



































































## 5. КРУЧЕНИЕ

### Повторить теоретический материал:

- определение крутящих моментов в стержнях;
- касательные напряжения в стержнях круглого поперечного сечения;
- определение углов закручивания в стержнях круглого поперечного сечения;
- жесткость при кручении;
- проверка прочности и жесткости при кручении;
- расчет цилиндрических винтовых пружин.

### Основные расчетные формулы:

Наибольшие касательные напряжения  $\tau$  в поперечных сечениях круглого стержня при кручении:

$$\tau = \frac{M_k}{W_p},$$

где  $M_k$  – крутящий момент в поперечном сечении стержня;  
 $W_p$  – полярный момент сопротивления поперечного сечения стержня.

Угол закручивания  $\varphi$  на участке между двумя сечениями, в пределах которого крутящий момент и диаметр стержня не изменяются:

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot J_p},$$

где  $M_k$  – крутящий момент в поперечных сечениях на участке стержня;  
 $l$  – длина участка стержня;  
 $G$  – модуль упругости материала стержня при сдвиге;  
 $J_p$  – полярный момент инерции поперечных сечений на участке стержня.

Полярный момент инерции поперечного сечения круглого стержня:

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32},$$

где  $d$  – диаметр стержня.

Полярный момент сопротивления поперечного сечения круглого стержня:

$$W_p = \frac{2J_p}{d} = \frac{\pi d^3}{16},$$

где  $d$  – диаметр стержня.

Условие прочности при кручении:

$$\tau_{\max} \leq [\tau],$$

где  $\tau_{\max}$  – максимальные касательные напряжения в поперечных сечениях стержня;

$[\tau]$  – допускаемые касательные напряжения.

Условие жесткости при кручении:

$$\theta_{\max} \leq [\theta],$$

где  $\theta_{\max}$  – максимальный относительный угол закручивания в поперечных сечениях стержня;

$[\theta]$  – допускаемый относительный (погонный) угол закручивания.

Относительный (погонный) угол закручивания  $\theta$  на участке между двумя сечениями, в пределах которого крутящий момент и диаметр стержня не изменяются:

$$\theta = \frac{M_k}{G \cdot J_p},$$

где  $M_k$  – крутящий момент в поперечных сечениях на участке стержня;

$G$  – модуль упругости материала стержня при сдвиге;

$J_p$  – полярный момент инерции поперечных сечений на участке стержня.

Наибольшие касательные напряжения в витках цилиндрической винтовой пружины, которая растягивается или сжимается силой  $P$ :

$$\tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi d^3} \left( 1 + \frac{d}{2D} \right),$$

где  $D$  – средний диаметр пружины;

$d$  – диаметр проволоки пружины.



Удлинение или осадка цилиндрической винтовой пружины, которая растягивается или сжимается силой  $P$ :

$$\lambda = \frac{8PD^3n}{Gd^4},$$

где  $D$  – средний диаметр пружины;  
 $d$  – диаметр проволоки пружины;  
 $n$  – число витков пружины;  
 $G$  – модуль упругости материала пружины при сдвиге.

Для вала переменного сечения, варианты которого приведены в табл. 5.2, требуется:

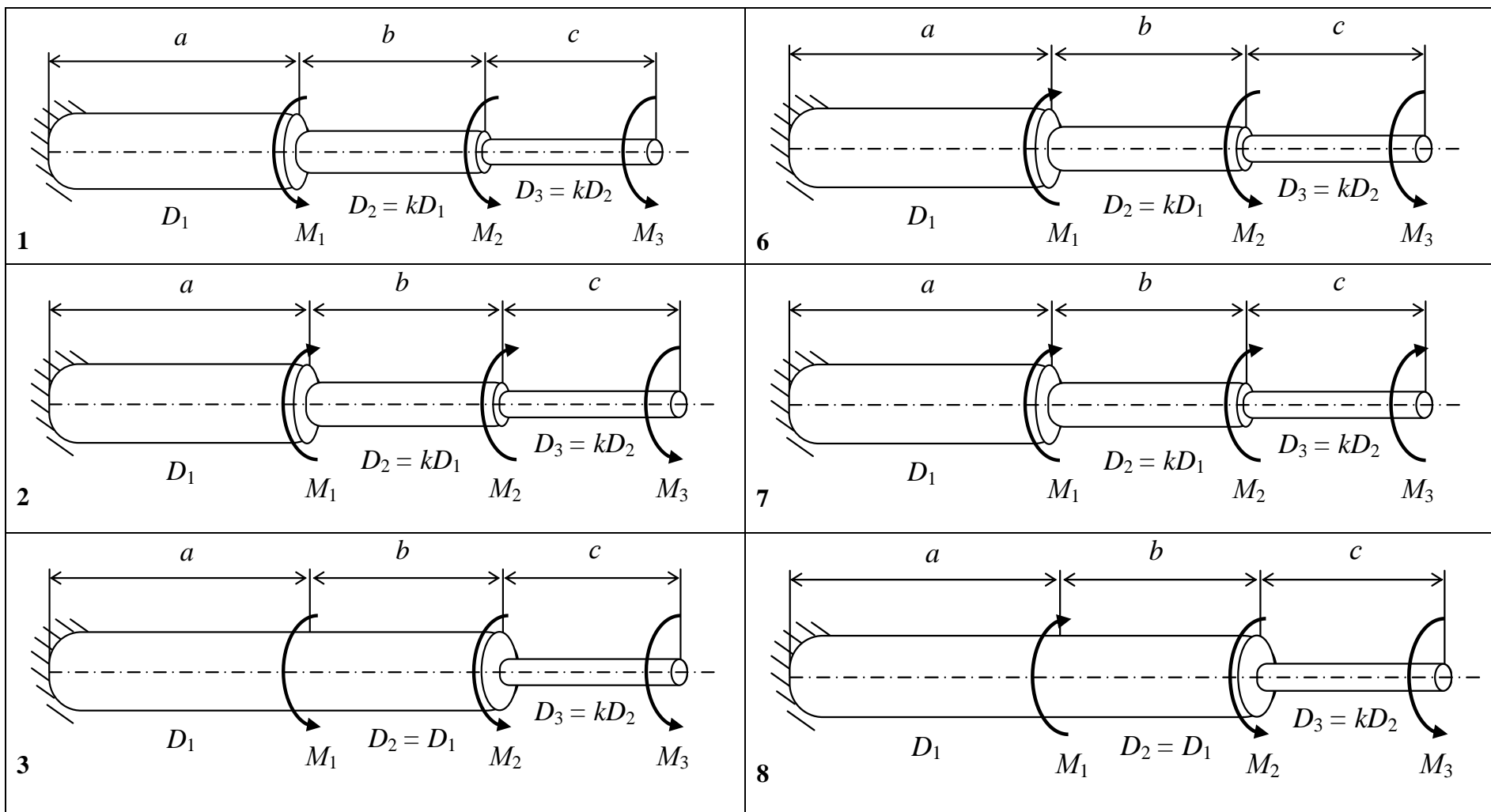
- 1) вычислить в поперечных сечениях крутящие моменты и построить в выбранном масштабе их эпюру;
- 2) из условия прочности определить требуемый диаметр сечения  $D$ ;
- 3) определить касательные напряжения и построить в выбранном масштабе их эпюру;
- 4) вычислить углы закручивания сечений вала и построить в выбранном масштабе их эпюру.

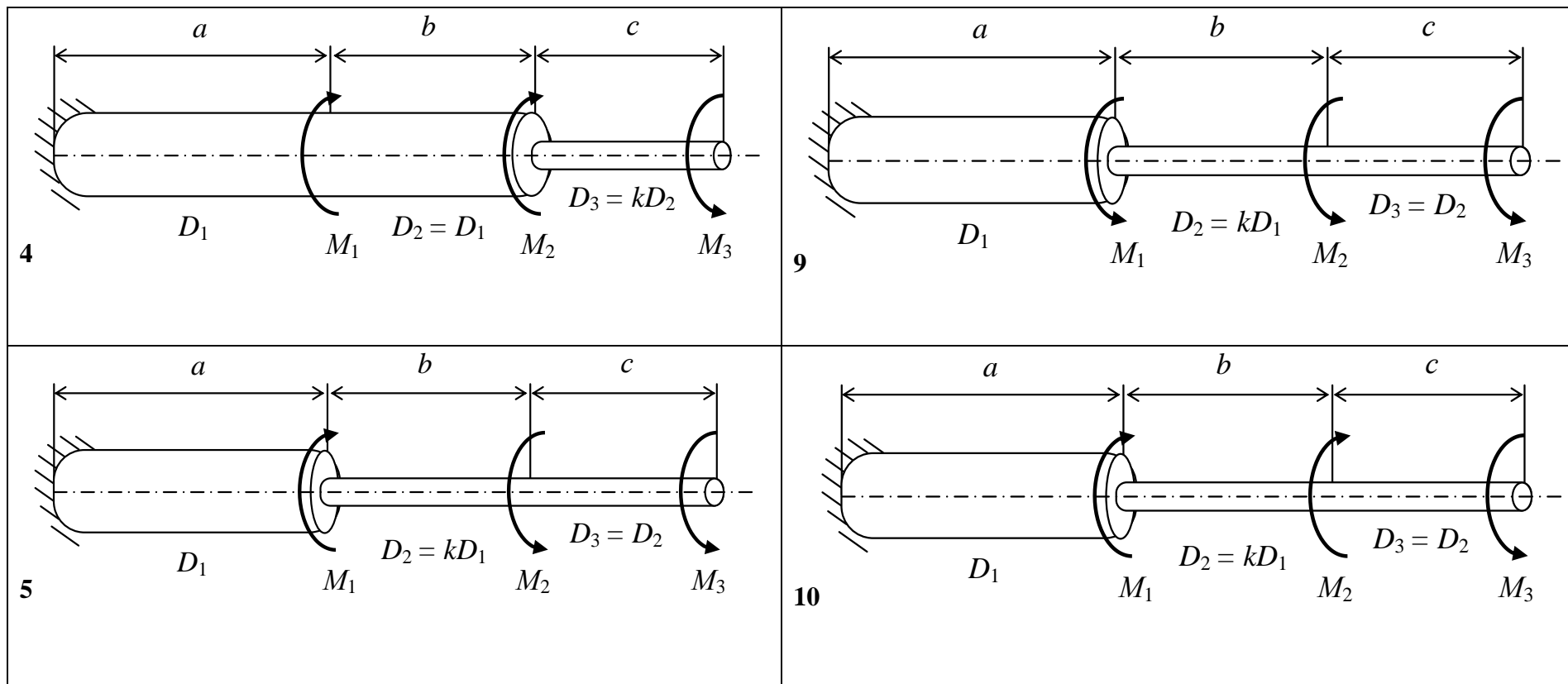
Исходные данные приведены в табл. 5.1. Материал стержня – сталь с модулем упругости при сдвиге  $G = 0,8 \cdot 10^5$  МПа.

Таблица 5.1

Величина	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	Цифра шифра
Схема	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Последняя
$a$ , м	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	1	0,9	0,8	1,8	1,9	Последняя
$b$ , м	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	0,7	0,6	Предпоследняя
$c$ , м	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,3	1,4	Предпоследняя
$M_1$ , кНм	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	Последняя
$M_2$ , кНм	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	1	Предпоследняя
$M_3$ , кНм	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2	Последняя
$[\tau]$ , МПа	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	Предпоследняя
$k$	0,8	0,75	0,7	0,65	0,6	0,55	0,5	0,45	0,4	0,35	Последняя

Таблица 5.2





## 6. ИЗГИБ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ БАЛКИ

### Повторить теоретический материал:

- опоры и опорные реакции;
- определение перерезывающих (поперечных) сил и изгибающих моментов в поперечных сечениях балок;
- дифференциальные зависимости между изгибающим моментом, перерезывающей силой и интенсивностью поперечной распределенной нагрузки;
- нормальные напряжения в поперечных сечениях балки при изгибе;
- касательные напряжения в поперечных сечениях балки при изгибе;
- дифференциальное уравнение изогнутой оси балки при изгибе и его интегрирование;
- определение прогибов и углов поворота сечений балки при изгибе;
- проверка прочности балки при изгибе;
- статически неопределимые балки;
- составление уравнения совместности деформаций.

### Основные расчетные формулы:

Наибольшие нормальные напряжения в поперечных сечениях балки при изгибе:

$$\sigma = \frac{M}{W},$$

где  $M$  – изгибающий момент в поперечном сечении балки;  
 $W$  – момент сопротивления поперечного сечения балки.

Наибольшие касательные напряжения в поперечных сечениях балки при изгибе:

$$\tau = \frac{Q \cdot S}{J \cdot b},$$

где  $Q$  – перерезывающая сила в поперечном сечении балки;  
 $S$  – статический момент части площади поперечного сечения балки, расположенной выше или ниже нейтральной оси относительно последней;

$J$  – момент инерции площади поперечного сечения балки относительно нейтральной оси;  
 $b$  – ширина поперечного сечения балки в районе нейтральной оси.

Дифференциальные зависимости между изгибающим моментом, перерезывающей силой и интенсивностью поперечной распределенной нагрузки:

$$Q = \frac{dM}{dx}; \quad q = \frac{dQ}{dx},$$

где  $Q$  – перерезывающая сила в сечении балки;  
 $M$  – изгибающий момент в сечении балки;  
 $q$  – интенсивность внешней распределенной поперечной нагрузки;  
 $x$  – координата по длине балки.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки при изгибе:

$$EJy'' = M(x),$$

где  $E$  – модуль упругости материала балки;  
 $J$  – момент инерции площади поперечного сечения балки относительно нейтральной оси;  
 $M(x)$  – изгибающий момент в поперечных сечениях по длине балки.

Условие прочности по нормальным напряжениям при изгибе для пластичных материалов:

$$|\sigma|_{\max} \leq [\sigma],$$

где  $|\sigma|_{\max}$  – максимальные (по абсолютной величине) нормальные напряжения в поперечных сечениях балки;  
 $[\sigma]$  – допускаемые нормальные напряжения.

Условие прочности по касательным напряжениям при изгибе:

$$\tau_{\max} \leq [\tau],$$

где  $\tau_{\max}$  – максимальные касательные напряжения в поперечных сечениях балки;  
 $[\tau]$  – допускаемые касательные напряжения.

Для двухопорной балки с консолями, схемы которой приведены во втором столбце табл. 6.2, требуется:

- 1) определить реакции опор;
- 2) записать выражения перерезывающих сил и изгибающих моментов в функции от координаты по длине балки;

3) вычислить ординаты и построить эпюры перерезывающих сил и изгибающих моментов;

4) из условия прочности по нормальным напряжениям подобрать профиль двутаврового поперечного сечения (табл. 6.2);

5) проверить прочность выбранной балки по касательным напряжениям;

б) вычислить прогибы балки в середине пролета  $l$  и на концах консолей. С учетом отсутствия прогибов на опорах по пяти точкам построить эпюру прогибов балки.

Исходные данные приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Величина	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	Цифра шифра
Схема	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	Последняя
$G$ , кН	12	11	10	19	18	17	16	15	14	13	Предпоследняя
$q$ , кН/м	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	Последняя
$M$ , кНм	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	Предпоследняя
$l$ , м	2,7	2,8	2,9	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	Последняя
$a/l$	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	Предпоследняя
$b/l$	1,2	1,1	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	Предпоследняя
$c/l, c/a, c/b^1$	0,9	0,9	1	0,5	0,6	0,6	0,7	0,7	0,8	0,8	Предпоследняя
$d/l$	0	0	0,8	0,3	0	0	0	0	0,5	0	Последняя
$[\sigma]$ , МПа	130	120	110	200	190	180	170	160	150	140	Последняя
$[\tau]$ , МПа	85	80	75	120	115	110	105	100	95	90	Предпоследняя
<sup>1)</sup> – Принимается для того участка балки, в пределах которого отложен размер $c$ .											

Таблица 6.2

**Геометрические характеристики поперечного сечения  
катаного двутавра**

№	$H$ , см	$B$ , см	$F$ , см <sup>2</sup>	$J_x$ , см <sup>4</sup>	$J_y$ , см <sup>4</sup>	$W_x$ , см <sup>3</sup>	$S_x$ , см <sup>3</sup>	$b$ , мм
10	10	5,5	12	198	17,9	39,7	23,1	4,5
12	12	6,4	14,7	350	27,9	58,4	33,7	4,8
14	14	7,3	17,4	572	41,9	81,7	46,8	4,9
16	16	8,1	20,2	873	58,6	109	62,3	5
18	18	9,0	23,4	1290	82,6	143	81,4	5,1
18a	18	10,0	25,4	1430	114	159	89,8	5,1
20	20	10,0	26,8	1840	115	184	104	5,2
20a	20	11,0	28,9	2030	155	203	114	5,2
22	22	11,0	30,6	2550	157	232	131	5,4
22a	22	12,0	32,8	2720	206	254	143	5,4
24	24	11,5	34,8	3460	198	289	163	5,6
24a	24	12,5	37,5	3800	260	317	178	5,6
27	27	12,5	40,2	5010	260	371	210	6
27a	27	13,5	43,2	5500	337	407	229	6
30	30	13,5	46,5	7080	337	472	268	6,5
30a	30	14,5	49,9	7780	436	518	292	6,5
33	33	14,0	53,8	9840	419	597	339	7
36	36	14,5	61,9	13380	516	743	423	7,5
40	40	15,5	71,4	19060	666	953	545	8,3
45	45	16,0	83	27700	807	1231	708	9
50	50	17,0	97,8	39700	1040	1589	919	10
55	55	18,0	114	56000	1350	2040	1181	11
60	60	19,0	132	76800	1720	2560	1491	12

## 7. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

### Повторить теоретический материал:

- понятие об устойчивых и неустойчивых формах равновесия;
- формула Эйлера для критической силы;
- влияние способа закрепления концов стержня на критическую силу;
- границы применимости формулы Эйлера;
- определение критических напряжений за пределом упругости;
- проверочный и проектировочный расчет сжатых стержней.

### Основные расчетные формулы:

Формула Эйлера для критической силы  $P_{кр}$ :

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2},$$

где  $E$  – модуль упругости материала стержня;

$J$  – минимальный момент инерции площади поперечного сечения стержня;

$\mu$  – коэффициент приведения длины стержня; значение коэффициента зависит от способа закрепления концов стержня:

$\mu = 1$  для свободного опирания обоих концов;

$\mu = 0,7$  для одного свободно опертого, другого жестко заделанного конца;

$\mu = 0,5$  для жесткой заделки обоих концов;

$\mu = 2$  для одного свободного, другого жестко заделанного конца;

$l$  – длина стержня.

Критические напряжения  $\sigma_{кр}$ , соответствующие критической силе по формуле Эйлера:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2},$$

где  $\lambda$  – гибкость стержня;

$$\lambda = \frac{\mu l}{i};$$



$i$  – минимальный радиус инерции поперечного сечения стержня;

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}};$$

$F$  – площадь поперечного сечения стержня.

Условие применимости формулы Эйлера:

$$\lambda \geq \lambda_{\text{п}} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{п}}}},$$

где  $\lambda$  – гибкость рассматриваемого стержня;

$\lambda_{\text{п}}$  – гибкость стержня, при которой критические напряжения достигают предела пропорциональности материала стержня;

$\sigma_{\text{п}}$  – предел пропорциональности материала стержня.

Формула Ясинского для критических напряжений  $\sigma_{\text{кр}}$ :

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda \leq \sigma_{\text{т}},$$

где  $a$  и  $b$  – эмпирические коэффициенты, выбор которых зависит от материала стержня; для конструкционной стали можно принять  $a = 310$  МПа,  $b = 1,14$  МПа;

$\lambda$  – гибкость стержня;

$\sigma_{\text{т}}$  – предел текучести материала стержня.

Условие устойчивости сжатого стержня:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq \frac{\sigma_{\text{кр}}}{k_{\text{у}}},$$

где  $\sigma$  – нормальные напряжения в сечениях сжатого стержня;

$P$  – сила, сжимающая стержень;

$F$  – площадь поперечного сечения стержня;

$\sigma_{\text{кр}}$  – критические напряжения;

$k_{\text{у}}$  – коэффициент запаса устойчивости.

Для заданной в табл. 7.2 конструктивной схемы составить расчетную схему сжатого стержня ОА, исходя из условий его закрепления. Установить зависимость силы сжатия  $P$  от величины веса груза  $G$ . Полагая стержень ОА изготовленным из стандартного двутавра, геометрические характеристики поперечного сечения которого приведены в табл. 6.2, определить критическую силу сжатия  $P_{\text{кр}}$  этого стержня и допустимый вес груза  $G$  с учетом заданного коэффициента запаса устойчивости  $K_{\text{у}}$ .

Подобрать для того же стержня ОА прочные размеры сечения  $D$  и  $d$  для его формы, показанной на схеме, при определенной ранее допускаемой нагрузке  $G$ . Сопоставить площади поперечного сечения двутавра полученного сечения. Сделать выводы.

Исходные данные приведены в табл. 7.1.

Весом стержней и нитей пренебречь. Материал стержня ОА – углеродистая сталь со следующими механическими характеристиками:

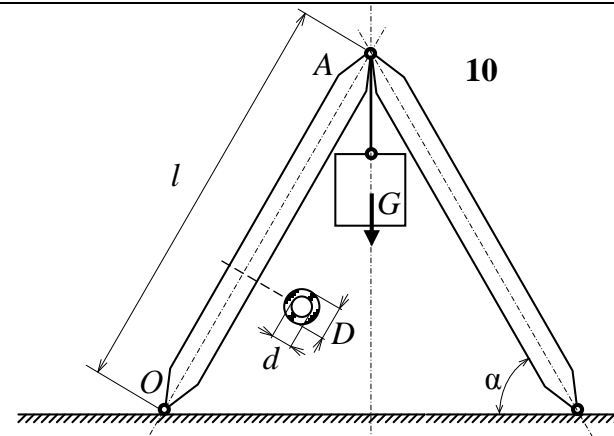
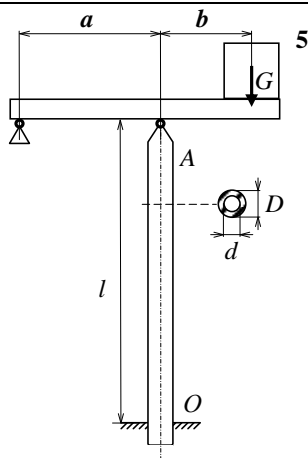
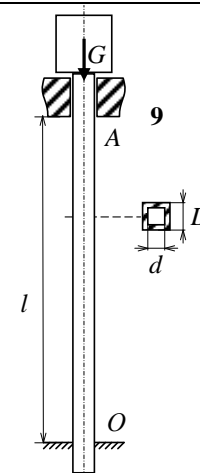
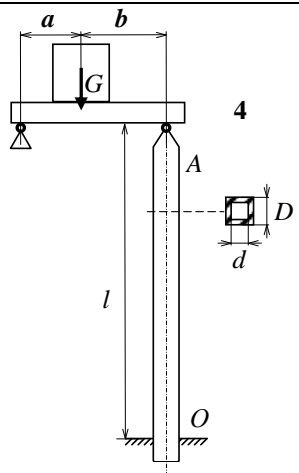
- предел текучести  $\sigma_T = 240$  МПа;
- предел пропорциональности  $\sigma_{\text{пц}} = 200$  МПа;
- модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа;
- эмпирические коэффициенты в формуле Ясинского  $a = 310$  МПа,  $b = 1,14$  МПа.

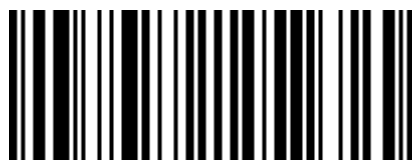
Таблица 7.1

Величина	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	Цифра шифра
Схема	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Последняя
$l$ , м	0,8	1,8	2,5	3	3,5	2,5	3,8	1,5	4	3,2	Последняя
$a/l$	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	Предпоследняя
$b/l$	0,75	0,7	0,65	0,6	0,55	0,5	0,45	0,4	0,35	0,3	Предпоследняя
$\alpha$ , град	30	45	–	–	–	25	30	35	–	45	Последняя
$d/D$	0,96	0,94	0,92	0,9	0,88	0,86	0,84	0,82	0,8	0,78	Предпоследняя
$K_y$	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3	3,2	3,4	3,6	3,8	Предпоследняя
№ двутавра	12	14	16	18	20	22	24	27	30	33	Последняя

Таблица 7.2

<p>Diagram 1: A vertical rod of length <math>l</math> pivoted at <math>O</math>. A weight <math>G</math> is suspended from a pulley at height <math>l</math>. A cable is attached to the rod at height <math>l</math>, passes over a pulley, and is fixed to a wall at an angle <math>\alpha</math>. A roller support <math>D</math> is at height <math>d</math>.</p>	<p>Diagram 6: A rod of length <math>l</math> pivoted at <math>O</math>, inclined at angle <math>\alpha</math>. A weight <math>G</math> is suspended from a pulley at height <math>l</math>. A cable is attached to the rod at height <math>l</math>, passes over a pulley, and is fixed to a wall. A roller support <math>D</math> is at height <math>d</math>.</p>
<p>Diagram 2: A vertical rod of length <math>l</math> pivoted at <math>O</math>. A weight <math>G</math> is suspended from a pulley at height <math>l</math>. A cable is attached to the rod at height <math>l</math>, passes over a pulley, and is fixed to a wall at an angle <math>\alpha</math>.</p>	<p>Diagram 7: A rod of length <math>l</math> pivoted at <math>O</math>, inclined at angle <math>\alpha</math>. A weight <math>G</math> is suspended from a pulley at height <math>l</math>. A cable is attached to the rod at height <math>l</math>, passes over a pulley, and is fixed to a wall. A roller support <math>D</math> is at height <math>d</math>.</p>
<p>Diagram 3: A vertical rod of length <math>l</math> pivoted at <math>O</math>. A weight <math>G</math> is suspended from a pulley at height <math>l</math>. Two cables are attached to the rod at height <math>l/2</math>, each fixed to a wall at an angle <math>\alpha</math>. A roller support <math>D</math> is at height <math>d</math>.</p>	<p>Diagram 8: A rod of length <math>l</math> pivoted at <math>O</math>, inclined at angle <math>\alpha</math>. A weight <math>G</math> is suspended from a pulley at height <math>l</math>. Two cables are attached to the rod at height <math>l/2</math>, each fixed to a wall at an angle <math>\alpha</math>. A roller support <math>D</math> is at height <math>d</math>.</p>





978210002148

**Андрей Анатольевич Осняч**

## **МЕХАНИКА**

Методические указания и задания на РГР  
для курсантов специальности  
«Управление водным транспортом и гидрографическое  
обеспечение судоходства»  
всех форм обучения

---

*Ведущий редактор О.В. Напалкова  
Младший редактор Г.В. Деркач*

*Лицензия № 021350 от 28.06.99.*

*Компьютерное редактирование  
И.В. Леонова*

*Печать офсетная.*

*Подписано в печать 29.07.2019 г.  
Усл. печ. л. 2,8. Уч.-изд. л. 1,8.*

*Заказ № 1463. Тираж 40 экз.*

Доступ к архиву публикации и условия доступа к нему:  
<http://bgarf.ru/academy/biblioteka/elektronnyj-katalog/>

**БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»**

*Издательство БГАРФ,  
член Издательско-полиграфической ассоциации высших учебных заведений  
236029, Калининград, ул. Молодежная, 6.*