удается.

2. $k^2 > 2n^2$. Это имеет место, когда $2940 > 2\dfrac{\alpha^2}{12^2}$, т. е. при $0 < \alpha < 460$ кг/с.

Тогда $p_1 = 0$, $p_2 = \sqrt{k^2 - 2n^2} = \sqrt{2940 - 0{,}0139\alpha^2}$.

Так как $f''(0) < 0$, то $f(p)$ при $p = 0$ достигает максимума и $B(p)$ при $p = 0$ принимает минимальное значение.

Так как $f''(p_2) < 0$, то $f(p)$ в точке p_2 принимает минимальное, а $B(p)$ – максимальное значение.

Амплитуда $B(p_2) = \dfrac{h}{2n\sqrt{k^2 - n^2}}$.

По условию задачи надо найти коэффициент α, чтобы $B_{\max} = 3\lambda_{\text{ст}}$. Составим уравнение относительно α

$$\frac{h}{2n\sqrt{k^2 - n^2}} = 3\frac{mg}{c}, \qquad \frac{h}{\dfrac{\alpha}{6}\sqrt{2940 - \dfrac{\alpha^2}{144}}} = 3 \cdot 0{,}0033.$$

Отсюда $\alpha^4 - 423360\alpha^2 + 52892136h^2 = 0$.

Так как $h = \dfrac{P_0}{m} = \dfrac{mg}{m} = g$, то $\alpha^4 - 423360\alpha^2 + 5079760741 = 0$ при $\alpha < 460$. Решая уравнение, получим $\alpha_{1,2} = 211680 \pm 199580$. Отсюда $\alpha_1 = 110$; $\alpha_2 = 641$. Второй корень не удовлетворяет условию, значит $\alpha = 110$.

Коэффициент расстройки

$$z = \frac{p_2}{k} = \frac{1}{k}\sqrt{k^2 - 2\frac{\alpha^2}{4m^2}} = \frac{1}{54{,}2}\sqrt{2940 - \frac{110^2}{2 \cdot 6^2}} = \frac{52{,}65}{54{,}2} = 0{,}97.$$

Сдвиг фазы вынужденных колебаний и возмущающей силы

$$\varepsilon = \operatorname{arctg}\frac{2np_2}{k^2 - p_2^2} = \operatorname{arctg}\frac{2 \cdot (\alpha / 2m) \cdot p_2}{k^2 - p_2^2} =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{(110/6) \cdot 52{,}65}{2940 - 52{,}65^2} = 0{,}445\pi = 80°7'.$$

Замечание к задаче. В условии задачи из-за нечеткости формулировки остается лишь догадываться, что амплитуда P_0 возмущающей силы $F(t) = P_0 \sin pt$ равна по величине силе тяжести mg.

ЗАДАЧА 18.103 (32.103). На тело массой 0,1 кг, прикрепленное к пружине с коэффициентом жесткости c = 5 кН/м, действует сила $S = H\sin pt$, где H = 100 Н; p = 100 рад/с, и сила сопротивления $R = \beta v$ Н, где β = 50 Н·с/м. Написать уравнение вынужденных колебаний и определить значение частоты p, при котором амплитуда вынужденных колебаний будет максимальной.

Решение

Вертикальную координату x отсчитываем от положения равновесия вниз. Тогда уравнение движения

$$m\ddot{x} = -cx - \alpha\dot{x} + H\sin pt \quad \text{или} \quad \ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h\sin pt.$$

Уравнение вынужденных колебаний

$$x = A\sin(pt - \delta) = A(\sin pt\cos\delta - \cos pt\sin\delta).$$

Амплитуда вынужденных колебаний

$$A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} =$$

$$= \frac{100/0,1}{\sqrt{\left(\dfrac{5000}{0,1} - 100^2\right)^2 + 4\cdot\left(\dfrac{50}{0,1}\right)^2\cdot 100^2}} = 0,01565 \text{ м.}$$

Сдвиг фаз $\varepsilon = \operatorname{arctg}\dfrac{2np}{k^2 - p^2} = \operatorname{arctg}\dfrac{2\cdot\dfrac{50}{0,1}\cdot 100}{\dfrac{5000}{0,1} - 100^2} = 0,8985$ рад.

Уравнение вынужденных колебаний

$x = 0,01565\sin(100t - 0,8985)$, м.

Перепишем выражение для A в виде

$$A_1 = \frac{f}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\beta^2z^2}},$$

где

$$z = \frac{p}{k}; \qquad \beta = \frac{n}{k}; \qquad f = \frac{H}{c}.$$

$$A_1 = (1 - z^2)^2 + 4\beta^2z^2;$$

$$A_1' = \frac{dA_1}{dz} = -4z(1 - z^2) + 8\beta^2z = 0.$$

Отсюда $z=\sqrt{1-\frac{2}{\beta^2}}$. Следовательно, $1-\frac{2}{\beta^2}\ge 0$ или $\beta<\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\beta=\frac{n}{k}=\frac{\alpha}{2m}\sqrt{\frac{m}{c}}=\frac{\alpha}{2\sqrt{mc}}=\frac{50}{2\sqrt{0,1\cdot 5000}}=1,107>0,707.$$

Отсюда следует вывод – максимума амплитуды не существует.

ЗАДАЧА 18.104 (32.104). В условиях предыдущей задачи определить сдвиг фазы вынужденных колебаний и возмущающей силы.

Решение

Сдвиг фаз вынужденных колебаний и возмущающей силы

$$\varepsilon=\operatorname{arctg}\frac{2np}{k^2-p^2}=\operatorname{arctg}\frac{2\cdot 250\cdot 100}{50000-10000}=\operatorname{arctg}1,25=51°20'.$$

ЗАДАЧА 18.105 (32.105). Груз массой 0,2 кг подвешен на пружине, коэффициент жесткости которой равен c = 19,6 Н/м. На груз действуют возмущающая сила S = 0,2sin14t, Н и сила сопротивления R = 49v, Н. Определить сдвиг фаз вынужденных колебаний и возмущающей силы.

Решение

Начало координат – в положении статического равновесия.

Дифференциальное уравнение движения точки

$m\ddot{x}=mg-F-R+S$,

где $F=c(\lambda_{ст}+x)$ – сила упругости пружины;

$R=49\dot{x}$ – сила сопротивления;

S = 0,2sin14t – возмущающая сила.

Поскольку в положении равновесия $mg=c\lambda_{ст}$, то уравнение можно переписать в виде

$\ddot{x}+2n\dot{x}+k^2x=h\sin pt$,

где коэффициент демпфирования $n=\frac{\alpha}{2m}=\frac{49}{2\cdot 0,2}=122,5$ с$^{-1}$;

собственная частота $k=\sqrt{\frac{c}{m}}=\sqrt{\frac{19,6}{0,2}}=9,9$ с$^{-1}$;

приведенная амплитуда возмущающей силы $h = \dfrac{H}{m} = \dfrac{0,2}{0,2} = 1$ м/с².

Сдвиг фаз $\varepsilon = \operatorname{arctg}\dfrac{2np}{k^2 - p^2} = \operatorname{arctg}\dfrac{2\cdot 122,5\cdot 14}{9,9^2 - 14^2} = 91°38'$.

ЗАДАЧА 18.106 (32.106). В условиях предыдущей задачи найти коэффициент жесткости c_1 новой пружины, которой нужно заменить данную пружину, чтобы сдвиг фаз вынужденных колебаний и возмущающей силы стал равным π/2.

Решение

Сдвиг фаз вынужденных колебаний и возмущающей силы ε = π/2 в случае резонанса, когда $k = p$.

Поэтому $\sqrt{\dfrac{c_1}{m}} = p$, $\Rightarrow$ $c_1 = mp^2 = 0,2\cdot 14^2 = 39,2$ Н/м.

ЗАДАЧА 18.107 (32.107). Для уменьшения действия на тело массой m возмущающей силы $F = F_0\sin(pt + \delta)$ устанавливают пружинный амортизатор с жидкостным демпфером. Коэффициент жесткости пружины c. Считая, что сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости ($F_{\text{сопр}} = \alpha v$), найти максимальное динамическое давление всей системы на фундамент при установившихся колебаниях.

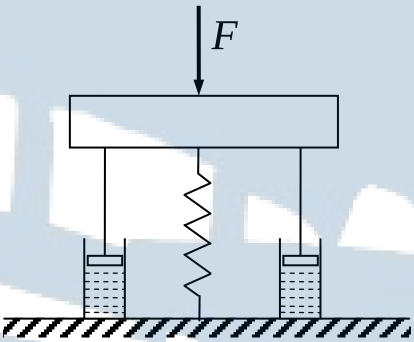


Рис. 18.107

Решение

Вертикальную координату x отсчитываем от положения равновесия вниз. Тогда $mg = c\lambda_{\text{ст}}$.

Дифференциальное уравнение движения

$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h\sin pt$, где коэффициент демпфирования $n = \frac{\alpha}{2m}$; собственная частота $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$; приведенная амплитуда возмущающей сила $h = \frac{H}{m}$.

Решение уравнения складывается из двух частей:

$x = x_1 + x_2$: x_1 – решение однородного уравнения (собственные колебания); x_2 – частное решение уравнения (вынужденные колебания).

При $t \to \infty$ $x_1 \to 0$.

Установившиеся вынужденные колебания описываются уравнением $x = A\sin(pt + \varepsilon - \delta)$,

где A – амплитуда вынужденных колебаний

$$A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}.$$

Сила динамического давления системы на фундамент при установившихся колебаниях $F = F'_{\text{упр}} + F'_{\text{сопр}}$, где $F'_{\text{упр}}$ не учитывает статическую деформацию. В соответствии с третьим законом Ньютона $F'_{\text{упр}} = F_{\text{упр}} = cx$ и $F'_{\text{сопр}} = F_{\text{сопр}} = \alpha\dot{x}$.

Поэтому $F = cx + \alpha\dot{x} = \frac{ch}{\sqrt{\left(k^2 - p^2\right)^2 + 4n^2p^2}}\sin(pt + \delta - \varepsilon) +$

$$+\frac{\alpha hp}{\sqrt{\left(k^2 - p^2\right)^2 + 4n^2p^2}}\cos(pt + \delta - \varepsilon) =$$

$$= \sqrt{\frac{c^2h^2}{\left(k^2 - p^2\right)^2 + 4n^2p^2} + \frac{\alpha^2h^2p^2}{\left(k^2 - p^2\right)^2 + 4n^2p^2}}\sin(pt + \delta - \varepsilon + \beta).$$

$$F_{\max} = F_0\sqrt{\frac{\frac{c^2}{m^2}h^2 + \frac{\alpha^2p^2}{m^2}}{\left(k^2 - p^2\right)^2 + 4n^2p^2}} = F_0\sqrt{\frac{k^4 + 4n^2p^2}{\left(k^2 - p^2\right)^2 + 4n^2p^2}}.$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие. – 35-е изд., перераб. / Под ред. Н.В. Бутенина, А.И. Лурье, Д.Р. Меркина, И.В. Челпанова. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы; 1981. – 480 с.

2. Сборник задач по теоретической механике: Учеб. пособие для вузов / Н.А. Бражниченко, В.Л. Кан, Б.Л. Минцберг и др. – Изд. 3-е, перераб. и доп. – М.: Высш. школа, 1974. – 520 с. – с ил.

3. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: Учебник для техн. вузов. – 7-е изд. стереотипное. – (Серия «Учебники для вузов. Специальная литература»). – СПб.: Издательство «Лань», 1999. – 768 с.

4. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. I, II / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1968.

5. Прикладная механика: учеб. пособие / А.Т. Скойбеда, А.А. Миклашевич, Е.Н. Левковский и др.; Под общ. ред. А.Т. Скойбеды. – Мн.: Выш. шк., 1997. – 522 с.

6. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учебное пособие для технических вызов / А.А. Яблонский и др. – 7-е изд., исправленное – М.: Интеграл-Пресс, 2001. – 384 с.

7. Von H. Neuber. Lösungen zur Aufgabensammlung Mestcherski. Veb Deutscher der Wissenschaften. Berlin, 1963. – 464 с. Режим доступа: www. exir.ru/termeh/mesherskij/

9789800019988

Елена Ивановна Короткая

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА В РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧ

ЧАСТЬ 18

КОЛЕБАНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Сборник задач
для курсантов и студентов
инженерных специальностей
всех форм обучения

Редактор: М.Б. Априянц, Н.В. Желтухина
Мл. редактор: Г.В. Деркач

Компьютерное редактирование:
О.В. Савина

Подписано в печать 25.12.2018.
Усл. печ. л. 7,0. Уч.-изд. л. 6,7.

Лицензия № 021350 от 28.06.99.
Печать офсетная.

Формат 60 х 90 1/16.

Тираж 40 экз. Заказ № 1396.

БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»

Издательство БГАРФ,
член Издательско-полиграфической ассоциации университетов России
236029 Калининград, ул. Молодежная, 6.