

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
**«КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»**

В.А. Наумов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В КОМПОНЕНТАХ ПРИРОДЫ

Учебно-методическое пособие по лабораторным работам для студентов вузов,
обучающихся в магистратуре по направлению подготовки
«Природообустройство и водопользование»

Калининград
Издательство ФГБОУ ВО «КГТУ»
2017

УДК 519.6:628.1

Утверждено
Ректором ФГБОУ ВО
«Калининградский государственный
технический университет»

Автор – Наумов В.А., д.т.н., профессор кафедры водных ресурсов и водопользования ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет»

Учебно-методическое пособие по выполнению лабораторных работ рассмотрено и одобрено кафедрой водных ресурсов и водопользования ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет», протокол № 5 от 23 января 2017 г.

Учебно-методическое пособие по выполнению лабораторных работ одобрено и рекомендовано методической комиссией факультета промышленного рыболовства ФГБОУ ВО Калининградского государственного технического университета, протокол № 6 от 15 февраля 2017 г.

Рецензент:

Великанов Н.Л., д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой ФГАОУ ВО «Балтийский федеральный университет им. И.Канта»

@ ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет»,
2017 г.

@ Наумов В.А. 2017 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Лабораторная работа № 1. Моделирование процесса нестационарной фильтрации воды к круглому колодцу.....	5
Лабораторная работа № 2. Зависимость площади живого сечения и смоченного периметра от глубины водотока	10
Лабораторная работа № 3. Моделирование распространения загрязнения в водоеме после аварийного сброса	14
Лабораторная работа № 4. Расчет годового стока с площади водосборного бассейна при отсутствии систематических наблюдений	20
Лабораторная работа № 5. Математическая модель гидравлической крупности частиц несферической формы	24
Лабораторная работа № 6. Расчет распределения мутности в водотоке по одному измерению вблизи поверхности	29
Лабораторная работа № 7. Моделировании динамики взаимодействия популяций «хищник – жертва».....	35
Лабораторная работа № 8. Моделирование распространения и осаждения тяжелой примеси в водоеме при стационарном точечном источнике	40
Лабораторная работа № 9. Моделирование фильтрации солей в почве	46
Лабораторная работа № 10. Моделирование распространения загрязнения из стационарного точечного источника по водотоку.....	51
Список использованных источников.....	57
Приложение А. Коэффициенты фильтрации и водоотдачи грунтов	58
Приложение Б. Шкала шероховатости речных русел и пойм	59
Приложение В. Средний слой годового стока на территории Калининградской области	60
Приложение Г. Гидравлическая крупность взвеси	60
Приложение Д. Растворимость солей при различных температурах.....	61

ВВЕДЕНИЕ

Под широким понятием «природообустройство» понимают разнообразную деятельность по преобразованию и восстановлению природных компонентов. Такой подход позволяет выработать общие подходы и принципы модификации свойств природных компонентов, согласованию природопользования с природообустройством. Примерный английский эквивалент этого понятия — Environmental engineering, т. е. инженерия окружающей среды, активное воздействие на окружающую среду с определенными целями. Таким образом, природообустройство – это инженерно-техническое направление в деятельности по сохранению и преобразованию окружающей среды.

Природообустройство – это совокупность сложных дорогостоящих ресурсов и энергоемких мероприятий, проводимых длительное время. Для их осуществления необходимо создание комплекса инженерных сооружений и устройств, надежно функционирующих в разнообразных природных условиях, часто экстремальных, при переменных погодных условиях. Их неотъемлемой частью являются научные исследования. В дисциплине «Математическое моделирование в компонентах природы» изучаются особенности таких исследований в природно-техногенных комплексах, включая водохозяйственные системы.

Лабораторные занятия по дисциплине «Математическое моделирование в компонентах природы» предусматривают выполнение практических заданий на персональных компьютерах с использованием универсального пакета Mathcad. Лабораторный практикум даёт студентам опыт исследовательской и проектной работы с применением современных информационных технологий. В конце каждой лабораторной работы приводятся вопросы для подготовки студентов к их защите.

При изучении дисциплины «Математическое моделирование в компонентах природы» используются знания и навыки, полученные в бакалавриате при изучении дисциплин «Информатика», «Информационные технологии», «Математическое моделирование», в магистратуре – «Информационные технологии профессиональной деятельности».

Знания и навыки, полученные при изучении данной учебной дисциплины, используются при подготовке выпускной квалификационной работы и в профессиональной деятельности магистров. Студентам при выполнении лабораторных работ рекомендуется отобрать методы и компьютерные программы которые могут быть использованы в исследовательской части ВКР. В результате освоения дисциплины у обучающегося формируются компетенции, предусмотренные ФГОС ВО.

Лабораторная работа № 1

Моделирование процесса нестационарной фильтрации воды к круглому колодцу Физическая постановка задачи (схематизация)

Круглый водосборный колодец глубиной H_0 радиусом r_1 находится на горизонтальном водоупоре. H_1 – уровень воды в колодце, который поддерживается постоянным во все рассматриваемое время T . Уровень грунтовых вод на расстоянии r_2 от оси колодца равен H_2 . Величину H_2 называют мощностью водоносного пласта. Распределение напора осесимметрично относительно оси колодца (рис. 1.1). Коэффициент фильтрации грунта вокруг колодца k – постоянен. Будем полагать, что скважина контактирует всей боковой поверхностью с грунтом, и стенки колодца полностью водопроницаемы.

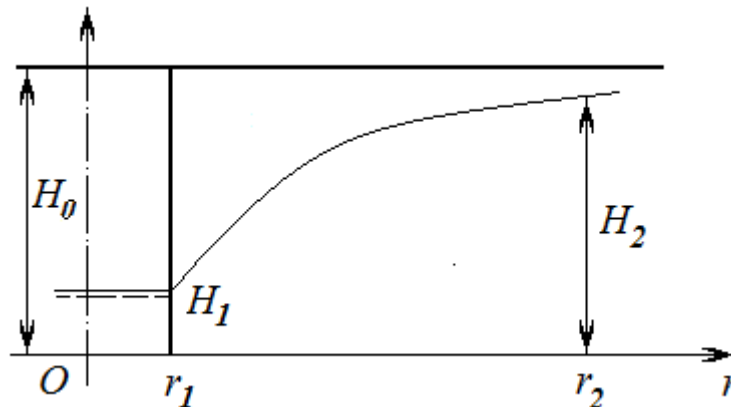


Рис. 1.1. Схема депрессионной воронки круглого водосборного колодца

Математическая модель

В гидравлической постановке задач фильтрации рассматриваются осредненные по сечениям значения напора жидкости $H(r,t)$. Уравнение нестационарной одномерной фильтрации без источников (стоков) представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k \cdot r \cdot H \frac{\partial H}{\partial r} \right), \quad (1.1)$$

где t – время, час; r – радиальная координата, м; μ – безразмерный коэффициент водоотдачи слоя; k – коэффициент фильтрации почвы, м/час.

Если $k = \text{const}$, уравнение (1.1) можно преобразовать к такому виду

$$r \cdot M \frac{\partial H}{\partial t} = H \frac{\partial H}{\partial r} + r \cdot H \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + r \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial r} \right)^2, \quad M = \frac{\mu}{k}. \quad (1.2)$$

Краевые условия к (1.2) включают начальные и граничные условия

$$H(r_1, t) = H_1, \quad H(r_2, t) = H_2, \quad H(r, 0) = H_0(r). \quad (1.3)$$

Расход воды (м³/час) можно вычислить по формуле

$$Q(x,t) = 2\pi \cdot r \cdot k \cdot H(r,t) \cdot \frac{\partial H}{\partial r}. \quad (1.4)$$

В установившемся режиме фильтрации расход (дебит колодца) вычисляется по формуле Дюпюи

$$Qd = \pi \cdot k \frac{H_2^2 - H_1^2}{\ln(r_2 / r_1)} \quad (1.5)$$

Установившийся уровень грунтовых вод (кривая депрессии) определяется

$$Hd(r) = \sqrt{H_1^2 + \frac{r - r_1}{\pi \cdot k} Qd} \quad (1.6)$$

Задание

1. По данным своего варианта (табл. 1.1) вычислить параметр M , расход воды (дебит) к колодцу в установившемся режиме фильтрации; записать уравнение кривой депрессии;
2. С помощью операторов Given-Pdsolve решить численным методом краевую задачу (1.2)-(1.3). Построить профили уровня грунтовых вод в моменты времени $t = 0; 6; 24; 96, 240$ часов и сравнить их с кривой депрессии;
3. Сформировать функцию зависимости расхода воды к колодцу от времени и сравнить с дебитом;
4. Построить зависимость времени наполнения колодца на заданную глубину в приближении квазистационарного режима фильтрации.

Таблица 1.1

Величина	Номер варианта												
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
H_1 , м	1,1	0,7	0,8	0,75	0,9	0,4	1,05	0,6	0,85	0,65	0,95	0,65	1,1
H_2 , м	1,8	1,6	1,9	1,7	2,0	1,5	2,2	1,65	2,05	1,75	2,15	1,85	2,25
k_1 , м/сут.	1,0	1,1	1,5	1,8	1,4	0,9	1,2	0,8	1,7	0,6	1,6	0,7	1,3
r_1 , м	1,0	0,9	0,8	0,7	0,85	0,75	0,65	0,95	1,1	0,6	1,2	1,05	1,0
r_2 , м	24	26	28	30	32	34	36	38	35	33	31	29	27

Пример выполнения лабораторной работы с методическими указаниями

Покажем порядок выполнения работы на примере варианта 0.

Дано: $H_1 = 1,1$ м; $H_2 = 1,8$ м; $k_1 = 1,0$ м/сут.; $r_1 = 1,0$ м; $r_2 = 24$ м.

Справочные данные: По рис. А.1 (приложение А) находим значение безразмерного коэффициента водоотдачи, соответствующего коэффициенту фильтрации $k_1 = 1,0$ м/сут. Получаем $\mu = 0,15$.

Переводим коэффициент фильтрации в м/час.: $k = k_1/24 = 0,0417$ м/час.

Программа расчета

$H1 := 1.1$ $H2 := 1.8$ $k1 := 1.0$ $r1 := 1.0$ $r2 := 24$ $T := 250$

1. Вычисляем параметр M и установившийся расход воды к колодцу (м³/час) по формуле Дюпюи:

$$k := \frac{k1}{24} = 0.0417 \quad M := \frac{\mu}{k} = 3.6 \quad Qd := \pi \cdot k \cdot \frac{H2^2 - H1^2}{\ln(r2) - \ln(r1)} = 0.0836$$

Записываем уравнение кривой депрессии и вспомогательную функцию

$$Hd(r) := \sqrt{H1^2 + \frac{Qd}{\pi \cdot k} \cdot \ln\left(\frac{r}{r1}\right)} \quad H0(r) := \begin{cases} H1 & \text{if } r = r1 \\ H2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

2. Численным методом решаем краевую задачу с помощью операторов Given-Pdesolve и строим графики (рис. 1.2)

Given

$$M \cdot H_t(r,t) = H(r,t) \cdot H_{rr}(r,t) + (H_r(r,t))^2 + \frac{H(r,t)}{r} \cdot H_r(r,t)$$

$$H(r1,t) = H1 \quad H(r2,t) = H2 \quad H(r,0) = H0(r)$$

$$H := Pdesolve \left[H, r, \begin{pmatrix} r1 \\ r2 \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}, 200, 800 \right] \quad r := r1, r1 + 0.01..r2 \quad t := 0..T$$

Замечания:

1. Частная производная в виде индекса по соответствующему аргументу (r или t) задается после точки;
2. После оператора *Given* знаки равенства в уравнениях набираются в логическом меню (выделяются полужирным шрифтом).

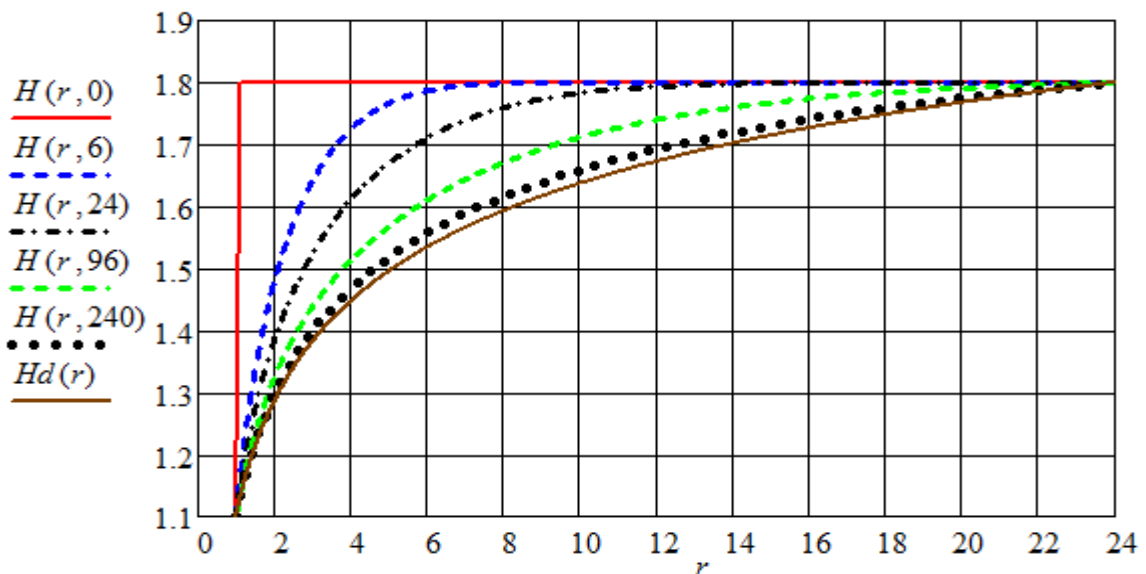


Рис. 1.2. Профили уровня грунтовых вод (м) в разные моменты времени (час.) и стационарная кривая депрессии $Hd(r)$

3. Формируем функцию зависимости расхода воды от радиальной координаты и времени (рис. 1.3)

$$Q(r,t) := 2 \cdot \pi \cdot k \cdot H(r,t) \cdot \left(\frac{d}{dr} H(r,t) \right) \quad Qs(t) := Qd$$

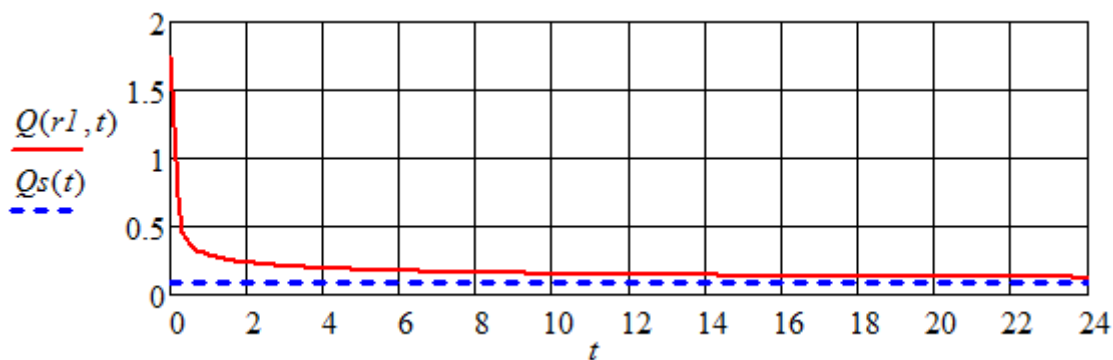


Рис. 1.3. Зависимость притока воды к колодцу (м³/час.) от времени (час.)

4. Строим зависимость времени наполнения колодца на заданную глубину в квазистационарном приближении (в каждый момент времени считаем расход по формуле Дюпюи) (рис. 1.4):

$$t(h) := r1^2 \cdot \ln\left(\frac{r2}{r1}\right) \cdot \ln\left(\frac{H2 + h}{H2 - h}\right)$$

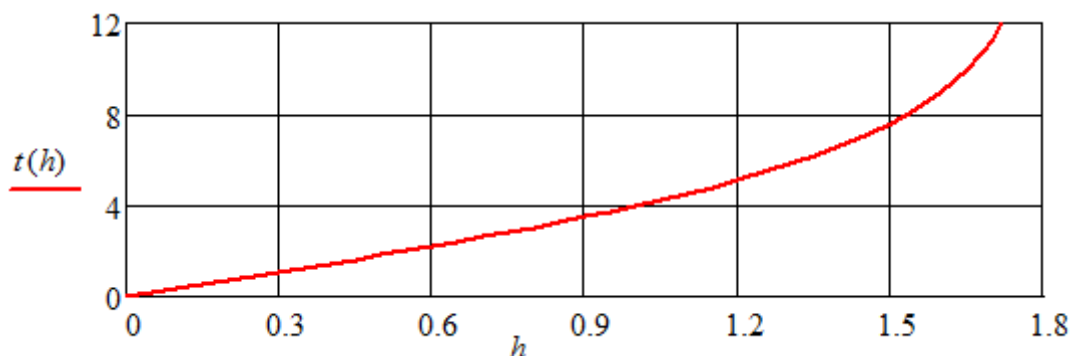


Рис. 1.4. Время t (час.) наполнения колодца до заданного уровня h (м) – расчет в квазистационарном приближении

Время наполнения колодца до уровня $H1$ (час.)

$$t(H1) = 4.517$$

Выводы:

1. Приток воды к колодцу в установившемся режиме составляет 0,0836 м³/час;
2. Профили уровня грунтовых вод по времени стремятся к кривой депрессии;
3. Приблизительное время наполнения колодца до уровня $H1$ 4,52 часа.

Необходимо подготовиться отвечать на контрольные вопросы для защиты отчета о выполнении лабораторной работы.

Контрольные вопросы

1. Уравнение нестационарной одномерной фильтрации
2. Что такое коэффициент фильтрации? Единицы измерения.

3. Формула Дюпюи для расхода в установившемся режиме фильтрации.
4. Как найти численное решение краевой задачи с уравнениями в частных производных?
5. Краевые условия к уравнению нестационарной фильтрации.
6. Что такое кривая депрессии?

Лабораторная работа № 2
 Зависимость площади живого сечения и смоченного периметра
 от глубины водотока
Физическая постановка задачи (схематизация)

Во время рекогносцировочного обследования малого водотока были выполнены промеры глубин и получены отметки дна в метрах Балтийской системы (м БС). Поперечное сечение водотока неправильной формы (как на рис. 2.1). Дно плотное (без ила). Ширина водотока B (м); нижняя отметка дна Z_m (м БС); наибольшая глубина водотока при обследовании h_0 , (м). Выполнена классификация русла по таблице М.Ф. Срибного (Приложение Б, для определения безразмерного коэффициента шероховатости n). Требуется рассчитать характеристики обследованного сечения водотока.

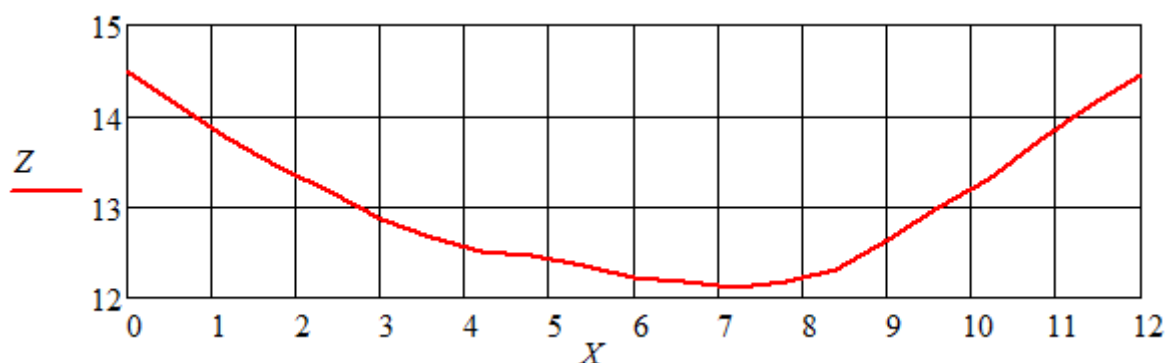


Рис. 2.1. Поперечное сечение водотока (отметки дна, м БС)

Математическая модель

При равномерном течении водотока средняя скорость находится по формуле Шези:

$$V = C \cdot \sqrt{R \cdot I}, \quad (2.1)$$

где I – уклон водной поверхности; R – гидравлический радиус потока, м; C – коэффициент Шези, м^{0,5}/с.

В соответствии с нормативными документами коэффициент Шези C рассчитывается по формуле Н.Н. Павловского (при глубине h до 5 м):

$$C = R^y / n, \quad y = 2,5 \cdot \sqrt{n} - 0,13 - 0,75 \cdot \sqrt{R} \cdot (\sqrt{n} - 0,1), \quad (2.2)$$

где n – безразмерный коэффициент шероховатости, определяемый по таблице М.Ф. Срибного (Приложение Б).

Известно, что при инженерных расчетах для широких водотоков в формуле (2.2) заменяют гидравлический радиус средней глубиной h_c . Однако в малых водотоках такая замена не всегда возможна.

Гидравлический радиус в некотором сечении водотока зависит от глубины и рассчитывается по формуле:

$$R(h) = \omega(h) / \chi(h), \quad (2.3)$$

где ω – площадь живого сечения водотока, m^2 , χ – смоченный периметр, м.

Расчеты по (2.3) для сечений правильной формы выполняются по стандартным формулам. Если сечение неправильной формы, требуется численное интегрирование функции, построенной по данным промеров глубин (см. рис. 2.1):

$$\omega = \int_{Z1} X(z) dz + \int_{Z2} X(z) dz, \quad (2.4)$$

где $Z1, Z2$ – области слева и справа от наибольшей глубины.

Задание

1. По данным своего варианта из табл. 2.1, 2.2 в среде Mathcad построить поперечное сечение водотока в м БС, как на рис. 2.1.

2. Найти многочлены, аппроксимирующие линию дна в области слева и справа от наибольшей глубины. Выбор порядка многочлена аппроксимации обосновать.

3. С помощью интегрирования построить зависимости площади живого сечения, смоченного периметра, средней глубины и гидравлического радиуса от наибольшей глубины водотока.

4. Рассчитать коэффициент Шези по гидравлическому радиусу и по средней глубине водотока. Найти погрешность при такой замене.

Таблица 2.1

Параметр	Номер варианта											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$B, м$	12	15	13	14	16	18	17	15.5	13.4	12.8	16.3	19
$h_0, м$	1,8	1,4	1,0	1,5	1,75	1,1	1,35	1,6	1,45	1,05	1,55	1,2
$Z_m, м БС$	12.1	8.2	11.5	13.4	12.3	14	16	15.7	18.1	17	19	7.8
Номер n	7	9	10	8	6	5	4	10	7	8	9	3

Пояснение:

Номер n соответствует номеру строки в табл. Б.1 (Приложение Б).

Таблица 2.2 – Варианты данных измерения отметок дна водотока, H , м

Номер измерения	Номер варианта											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	2.39	2.31	2.29	2.55	2.49	2.68	2.44	2.27	2.47	2.05	2.16	2.33
2	2.01	1.80	2.25	1.78	2.01	2.01	2.01	2.01	2.03	1.81	2.01	2.01
3	1.65	1.24	2.02	1.54	1.65	1.62	1.64	1.65	1.62	1.63	1.61	1.66
4	1.34	0.79	1.69	0.97	1.34	1.34	1.34	1.34	1.30	1.34	1.35	1.37
5	1.06	0.36	1.16	0.58	1.06	1.06	1.05	1.06	1.07	1.06	1.05	1.09
6	0.76	0.12	0.81	0.18	0.76	0.76	0.77	0.75	0.73	0.78	0.74	0.79
7	0.57	0.06	0.47	0.15	0.57	0.57	0.58	0.55	0.55	0.59	0.53	0.51
8	0.40	0	0.11	0	0.40	0.41	0.44	0.42	0.40	0.41	0.40	0.42
19	0.37	0.10	0	0.06	0.37	0.37	0.31	0.33	0.36	0.37	0.35	0.38
10	0.25	0.24	0.08	0.19	0.25	0.25	0.15	0.22	0.25	0.23	0.25	0.26
11	0.12	0.78	0.22	0.46	0.12	0.12	0.09	0.10	0.11	0.10	0.12	0.13
12	0.08	1.05	0.49	1.20	0.08	0.08	0.0	0.0	0.09	0.06	0.07	0.08
13	0.0	1.59	0.85	1.66	0.0	0.0	0.06	0.08	0.0	0.0	0.0	0.0
14	0.07	2.07	1.12	2.07	0.07	0.07	0.17	0.15	0.07	0.07	0.08	0.06
15	0.21	2.27	1.49	2.24	0.21	0.21	0.28	0.21	0.22	0.21	0.23	0.24
16	0.55	2.40	1.75	2.56	0.55	0.55	0.59	0.54	0.56	0.52	0.53	0.55
17	0.89	-	1.99	2.88	0.89	0.89	0.94	0.91	0.97	0.89	0.88	0.90
18	1.21	-	2.18	-	1.21	1.24	1.41	1.28	1.31	1.29	1.25	1.21
19	1.61	-	2.44	-	1.61	1.69	-	1.60	1.67	1.58	1.63	1.61
20	2.02	-	2.63	-	2.02	-	-	2.08	-	2.19	-	2.15
21	2.35	-	-	-	2.56	-	-	-	-	-	-	-

Пример выполнения лабораторной работы с методическими указаниями

Покажем порядок выполнения работы на примере варианта 0.

Дано: $Z_m = 12,1$ м; $B = 12$ м; $h_0 = 1,8$. Номер строки n равен 7.

Справочные данные: По табл. Б.1 (Приложение Б) находим значение безразмерного коэффициента шероховатости в строке номер 7: $n = 0,08$.

Программа расчета

$ORIGIN := 1$ $Z_m := 12.1$ $B := 12$ $n := 0.08$ $h_0 := 1.8$

1. Считываем файл с отметками глубин

$H := READPN("h00.txt")$ $N := rows(H) = 21$ $i := 1..N$

Рассчитываем отметки дна (м БС) и горизонтальные координаты (м)

$Z_i := H_i + Z_m$ $H_m := max(H) = 2.39$ $X_i := \frac{B}{N-1} \cdot (i-1)$

Строим поперечное сечение водотока (рис. 2.1).

2. Для выполнения второго задания по табл. 2.2 находим номер нулевой отметки дна водотока (низшая точка дна на рис. 2.1)

$$Nm := 13$$

Выделяем массивы данных слева и справа от найденной точки

$$H1 := \text{submatrix}(H, 1, Nm, 1, 1) \quad X1 := \text{submatrix}(X_{Nm} - X, 1, Nm, 1, 1)$$

$$H2 := \text{submatrix}(H, Nm, N, 1, 1) \quad X2 := \text{submatrix}(X - X_{Nm}, Nm, N, 1, 1)$$

Находим аппроксимирующие многочлены линии дна слева и справа от низшей точки (рис. 2.2)

$$vs1 := \text{regress}(H1, X1, 3) \quad x1(h) := \text{interp}(vs1, H1, X1, h)$$

$$vs2 := \text{regress}(H2, X2, 3) \quad x2(h) := \text{interp}(vs2, H2, X2, h)$$

$$h := 0, 0.1..X_N$$

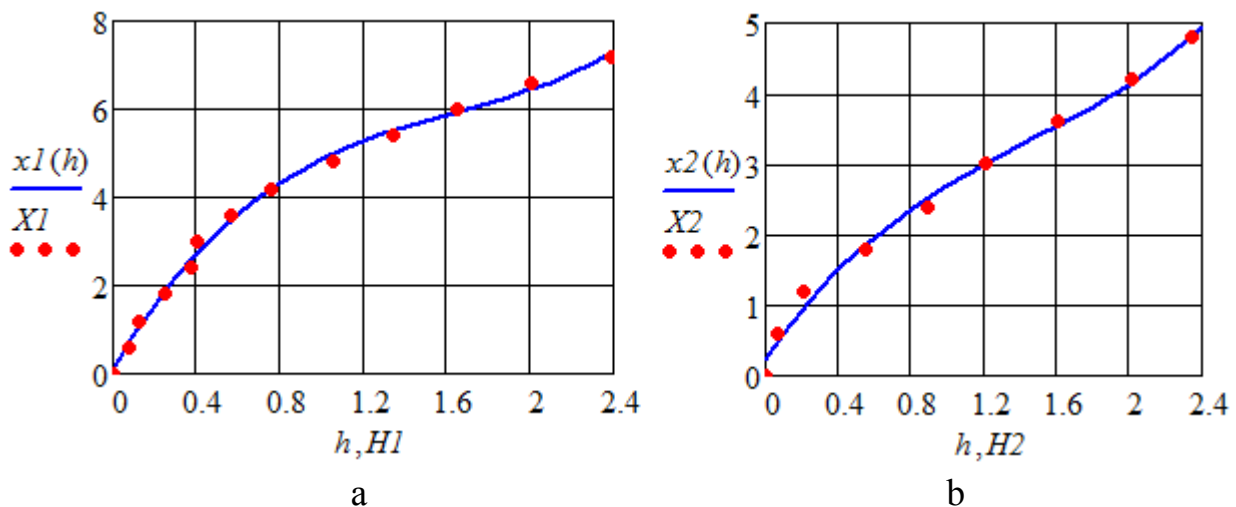


Рис. 2.2. Связь координаты x (м) с глубиной h (м):

а – до низшей точки; б – после низшей точки

3. С помощью интегрирования находим зависимость от наибольшей глубины водотока площади живого сечения (рис. 2.3), смоченного периметра (рис. 2.4) средней глубины и гидравлического радиуса (рис. 2.5):

$$\omega(h) := \int_0^h x1(t) dt + \int_0^h x2(t) dt \quad hc(h) := \frac{\omega(h)}{x1(h) + x2(h)}$$

$$\chi(h) := \int_0^h \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dt} x1(t)\right)^2} dt + \int_0^h \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dt} x2(t)\right)^2} dt \quad R(h) := \frac{\omega(h)}{\chi(h)}$$

Значения характеристик во время обследования:

$$\omega(h_0) = 11.66 \quad \chi(h_0) = 10.431 \quad R(h_0) = 1.118 \quad hc(h_0) = 1.173$$

4. Рассчитываем коэффициент Шези $C1$ по средней глубине водотока и по гидравлическому радиусу $C2$

$$y(h) := 2.5 \cdot \sqrt{n} - 0.13 - 0.75 \cdot \sqrt{h} \cdot (\sqrt{n} - 0.1) \quad C(h) := \frac{h^{y(h)}}{n}$$

$$j := 1..40 \quad ho_j := \frac{Hm}{40} \cdot j \quad C1_j := C(hc(ho_j)) \quad C2_j := C(R(ho_j))$$

Значение коэффициента Шези во время обследования $C(h_0) = 15.75$.

Находим погрешность расчета коэффициента Шези при замене гидравлического радиуса средней глубиной (рис. 2.5)

$$\varepsilon_j := \frac{C1_j - C2_j}{C2_j} \cdot 100$$

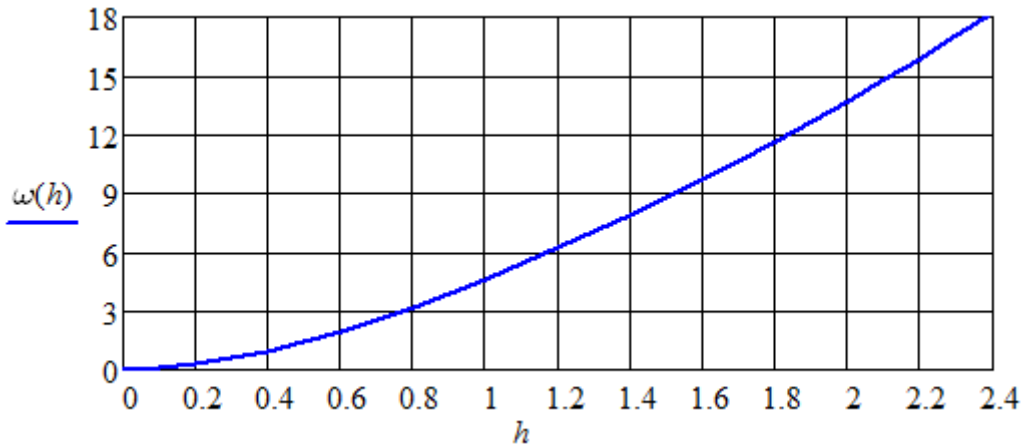


Рис. 2.3. Зависимость площади живого сечения (m^2) от наибольше глубины (м)

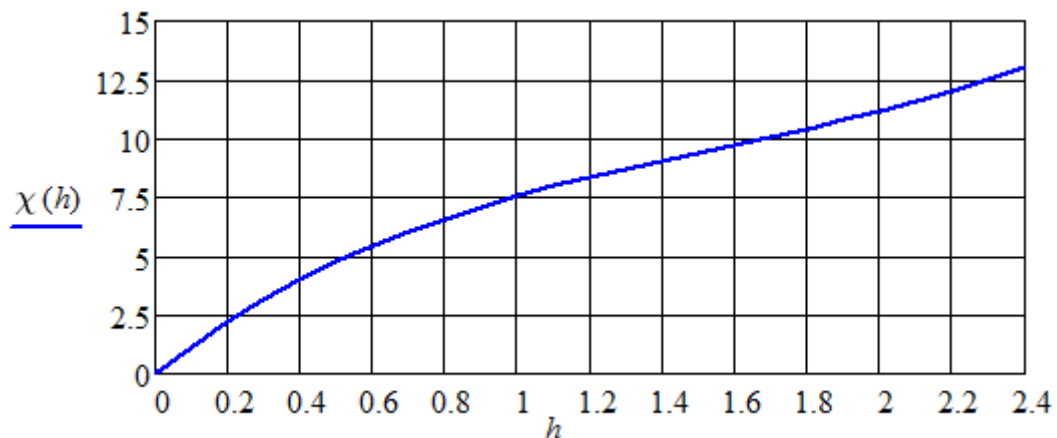


Рис. 2.4. Зависимость смоченного периметра (м) от наибольшей глубины (м)

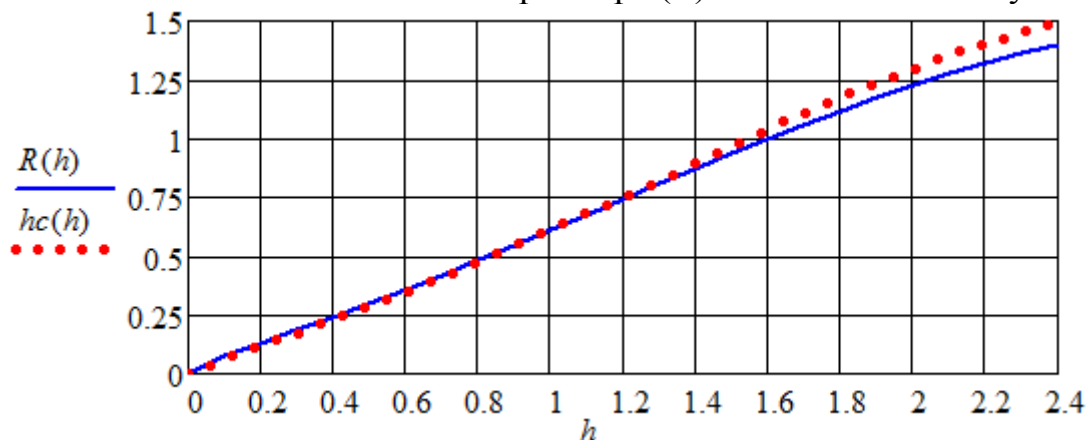


Рис. 2.5. Зависимость гидравлического радиуса R (м) и средней глубины h_c (м) от наибольшей глубины водотока h (м)

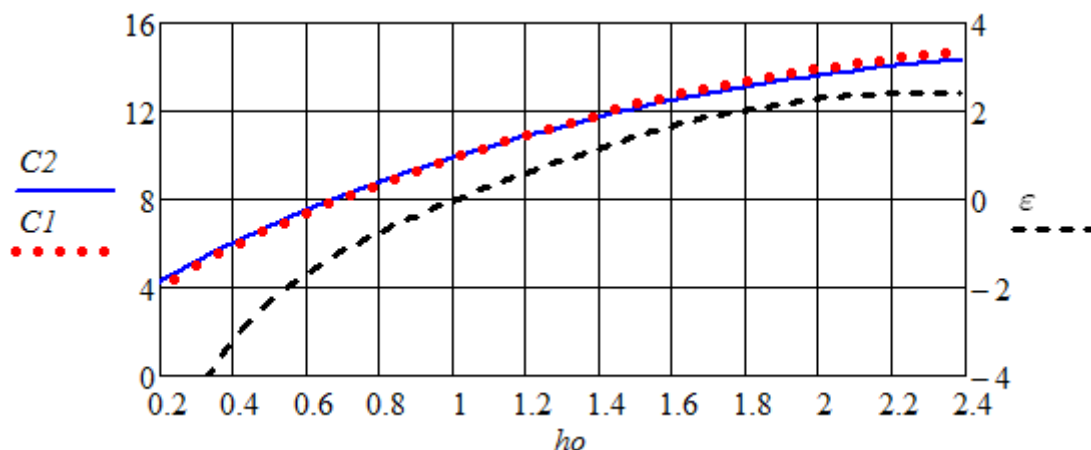


Рис. 2.6. Зависимость коэффициента Шези от глубины; ϵ – погрешность расчета при замене гидравлического радиуса средней глубиной (%)

Выводы:

1. Значения характеристик во время обследования:
 - площадь живого сечения водотока $\omega = 11,66 \text{ м}^2$;
 - смоченный периметр $\chi = 10,431 \text{ м}$;
 - гидравлический радиус $R = 1,118 \text{ м}$;
 - средняя глубина $h_c = 1,173 \text{ м}$.
2. Значение коэффициента Шези во время обследования $C = 15,75 \text{ м}^{0,5}/\text{с}$.
3. Погрешность расчета коэффициента Шези при замене гидравлического радиуса глубиной в обследованном сечении водотока не превышает 5 %. Замена вполне допустима.

Контрольные вопросы

1. Для чего используется коэффициент Шези?
2. Формула Павловского.
3. Как определяется коэффициент шероховатости русла?
4. Что такое смоченный периметр?
5. Формула для расчета гидравлического радиуса водотока.

Лабораторная работа № 3.

Моделирование распространения загрязнения в водоеме
после аварийного сброса

Физическая постановка задачи (схематизация)

Мгновенный (залповый) сброс массы m кг загрязняющего вещества произошел в мелком озере глубиной H в точке, находящейся у самого берега. Фоновая концентрация примеси в водоеме – C_0 . В начальный момент времени $t=0$ вся масса загрязняющего вещества сосредоточена в точке сброса. Осаждения или распада примеси не происходит, значит масса загрязняющего вещества остается постоянной $m = \text{const}$. Концентрацию загрязняющего вещества C можно считать

постоянной по глубине; изменения происходят в горизонтальной плоскости (x,y) и по времени t : $C=f(x,y,t)$. В области сброса сточных вод отсутствует однонаправленное постоянное течение. Имеются меняющиеся во времени и по направлению слабые течения, средняя скорость которых V .

Математическая модель

В рассматриваемых условиях процесс распространения вещества в водах озера описывается двухмерным уравнением диффузии в неподвижной среде (D – коэффициент горизонтальной диффузии примеси):

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right), \quad (3.1)$$

при начальном условии $C(x,y,0) = C_0$ и граничном условии

$$\lim_{r \rightarrow \infty} C(r,t) = C_0; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (3.2)$$

где r – расстояние от точки сброса по горизонтали.

Решением краевой задачи (3.1)-(3.2) уравнения является функция Гаусса:

$$C(r,t) = \frac{m}{2\pi \cdot H \cdot \sigma(t)} \cdot \exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma(t)^2}\right) + C_0, \quad \sigma(t) = \sqrt{2Dt}. \quad (3.3)$$

Коэффициент турбулентной диффузии в рассматриваемых условиях рекомендуется рассчитывать по формуле [9]:

$$D = g \cdot H \cdot V / (Cs \cdot M), \quad (3.4)$$

где g – ускорение свободного падения; Cs – коэффициент Шези, определяемый по формуле (2.2) при $R=H$; M – величина, зависящая от коэффициента Шези:

$$M = \begin{cases} 0,7 \cdot Cs + 6 & \text{при } Cs < 60; \\ 48 & \text{при } Cs \geq 60. \end{cases} \quad (3.5)$$

Как видно из выражения (3.3), максимальная концентрация загрязняющего вещества C_{max} всегда наблюдается в точке сброса ($r=0$) и убывает со временем. Функция Гаусса (3.3) является выпуклой при $r < \sigma$, при $r > \sigma$ – вогнутой. Следовательно, концентрация загрязняющего вещества в некоторый момент времени t будет убывать в окрестностях точки сброса $r < \sigma$ или на пространственном интервале $r < \sqrt{2Dt}$, а вне этого интервала, то есть при $r > \sqrt{2Dt}$, концентрация будет возрастать.

Известно, что 99,9% площади под кривой Гауссова распределения приходится на интервал $r < 3\sigma$. Значит 99,9% массы загрязняющего вещества будет сосредоточено в пределах интервала $r < 3\sqrt{2Dt}$. Поэтому величину $L = 3\sqrt{2Dt}$ можно условно принять за границу области распространения загрязнения. Диаметр области загрязнения будет увеличиваться со временем согласно закону \sqrt{t} , причем скорость распространения загрязнения тем выше, чем больше величина коэффициента диффузии.

Задание

1. По данным своего варианта из табл. 3.1 в среде Mathcad рассчитать значение коэффициент Шези и коэффициента диффузии.
2. Построить зависимость от времени области распространения загрязнения, профили концентрации примеси. Найти границу загрязнения через 100 часов.
3. Построить контурные графики полей концентрации загрязнения в водоеме через 2 часа и 4 часа после сброса.

Таблица 3.1 – Варианты параметров водоема

Параметр	Номер варианта											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
H , см	50	60	70	80	54	66	75	83	57	68	72	88
V , мм/с	40	36	43	52	48	37	42	34	45	50	29	56
m , кг	100	90	95	110	120	80	130	85	98	115	92	125
C_0 , г/дм ³	2	1,5	2,2	1,8	2,3	1,6	2,4	1,7	2,5	1,9	2,6	2,1
Номер n	4	3	2	1	2	3	4	5	6	1	2	9

Пояснение:

Номер n соответствует номеру строки в табл. Б.1 (Приложение Б).

Пример выполнения лабораторной работы с методическими указаниями

Покажем порядок выполнения работы на примере варианта 0.

Дано: $C_0 = 2 \text{ г/дм}^3 = 2 \text{ мг/л}$; $H = 50 \text{ см} = 0,5 \text{ м}$; $V = 40 \text{ мм/с} = 0,04 \text{ м/с}$; $m = 100 \text{ кг}$. Номер строки n равен 4.

Справочные данные: По табл. Б.1 (Приложение Б) находим значение безразмерного коэффициента шероховатости в строке номер 4: $n = 0,04$.

Программа расчета

$$ORIGIN := 1 \quad g := 9.8$$

$$C_0 := 2 \quad H := 0.5 \quad V := 0.04 \quad m := 100 \quad n := 0.04$$

1. Рассчитываем коэффициент Шези и коэффициент диффузии в системе единиц СИ:

$$y_s := 2.5 \cdot \sqrt{n} - 0.13 - 0.75 \cdot \sqrt{H} \cdot (\sqrt{n} - 0.1) \quad C_s := \frac{H^{y_s}}{n} \quad C_s = 20.07$$

$$M := \begin{cases} 0.7 \cdot C_s + 6 & \text{при } C_s < 60 \\ 48 & \text{при } C_s \geq 60 \end{cases} \quad M = 20.05 \quad D := \frac{g \cdot H \cdot V}{C_s \cdot M} \quad D = 4.871 \cdot 10^{-4}$$

2. Строим зависимость области распространения загрязнения (m) от времени в часах (рис. 3.1):

$$\sigma(t) := \sqrt{2 \cdot D \cdot t \cdot 3600} \quad L(t) := 3 \cdot \sigma(t) \quad L(100) = 56.18$$

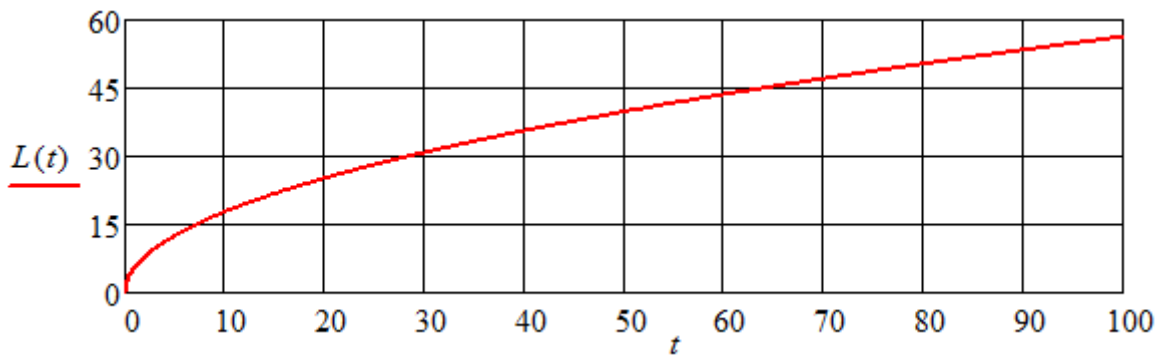


Рис. 3.1. Граница распространения загрязнения

Строим профили концентрации примеси в фиксированный момент времени (рис. 3.2) и на заданном расстоянии от источника (рис. 3.3).

$$C(r,t) := \frac{m}{2 \cdot \pi \cdot H \cdot \sigma(t)} \cdot \exp\left(\frac{-r^2}{2 \cdot \sigma(t)^2}\right) + C_0$$

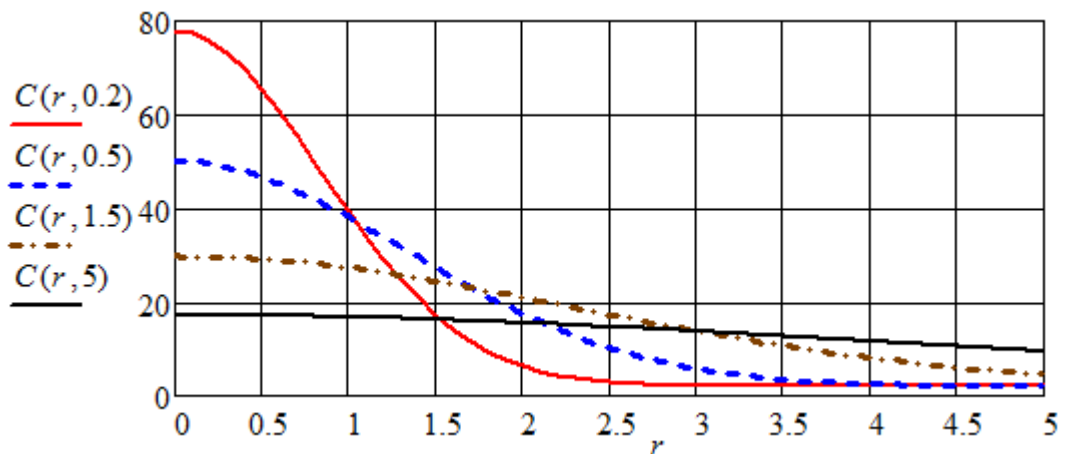


Рис. 3.2. Профили концентрации примеси в фиксированные моменты времени

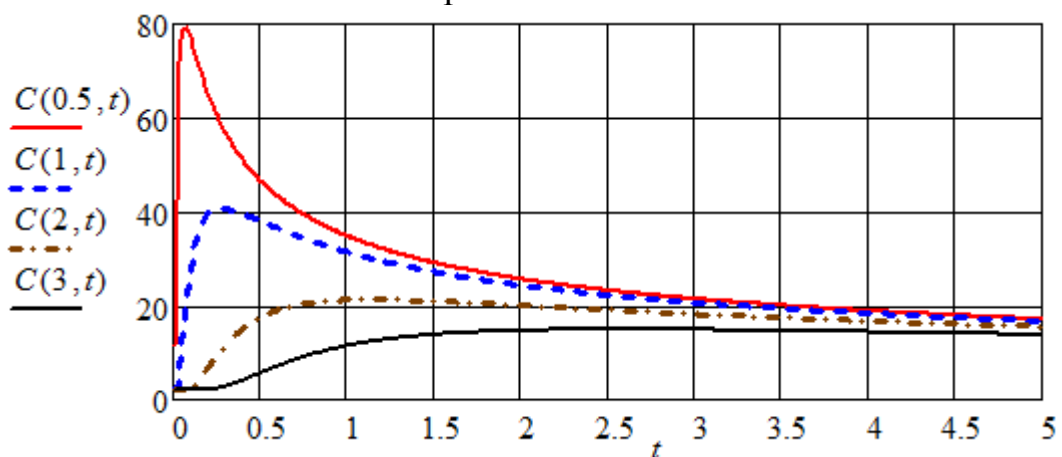


Рис. 3.3. Профили концентрации примеси на заданных расстояниях от источника

3. Для построения контурных графиков полей концентрации загрязнения в водоеме через 2 часа и 4 часа после сброса необходимо сформировать

вспомогательные массивы *C2* и *C4* с использованием оператора *CreateMesh* (структуру посмотреть в справке). Затем на пространственном графике нужно сделать отметку «Контурный график» (рис. 3.4 и рис. 3.5).

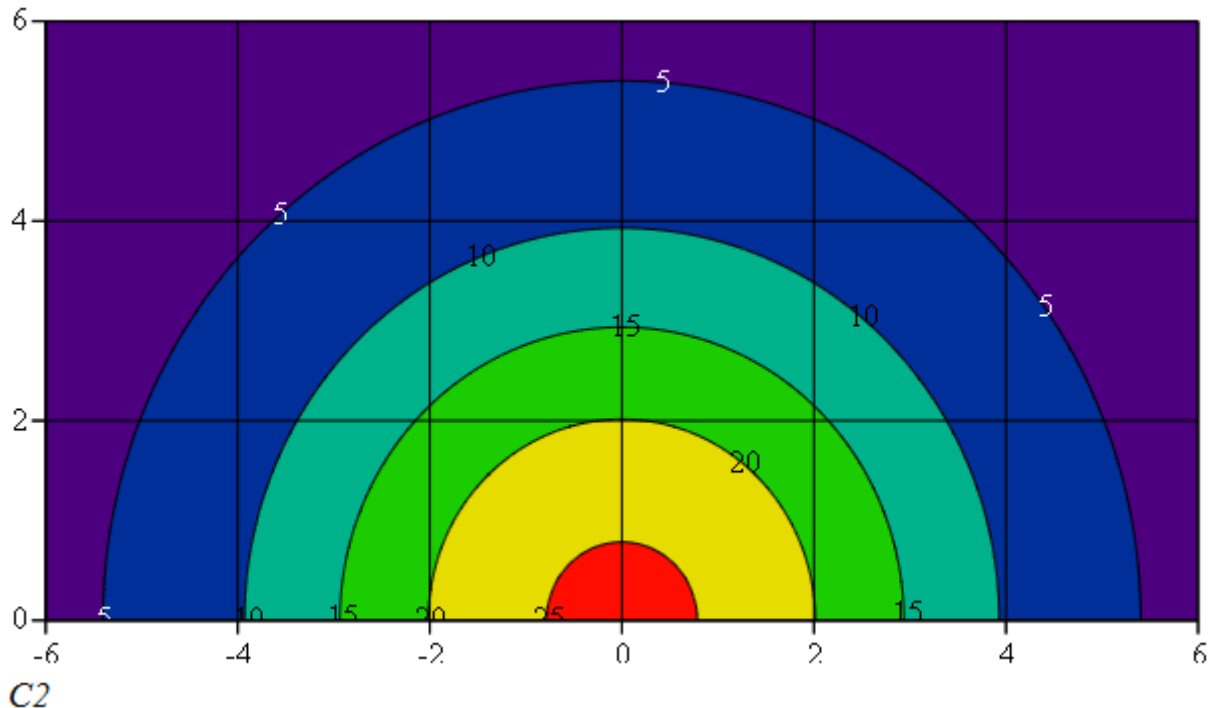


Рис. 3.4. Поля концентрации загрязнения в водоеме через 2 часа после сброса

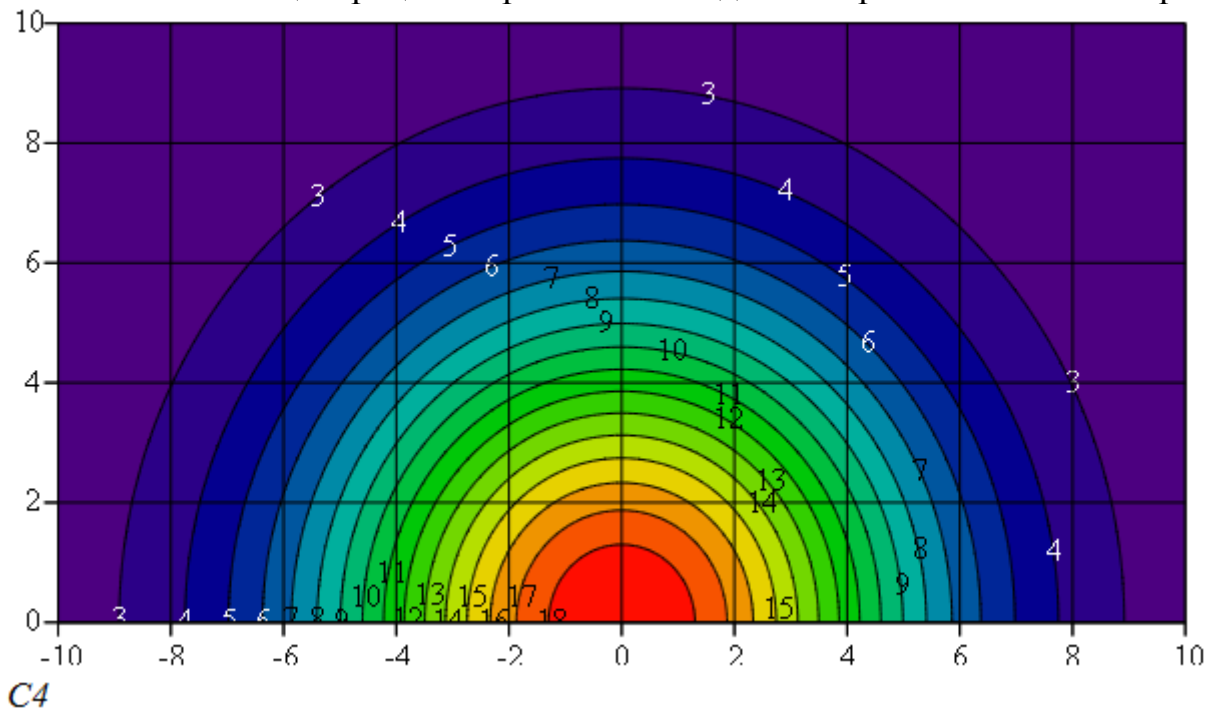


Рис. 3.5. Поля концентрации загрязнения в водоеме через 4 часа после сброса

С помощью настроек можно получить те же поля в виде графиков трехмерных поверхностей (рис. 3.6 и 3.7), более наглядные, но менее точные для практического использования.

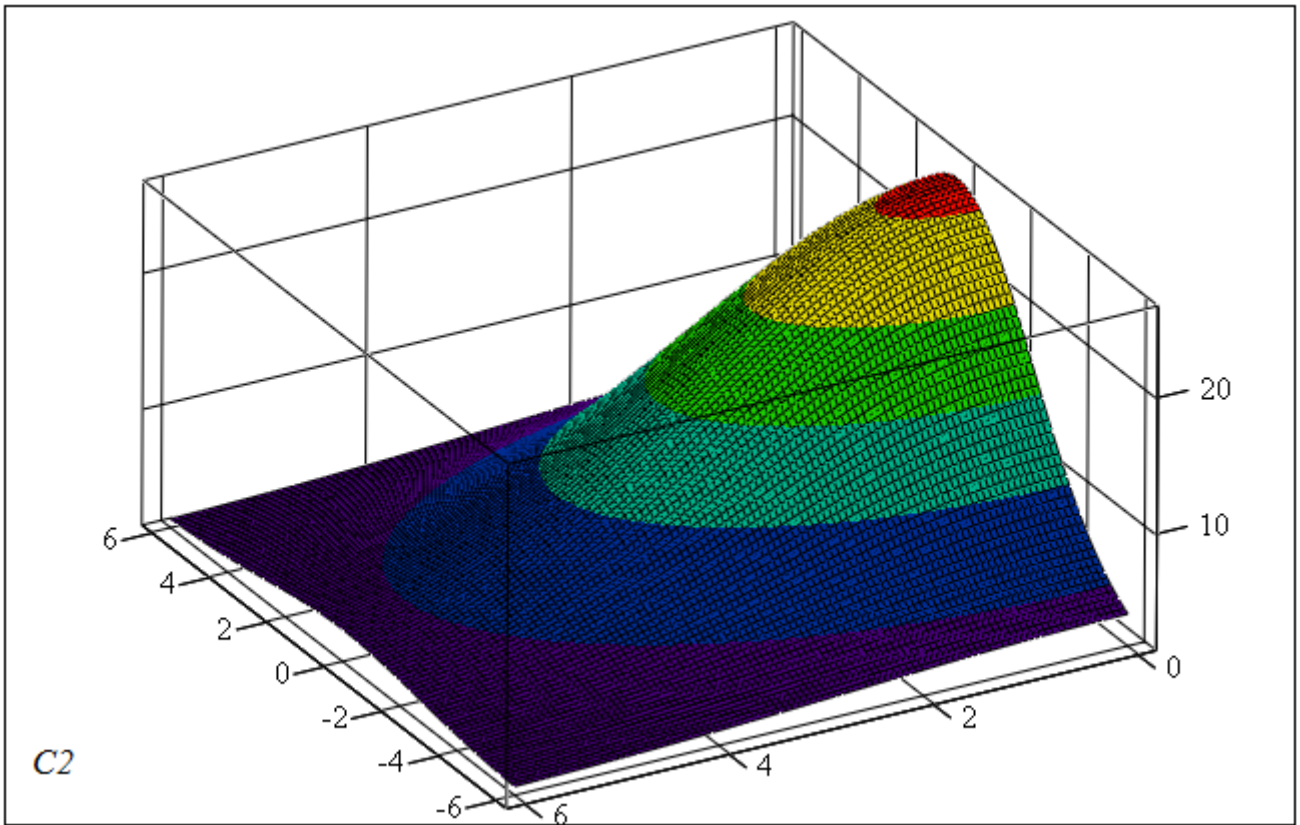


Рис. 3.6. Трехмерные графики концентрации загрязнения в водоеме через 2 часа после сброса

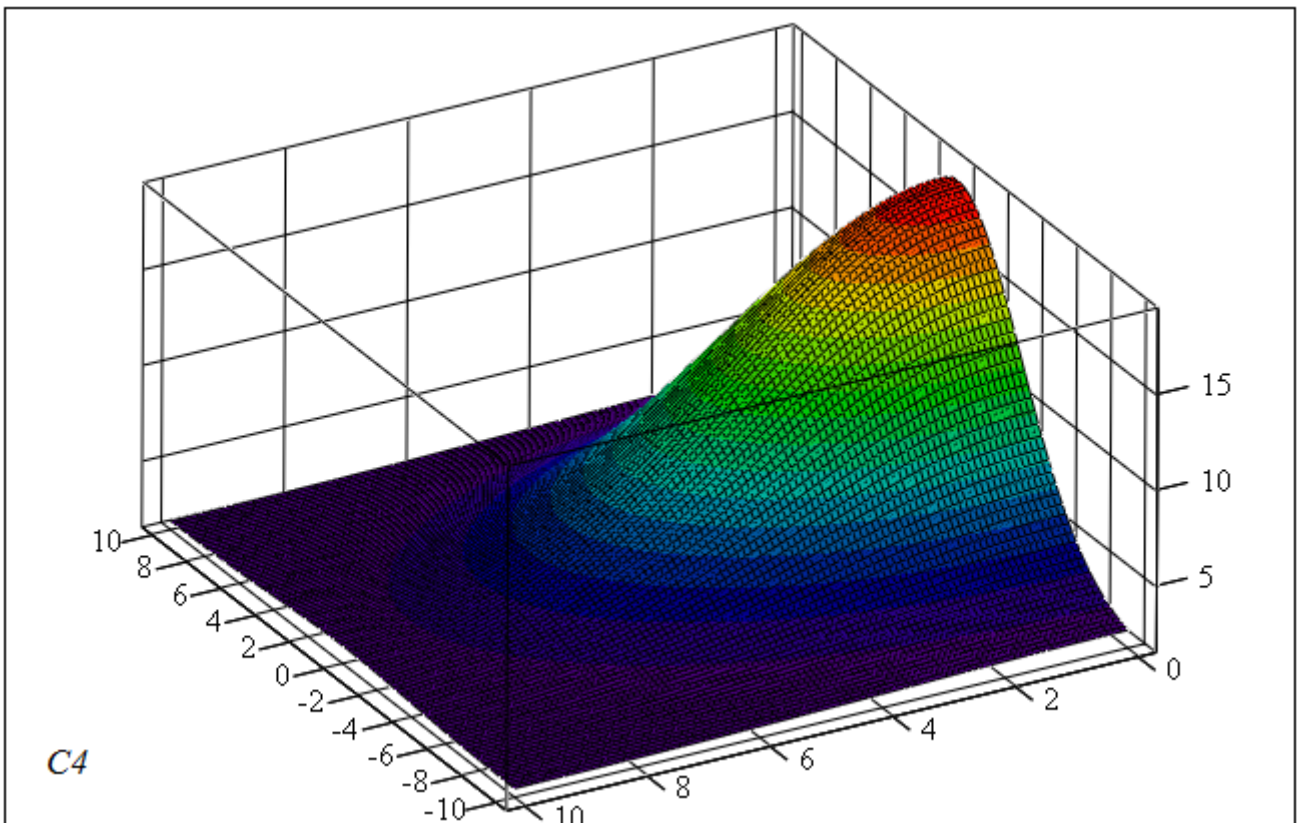


Рис. 3.7. Трехмерные графики концентрации загрязнения в водоеме через 4 часа после сброса

Выводы:

1. Рассчитанный коэффициент горизонтальной диффузии $D = 4.871 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$;
2. Граница области загрязнения через 100 часов после сброса $L = 56,2 \text{ м}$.
3. Поля загрязнения в водоеме имеют вид концентрических окружностей с центром в точке сброса;
4. Концентрация загрязняющего вещества в любой момент времени t убывает в окрестностях точки сброса при $r < \sigma$ и возрастет при $r > \sigma$.

Контрольные вопросы

1. Напишите уравнение диффузии пассивной примеси в водоеме без постоянно направленного движения воды.
2. Какой вид имеет решение такого уравнения?
3. Как рассчитать коэффициент турбулентной диффузии примеси?
4. Как зависит от времени граница распространения загрязнения в рассматриваемых условиях?
5. Описать структуру оператора *CreateMesh*.

Лабораторная работа № 4

Расчет годового стока с площади водосборного бассейна при отсутствии систематических наблюдений

Физическая постановка задачи (схематизация)

При проведении инженерно-гидрометеорологических изысканий одной из основных расчетных характеристик является годовой сток с площади A (кв. км) водосборного бассейна заданной обеспеченности P (%). В данной лабораторной работе полагаем, что систематические гидрологические наблюдений за водотоком не проводились. В таком случае средний слой годового стока в районе изысканий h (мм), коэффициенты вариации C_V и асимметрии $C_S = 0,6$ определяют по региональным картам. В частности, карта среднего слой годового стока на территории Калининградской области [9] приведена в Приложении В. Исследования показали, что годовой сток за 1901-2014 в Калининградской области практически не изменился, поэтому данные [9] по слою годового стока можно использовать в настоящее время.

Математическая модель

В качестве теоретической кривой обеспеченности слоя годового стока h используется распределение Крицкого Менкеля. Плотность вероятности указанного трехпараметрического распределения имеет следующий вид:

$$f(x) = \frac{1}{b \cdot \Gamma(\alpha)} \cdot \left(\frac{\Gamma(\alpha + b)}{\Gamma(\alpha)} \right)^{\alpha/b} \cdot x^{\alpha/b-1} \cdot \exp \left[- \left(\frac{\Gamma(\alpha + b)}{\Gamma(\alpha)} \cdot x \right)^{1/b} \right], \quad (4.1)$$

где Γ – стандартная гамма-функция; α, b – параметры, подлежащие определению; третий параметр теоретического распределения \bar{h} – известен.

Систему интегральных уравнений для определения параметров распределения можно решить численным методом:

$$\sqrt{\int_0^{\infty} (x-1)^2 f(x, \alpha, b) dx = C_V}; \quad \int_0^{\infty} (x-1)^3 f(x, \alpha, b) dx = C_S \cdot C_V^3. \quad (4.2)$$

Функция распределения и теоретическая вероятность превышения (обеспеченность) слоя стока могут быть рассчитаны по формулам:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt; \quad P(h) = 100 \cdot \left(1 - F\left(\frac{h}{\bar{h}}\right) \right). \quad (4.3)$$

Последнее равенство (4.3) позволяет найти слой стока годового уровня любой заданной обеспеченности. Умножив слой годового стока на площадь водосборного бассейна, получим объем годового стока.

Задание

1. По данным своего варианта из табл. 4.1 в среде Mathcad рассчитать параметры распределения Крицкого-Менкеля и построить теоретическую кривую обеспеченности годового стока.
2. Рассчитать годовой сток обеспеченностью $P = 1; 5; 10; 25; 50 \%$.
3. Для трех створов с площадью водосборного бассейна A_1, A_2, A_3 , найти объем стока и среднегодовой расход указанной обеспеченности.

Таблица 4.1 – Варианты параметров бассейна

Параметр	Номер варианта											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
\bar{h} , мм	240	260	230	210	220	270	200	280	250	235	265	215
C_V	0,3	0,2	0,25	0,33	0,22	0,31	0,24	0,32	0,23	0,28	0,21	0,27
C_S	0,6	0,42	0,49	0,68	0,41	0,57	0,50	0,65	0,46	0,54	0,43	0,52
A_1 , км ²	151	162	173	180	154	166	175	183	157	168	172	158
A_2 , км ²	184	193	202	208	178	187	196	214	182	198	204	187
A_3 , км ²	245	230	241	233	204	232	258	275	227	236	268	251

Пример выполнения лабораторной работы с методическими указаниями

Покажем порядок выполнения работы на примере варианта 0.

Дано: $\bar{h} = 240$ мм; $C_V = 0,3$; $C_S = 0,6$; $A_1 = 151$ км²; $A_2 = 184$ км²; $A_3 = 245$ км².

Программа расчета

ORIGIN := 1

$$hs := 240 \quad Cv := 0.3 \quad Cs := 0.6 \quad A1 := 151 \quad A2 := 184 \quad A3 := 245$$

1. Задаем плотность вероятности Крицкого-Менкеля для модульного коэффициента:

$$\varphi(x, \alpha, b) := \frac{1}{b \cdot \Gamma(\alpha)} \cdot \left(\frac{\Gamma(\alpha + b)}{\Gamma(\alpha)} \right)^{\frac{\alpha}{b}} \cdot x^{\frac{\alpha}{b} - 1} \cdot \exp \left[- \left(\frac{\Gamma(\alpha + b)}{\Gamma(\alpha)} \cdot x \right)^{\frac{1}{b}} \right]$$

Начальное приближение параметров распределения:

$$a_0 := 1 \quad b_0 := 1$$

Система интегральных уравнений в среде Mathcad

Given

$$\sqrt{\int_0^{10} (x-1)^2 \varphi(x, a_0, b_0) dx} = Cv \quad \int_0^{10} (x-1)^3 \varphi(x, a_0, b_0) dx = Cs \cdot Cv^3$$

Искомые параметры распределения

$$ab := \text{Find}(a_0, b_0) \quad \alpha := ab_1 = 11.11 \quad b := ab_2 = 1.0$$

Искомая плотность вероятности

$$f(x) := \varphi(x, \alpha, b)$$

2. Функция распределения для модульного коэффициента и теоретическая вероятность превышения (обеспеченность) слоя стока

$$F(x) := \int_0^x f(t) dt \quad P(h) := 100 \cdot \left(1 - F\left(\frac{h}{hs}\right) \right)$$

Строим график (рис. 4.1), задав диапазон изменения аргумента.

$$hp := 50, 60..500$$

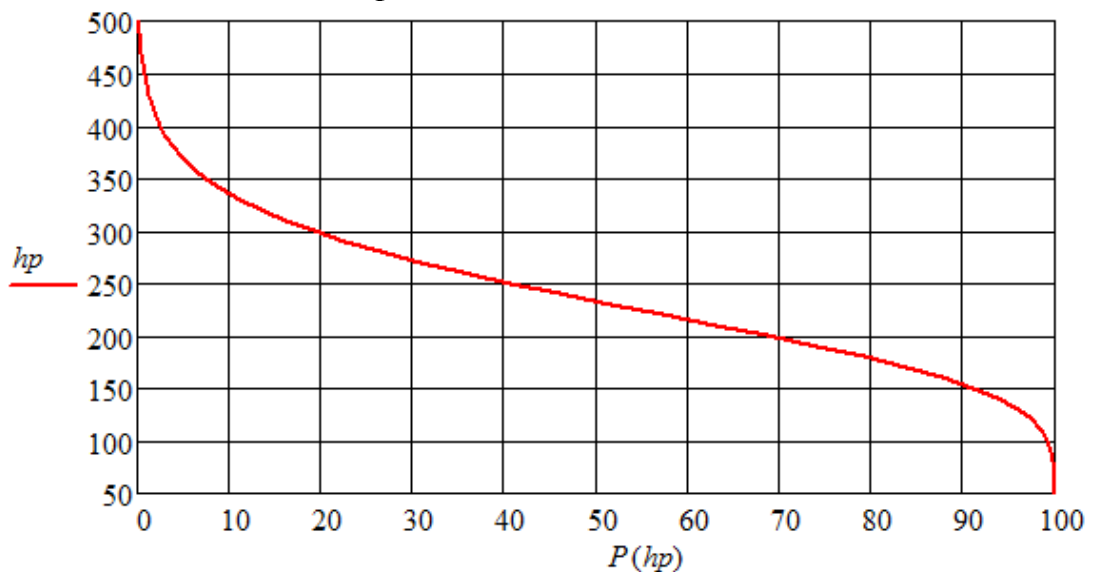


Рис. 4.1. Теоретическая кривая обеспеченности слоя годового стока, h (мм)

Рассчитаем годовой сток заданной обеспеченности

$$i := 1..3 \quad j := 1..5$$

$$Po := \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \\ 25 \\ 50 \end{pmatrix} \quad hh_j := \text{root}(P(ho) - Po_j, ho) \quad hh = \begin{pmatrix} 438.37 \\ 369.38 \\ 335.65 \\ 283.87 \\ 232.84 \end{pmatrix}$$

3. Рассчитаем объем годового стока, км³

$$A := \begin{pmatrix} 151 \\ 184 \\ 245 \end{pmatrix} \quad W_{i,j} := 10^{-6} \cdot A_i \cdot hh_j$$

$$W = \begin{pmatrix} 0.0662 & 0.0558 & 0.0507 & 0.0429 & 0.0352 \\ 0.0807 & 0.0680 & 0.0618 & 0.0522 & 0.0428 \\ 0.1074 & 0.0905 & 0.0822 & 0.0695 & 0.0570 \end{pmatrix}$$

Результаты расчета среднегодового расхода в створах (расчетную формулу записать самостоятельно и проверить результаты по табл. 4.2):

Таблица 4.2 – Результаты расчета среднегодового расхода в створах, м³/с

A, км ²	Обеспеченность P, %				
	1	5	10	25	50
151	2,099	1,769	1,607	1,359	1,115
184	2,558	2,155	1,958	1,656	1,359
245	3,406	2,870	2,608	2,205	1,809

Выводы:

1. Параметры распределения Крицкого-Менкеля слоя годового стока:

$$\bar{h} = 240 \text{ мм}; \alpha = 11,11; b = 1,0.$$

2. При обеспеченности $P = 1 \%$ расчетный объем годового стока в замыкающем створе $W = 2,1 \text{ км}^3$.

3. При обеспеченности $P = 50 \%$ расчетный средний годовой расход в замыкающем створе $Q = 1,89 \text{ м}^3/\text{с}$.

Контрольные вопросы

1. Как связаны слой стока, объем стока и среднегодовой расход?
2. Какие первичные параметры необходимы для построения распределения Крицкого-Менкеля?
3. Как найти расчетные параметры распределения Крицкого-Менкеля?
4. Запишите формулу, связывающую функцию распределения модульного коэффициента и теоретическую обеспеченность.
5. Что значит расчетный расход обеспеченности 2 %?

Лабораторная работа № 5

Математическая модель гидравлической крупности частиц несферической формы Физическая постановка задачи (схематизация)

Гидравлической крупностью частиц называют скорость ее установившегося осаждения в неподвижной жидкости W . Для частиц песка (с плотностью материала около $\rho = 2600 \text{ кг/м}^3$), осаждающихся в воде ($\rho_f = 1000 \text{ кг/м}^3$) составлены специальные таблицы гидравлической крупности взвеси (Приложение Г). Учитывается температура, от которой зависит вязкость жидкости, а значит, сила гидродинамического сопротивления, действующая на мелкие частицы. Однако при составлении таких таблиц не учитываются важные факторы. Во-первых, это плотность материала частиц, которая может быть заметно меньшей, чем у песка, например, у примеси органического происхождения. Во-вторых, может отличаться плотность жидкости (морская вода, сточные воды и др.). В-третьих, форма частиц часто бывает различной. Для учета отличия формы частиц от сферической используют геометрический коэффициент формы: $\xi = S/S_0$, $S_0 = (36\pi \Theta^2)^{1/3}$, где S , Θ - площадь поверхности и объем частицы; S_0 - площадь поверхности сферической частицы равного объема. Так песок речной окатанный имеет геометрический коэффициент формы $\xi = 1,17$; песок зернистый (неокатанный) - $\xi = 1,5$; угольная пыль - $\xi = 1,6-2,6$. Все это приводит к необходимости в каждом конкретном случае определять гидравлическую крупность примеси с помощью опытов или использовать математическое моделирование.

Математическая модель

Влияние несферичности на величину коэффициента гидродинамического сопротивления учитывается динамическим коэффициентом формы

$$C_R = \Gamma \cdot C_R^o. \quad (5.1)$$

В общем случае динамический коэффициент формы зависит от геометрического коэффициента формы частицы и числа Рейнольдса. Можно считать установленной связь динамического только от геометрического коэффициента формы частицы ξ в линейной области сопротивления:

$$\Gamma_1(\xi) = 1 + 0,348 \cdot (\xi - 1); \quad (5.2)$$

– в квадратичной области сопротивления:

$$\Gamma_2(\xi) = 10,0 - 9,0/\xi = 10,0 - 9,0 \cdot \phi, \quad Re = W \cdot d / \nu = 10^3 \div 2 \cdot 10^5. \quad (5.3)$$

Наименее исследованной является переходная область сопротивления. Одна из часто используемых зависимостей:

$$\Gamma(\xi, Re) = \begin{cases} \Gamma_1(\xi), & \text{при } Re < 0,2; \\ \Gamma_3(\xi, Re), & \text{при } 0,2 \leq Re \leq 1000; \\ \Gamma_2(\xi), & \text{при } Re > 1000. \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\Gamma_3(\xi, Re) = \Gamma_1(\xi) + (\Gamma_2(\xi) - \Gamma_1(\xi)) \cdot \left(\frac{Re - 0,2}{999,8} \right)^{0,44}. \quad (5.5)$$

Установившаяся скорость осаждения частицы в неподвижной вязкой жидкости находится из условия равенства силы тяжести (за вычетом силы Архимеда) и силы гидродинамического сопротивления:

$$W = \sqrt{\frac{4g \cdot d \cdot (1 - \lambda)}{3\lambda \cdot C_R^o \cdot \Gamma_i}}, \quad \lambda = \frac{\rho_f}{\rho} \quad (5.6)$$

где g – ускорение свободного падения; C_R^o – коэффициент гидродинамического сопротивления сферической частицы в безграничной однородной изотермической жидкости.

В общем случае (5.6) является уравнением, которое необходимо решать численным методом, так как C_R^o зависит от Re . Одна из наиболее часто используемых зависимостей:

$$C_R^o = \begin{cases} \frac{24}{Re} (1 + 0,15 Re^{0,687}) & \text{при } Re < 1000 \\ 0,44 & \text{при } 1000 \leq Re < 2 \cdot 10^5 \end{cases}. \quad (5.7)$$

При малых Re коэффициент гидродинамического сопротивления несферической частицы вычисляется по формуле $C_R^o = 24\Gamma_1/Re$. Из (5.6) следует скорость установившегося осаждения стоксовой частицы

$$W = \frac{g(1 - \lambda)\delta^2}{18\nu\lambda \cdot \Gamma_1}. \quad (5.8)$$

По установившейся скорости осаждения вычислим число Рейнольдса

$$Re_{уст} = \frac{W_{уст} \delta}{\nu} = \frac{g(1 - \lambda)\delta^3}{18\nu^2 \lambda \cdot \Gamma_1}. \quad (5.9)$$

Только если $Re_{уст} < 1$, область гидродинамического сопротивления частицы при осаждении будет линейным.

Зависимость коэффициента кинематической вязкости воды от температуры $T^\circ C$: находится по приближенной формуле (или по таблице):

$$\nu = \nu_0 / (1 + 0,0345 \cdot T + 0,000232 \cdot T^2), \quad \nu_0 = 1,787 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}. \quad (5.10)$$

В квадратичной области сопротивления частицы считают $C_R^o = 0,44 = \text{const}$. Из (5.6) следует скорость установившегося осаждения частицы

$$W = \sqrt{\frac{g(1 - \lambda)\delta}{0,33 \lambda \cdot \Gamma_2}}. \quad (5.11)$$

По скорости установившегося осаждения (5.11) необходимо вычислить число Рейнольдса и проверить выполнение условия

$$1000 < Re_{уст} < 2 \cdot 10^5. \quad (5.12)$$

Задание

1. По данным своего варианта из табл. 5.1 в среде Mathcad построить зависимость динамического коэффициент формы частицы от числа Рейнольдса.
2. Построить в среде Mathcad зависимость от числа Рейнольдса коэффициента гидродинамического сопротивления частицы.
3. Рассчитать гидравлическую крупность частицы и число Рейнольдса при установившемся осаждении. Определить область гидродинамического сопротивления частицы.
4. Исследовать влияние параметра, указанного в последней строке табл. 5.1, на гидравлическую крупность. Построить график зависимости W и чисел Рейнольдса при установившемся осаждении Re от указанного параметра.

Таблица 5.1 – Варианты параметров

Параметр	Номер варианта											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
d , мм	0,45	0,12	0,3	0,42	0,56	0,4	0,47	0,19	0,5	0,33	0,52	0,28
ξ	1,25	1,6	1,5	1,22	1,48	1,3	1,42	1,34	1,2	1,36	1,19	1,56
$T^{\circ}\text{C}$	22	10	15	11	18	8	5	25	17	23	6	28
ρ_f , г/см ³	1,02	1,03	0,9	1,05	1,04	0,8	1,01	1,06	1,1	1,07	0,98	0,97
ρ , кг/м ³	2,63	1,95	2,6	2,55	2,15	2,0	2,16	2,24	3,1	2,29	2,33	2,4
$10^6 \nu_0$, м ² /с	1,79	1,88	2,0	1,85	2,3	1,7	1,74	1,82	1,8	1,91	1,67	2,12
Исследовать влияние	ξ	$T^{\circ}\text{C}$	ν_0	ρ_f	d	ρ	d	ν_0	ρ_f	ρ	ξ	$T^{\circ}\text{C}$

Пример выполнения лабораторной работы с методическими указаниями

Покажем порядок выполнения работы на примере варианта 0.

Дано: $d = 0,45$ мм; $\xi = 1,25$; $T = 22^{\circ}\text{C}$; $\rho_f = 1,02$ г/см³; $\rho = 2,63$ г/см³; $\nu_0 = 1,79 \cdot 10^{-6}$ м²/с. Исследовать зависимость гидравлической крупности и чисел Рейнольдса частицы при осаждении от геометрического коэффициента формы.

Программа расчета

$$\begin{aligned}
 &ORIGIN := 1 \quad g := 9.8 \\
 &d := 0.00045 \quad \xi_0 := 1.25 \quad T := 22 \quad \rho_f := 1020 \quad \rho := 2630 \quad \nu_0 := 1.79 \cdot 10^{-6} \\
 &\lambda := \rho_f / \rho
 \end{aligned}$$

1. Зависимость динамического коэффициента формы частицы от геометрического коэффициента и числа Рейнольдса

$$\Gamma 1(\xi) := 1 + 0,348 \cdot (\xi - 1) \quad \Gamma 2(\xi) := 10 - \frac{9}{\xi}$$

$$\Gamma_3(\xi, Re) := \Gamma_1(\xi) + (\Gamma_2(\xi) - \Gamma_1(\xi)) \cdot \left(\frac{Re - 0,2}{999,8} \right)^{0,44}$$

$$\Gamma(\xi, Re) := \begin{cases} \Gamma_1(\xi) & \text{if } Re < 0.2 \\ \Gamma_2(\xi) & \text{if } Re > 1000 \\ \Gamma_3(\xi, Re) & \text{otherwise} \end{cases}$$

Строим график в полулогарифмическом масштабе на рис. 5.1
 $Re := 0.1..10000$

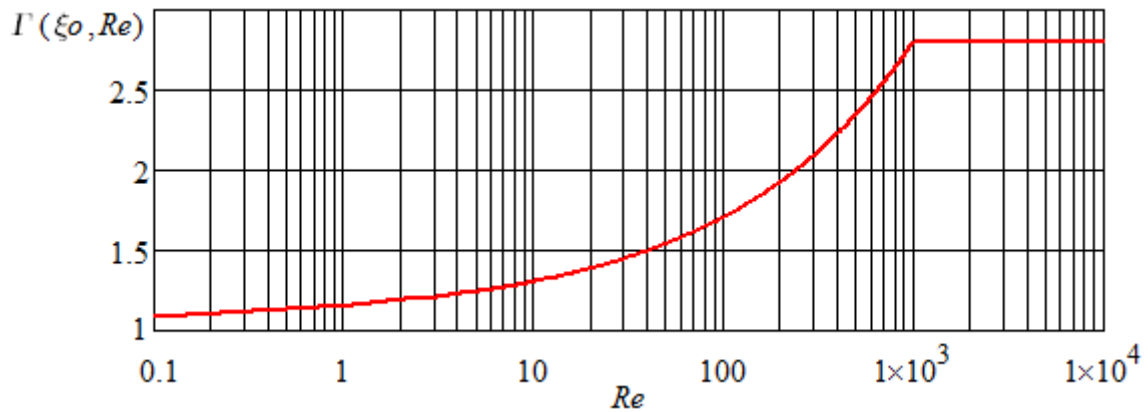


Рис. 5.1. Динамический коэффициент формы частицы

2. Вычисляем коэффициент гидродинамического сопротивления сферической (C_x) и несферической (CG) частицы в вязкой среде (рис. 5.2)

$$C_x(Re) := \begin{cases} \frac{24}{Re} \cdot (1 + 0.15 \cdot Re^{0.687}) & \text{if } Re < 1000 \\ 0.44 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$CG(\xi, Re) := C_x(Re) \cdot \Gamma(\xi, Re)$$

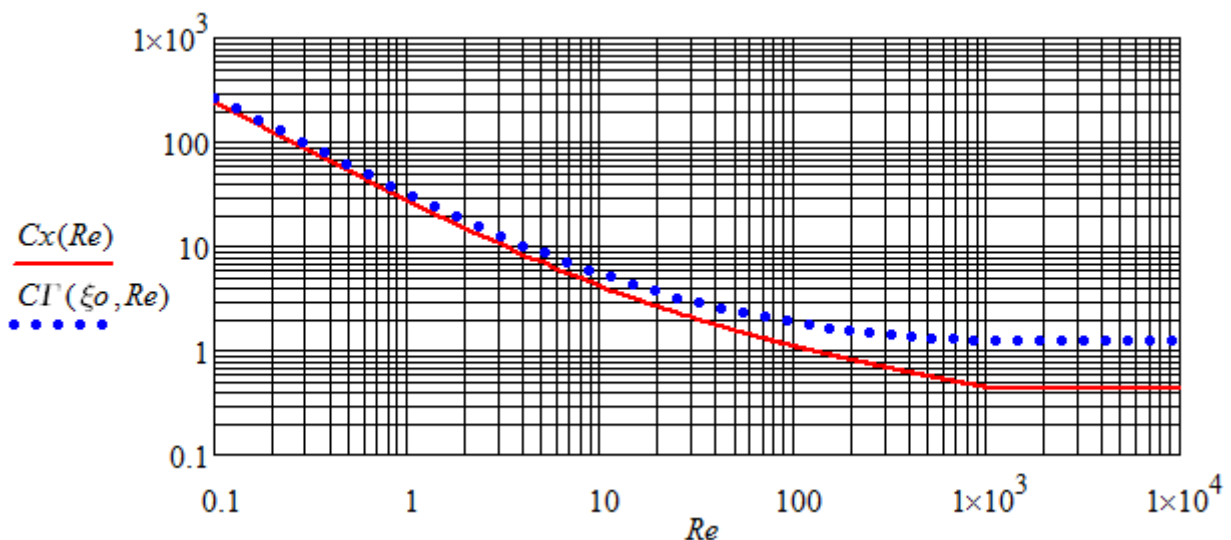


Рис. 5.2. Коэффициент гидродинамического сопротивления сферической (C_x) и несферической (CG) частицы в вязкой среде

3. Значение коэффициента кинематической вязкости жидкости:

$$\nu(T) := \frac{\nu_0}{1 + 0.0345 \cdot T + 0.000232 \cdot T^2} \quad \nu_1 := \nu(T)$$

Для нахождения скорости установившегося осаждения частицы (м/с) в неподвижной жидкости зададим функцию по формуле (5.6):

$$fW(\xi, w) := \sqrt{\frac{4 \cdot g \cdot d \cdot (1 - \lambda)}{3 \cdot \lambda \cdot CT\left(\xi, \frac{w \cdot d}{\nu_1}\right)}}$$

Далее решаем численным методом уравнение

$$w := 0.1 \quad Wo := \text{root}(fW(\xi_0, w) - w, w) \quad Wo = 0.054$$

Число Рейнольдса больше единицы, но меньше тысячи. Область гидродинамического сопротивления частицы – переходная.

$$ReW := \frac{Wo \cdot d}{\nu_1} \quad ReW = 25.246$$

4. Для исследования влияния геометрического коэффициента формы задаем диапазон изменения:

$$i = 1..51 \quad \xi_i := 1 + 0.02 \cdot (i - 1)$$

$$W_i := \text{root}(fW(\xi_i, w) - w, w) \quad Re_i := \frac{W_i \cdot d}{\nu_1}$$

Результаты расчета показываем на рис. 5.3

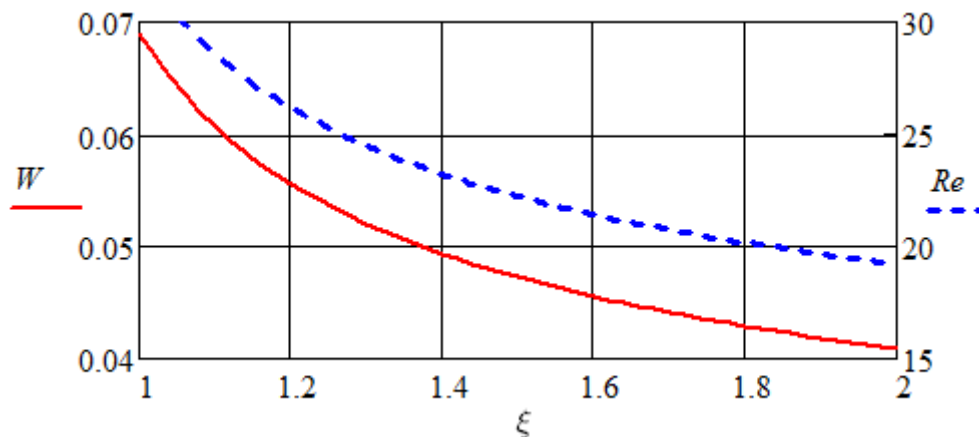


Рис. 5.3. Зависимость гидравлической крупности и числа Рейнольдса частицы от геометрического коэффициента формы

Выводы:

1. Динамический коэффициент формы частицы в квадратичной области более чем в 2,5 раза больше, чем сферической частицы того же объема.

2. Коэффициент гидродинамического сопротивления в этой области превышает единицу.

3. При заданных параметрах гидравлическая крупность $Wo = 0,054$ м/с. Область гидродинамического сопротивления частицы – переходная.

4. Увеличение геометрического коэффициента формы приводит к уменьшению гидравлической крупности и чисел Рейнольдса при осаждении.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение гидравлической крупности частицы.
2. От чего зависит гидравлическая крупность частицы?
3. Почему для расчета гидравлической крупности в общем случае используют численные методы?
4. Что такое геометрический коэффициент формы частицы?
5. Что такое динамический коэффициент формы частицы?
6. При каких числах Рейнольдса динамический коэффициент формы заданной частицы от них не зависит?

Лабораторная работа № 6.

Расчет распределения мутности в водотоке по одному измерению
вблизи поверхности

Физическая постановка задачи (схематизация)

Мутностью воды называют массу наносов, содержащихся в единице объема воды $[\rho_M] = \text{кг/м}^3$ или г/л. Мутность является одним из важных показателей качества воды. Вертикальное распределение мутности зависит от действия силы тяжести на взвешенные частицы и влияния на них турбулентных пульсаций скорости воды (гидродинамическое сопротивление). Рассматриваем прямолинейный канал с постоянной глубиной H и средней скоростью движения воды U_{cp} . В таком течении не будет крупных инерционных частиц во взвешенном состоянии: они все выпали на дно. Оставшиеся мелкие малоинерционные частицы образуют фоновую мутность. Они находятся в динамическом равновесии, сколько их оседает на дне, столько же и поднимается со дна. Средняя локальная мутность водотока не изменяется.

Будем полагать, что примесь можно считать пассивной, профили скоростей несущей среды (воды) известны. Недалеко от поверхности водотока, на глубине h^* измерена мутность ρ_{M^*} . Твердая примесь состоит из пяти фракций с размерами $d = (0,01; 0,02; 0,03; 0,05; 0,07)$ мм и массовыми долями km_i ($i = 1, 2, \dots, 5$). Распределение каждой фракции примеси можно рассматривать независимо от остальных. Вертикальную координату Z отсчитываем от дна.

Математическая модель

Изменение содержания взвешенных частиц по глубине потока соответствует уравнению турбулентной диффузии. В установившемся течении без осаждения вертикальное распределение наносов описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial Z} \left(D_z \frac{\partial C_i}{\partial Z} \right) + W_i \frac{\partial C_i}{\partial Z} = 0, \quad (6.1)$$

где C_i – концентрация i -й фракции; W_i – собственная скорость оседания i -й фракции (гидравлическая крупность частиц); D_z – коэффициент вертикальной турбулентной диффузии.

При степенной модели профиля продольной скорости водотока

$$U = U_{max} \left(\frac{Z}{H} \right)^{nu} = U_{max} \cdot z^{nu}, \quad \frac{U_{max}}{U_{cp}} = nu + 1, \quad nu = \frac{\sqrt{g}}{0,4Cs}, \quad (6.2)$$

где nu – показатель степени в профиле скорости на вертикали; Cs – коэффициент Шези ($m^{0,5}/c$), определяемый по формуле Н.Н. Павловского ($H \leq 5$ м):

$$C = R^{ys} / n, \quad ys = 2,5 \cdot \sqrt{n} - 0,13 - 0,75 \cdot \sqrt{R} \cdot (\sqrt{n} - 0,1), \quad (6.3)$$

где R – гидравлический радиус потока, м (для широких водотоков $R \approx H$).

n – коэффициент шероховатости ложа реки, определяемый по справочным данным (по таблице М.Ф. Срибного, Приложение Б)

Коэффициент вертикальной турбулентной диффузии, изменяющийся по глубине, рассчитывается по формуле:

$$D_z = \frac{g \cdot H \cdot U_{cp} \cdot (1 - z)}{(1 + nu) \cdot Cs^2 \cdot nu \cdot z^{nu-1}} \quad (6.4)$$

(6.4) подставляют в (6.1) и интегрируют, что позволяет получить формулу для профиля безразмерной концентрации дисперсной примеси:

$$c_i(z) = \frac{C_i(z)}{C_i(0)} = \exp \left(- \frac{(nu + 1) \cdot W_i}{0,16 \cdot nu \cdot U_{cp}} \cdot \int_0^z \frac{d\eta}{\eta^{1-nu}(1-\eta)} \right). \quad (6.5)$$

где $C_i(0)$ – концентрация примеси у дна.

Мутность на глубине h^* от присутствия частиц только i -й фракции равна концентрации этой фракции:

$$\rho_{M^*} \cdot km_i = C_i(1 - h^* / H). \quad (6.6)$$

Тогда с использованием (6.5) найдем концентрацию i -й фракции у дна

$$C_i(0) = C_i(1 - h^* / H) / c_i(1 - h^* / H) = \rho_{M^*} \cdot km_i / c_i(1 - h^* / H). \quad (6.7)$$

Профиль мутности на вертикали получим, умножив выражение для безразмерной концентрации (6.5) на значении размерной концентрации у дна и просуммировав по всем фракциям фракциям:

$$C_i(z) = C_i(0) \cdot c_i(z), \quad \rho_M(z) = \sum_{i=1}^5 C_i(z). \quad (6.8)$$

Задание

1. По данным своего варианта из табл. 6.1 в среде Mathcad задать зависимость коэффициента гидродинамического сопротивления частицы от геометрического коэффициента формы и числа Рейнольдса.

2. Рассчитать гидравлическую крупность частицы и числа Рейнольдса всех фракций примеси.

3. Построить безразмерные профили концентрации фракций примеси на вертикали.

4. Построить график мутности на вертикали. Найти значение мутности у дна и среднюю мутность на вертикали.

Таблица 6.1 – Варианты параметров

Параметр	Номер варианта											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$T^{\circ}\text{C}$	22	10	15	11	18	8	5	25	17	23	6	28
$10^6\nu_0, \text{ м}^2/\text{с}$	1,79	1,88	2,0	1,85	2,3	1,7	1,74	1,82	1,8	1,91	1,67	2,12
$\rho, \text{ г}/\text{см}^3$	2,63	1,95	2,6	2,55	2,15	2,0	2,16	2,24	3,1	2,29	2,33	2,4
$\rho_f, \text{ г}/\text{см}^3$	1,02	1,03	0,9	1,05	1,04	0,8	1,01	1,06	1,1	1,07	0,98	0,97
ξ	1,25	1,6	1,5	1,22	1,48	1,3	1,42	1,34	1,2	1,36	1,19	1,56
$U_{\text{ср}}, \text{ см}/\text{с}$	20	12	30	42	56	40	47	19	50	33	52	28
$H, \text{ см}$	120	140	95	110	150	92	125	130	88	145	160	170
$h^*, \text{ см}$	20	14	10	16	24	12	19	22	11	26	28	30
$\rho_{M^*}, \text{ г}/\text{л}$	6,2	5,4	7,3	6,9	5,8	7,1	6,0	7,4	8,2	4,9	5,5	7,0
km_1	0,35	0,34	0,3	0,32	0,38	0,4	0,36	0,35	0,4	0,32	0,41	0,33
km_2	0,3	0,28	0,3	0,27	0,25	0,2	0,24	0,27	0,1	0,27	0,29	0,26
km_3	0,2	0,22	0,2	0,23	0,18	0,2	0,2	0,23	0,2	0,18	0,19	0,17
km_4	0,1	0,12	0,1	0,13	0,12	0,1	0,14	0,11	0,1	0,09	0,08	0,1
Номер n	4	3	2	1	2	3	4	5	6	1	2	7

Пояснение:

Номер n соответствует номеру строки в табл. Б.1 (Приложение Б).

Пример выполнения лабораторной работы с методическими указаниями

Покажем порядок выполнения работы на примере варианта 0.

Дано: $d = (0,01; 0,02; 0,03; 0,05; 0,07)$ мм; $\xi = 1,25$; $T = 22^{\circ}\text{C}$; $\rho_f = 1,02$ г/см³; $\rho = 2,63$ г/см³; $\nu_0 = 1,79 \cdot 10^{-6}$ м²/с; $km = (0,35; 0,3; 0,2; 0,1; 0,05)$; $\rho_{M^*} = 6,2$ г/л; $H = 120$ см; $h^* = 20$ см; $U_{\text{ср}} = 20$ см/с. Номер строки n равен 4.

Справочные данные: По табл. Б.1 (Приложение Б) находим значение безразмерного коэффициента шероховатости в строке номер 4: $n = 0,04$.

Программа расчета

$ORIGIN := 1$

$g := 9.8$ $i := 1..5$ $n := 0.04$ $\rho_{Mz} := 6.2$ $Us := 0.2$ $H := 1.2$ $h := 0.12$

$\xi := 1.25$ $T = 22$ $\rho_f := 1020$ $\rho := 2630$ $\nu_0 := 1.79 \cdot 10^{-6}$

$$d := \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.02 \\ 0.03 \\ 0.05 \\ 0.07 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3} \quad km := \begin{pmatrix} 0.35 \\ 0.3 \\ 0.2 \\ 0.1 \\ 0.05 \end{pmatrix}$$

Целесообразно использовать части программ из ранее выполненных работ.

1. Рассчитываем коэффициент Шези, как в лабораторной работе № 3:

$$y_s := 2.5 \cdot \sqrt{n} - 0.13 - 0.75 \cdot \sqrt{H} \cdot (\sqrt{n} - 0.1) \quad C_s := \frac{H^{y_s}}{n} \quad C_s = 26.48$$

Значение коэффициента кинематической вязкости жидкости рассчитываем, как в лабораторной работе № 5:

$$\nu(T) := \frac{\nu_0}{1 + 0.0345 \cdot T + 0.000232 \cdot T^2} \quad \nu_1 := \nu(T)$$

Задаем зависимость коэффициента гидродинамического сопротивления несферической частицы от геометрического коэффициента формы и числа Рейнольдса, как в № 5:

$$\begin{aligned} \Gamma_1(\xi) &:= 1 + 0,348 \cdot (\xi - 1) & \Gamma_2(\xi) &:= 10 - \frac{9}{\xi} \\ \Gamma_3(\xi, Re) &:= \Gamma_1(\xi) + (\Gamma_2(\xi) - \Gamma_1(\xi)) \cdot \left(\frac{Re - 0,2}{999.8} \right)^{0,44} \\ \Gamma(\xi, Re) &:= \begin{cases} \Gamma_1(\xi) & \text{if } Re < 0.2 \\ \Gamma_2(\xi) & \text{if } Re > 1000 \\ \Gamma_3(\xi, Re) & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

$$C_x(Re) := \begin{cases} \frac{24}{Re} \cdot (1 + 0.15 \cdot Re^{0.687}) & \text{if } Re < 1000 \\ 0.44 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$C\Gamma(\xi, Re) := C_x(Re) \cdot \Gamma(\xi, Re)$$

2. Для нахождения скорости установившегося осаждения частицы (м/с) в неподвижной жидкости используем функцию из работы № 5:

$$fW(d, w) := \sqrt{\frac{4 \cdot g \cdot d \cdot (1 - \lambda)}{3 \cdot \lambda \cdot C\Gamma\left(\xi, \frac{w \cdot d}{\nu_1}\right)}}$$

Далее численным методом определяем гидравлическую крупность каждой фракции и их числа Рейнольдса

$$w := 0.1 \quad W_i := \text{root}(fW(d_i, w) - w, w) \quad Re_i := \frac{W_i \cdot d_i}{\nu_1}$$

$$W = \begin{pmatrix} 8.359 \cdot 10^{-5} \\ 3.306 \cdot 10^{-4} \\ 7.439 \cdot 10^{-4} \\ 2.066 \cdot 10^{-3} \\ 3.727 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} \quad Re = \begin{pmatrix} 8.739 \cdot 10^{-4} \\ 6.913 \cdot 10^{-3} \\ 0.023 \\ 0.108 \\ 0.273 \end{pmatrix}$$

3. Показатели степени профиля продольной скорости воды и профилей концентрации фракций

$$nu := \frac{\sqrt{g}}{0.4 \cdot C_s} \quad nu = 0.296 \quad a_i := \frac{(1+nu) \cdot W_i}{0.16 \cdot nu \cdot U_s} \quad hz := \frac{h}{H} \quad hz = 0.167$$

Формулы для безразмерных профилей концентрации фракций примеси, по которым построены графики на рис. 6.1:

$$c1(z) := \exp \left[-a_1 \cdot \int_0^z \frac{1}{t^{1-nu} \cdot (1-t)} dt \right] \quad c2(z) := \exp \left[-a_2 \cdot \int_0^z \frac{1}{t^{1-nu} \cdot (1-t)} dt \right]$$

$$c3(z) := \exp \left[-a_3 \cdot \int_0^z \frac{1}{t^{1-nu} \cdot (1-t)} dt \right] \quad c4(z) := \exp \left[-a_4 \cdot \int_0^z \frac{1}{t^{1-nu} \cdot (1-t)} dt \right]$$

$$c5(z) := \exp \left[-a_5 \cdot \int_0^z \frac{1}{t^{1-nu} \cdot (1-t)} dt \right] \quad z := 0.001, 0.002 \dots 1$$

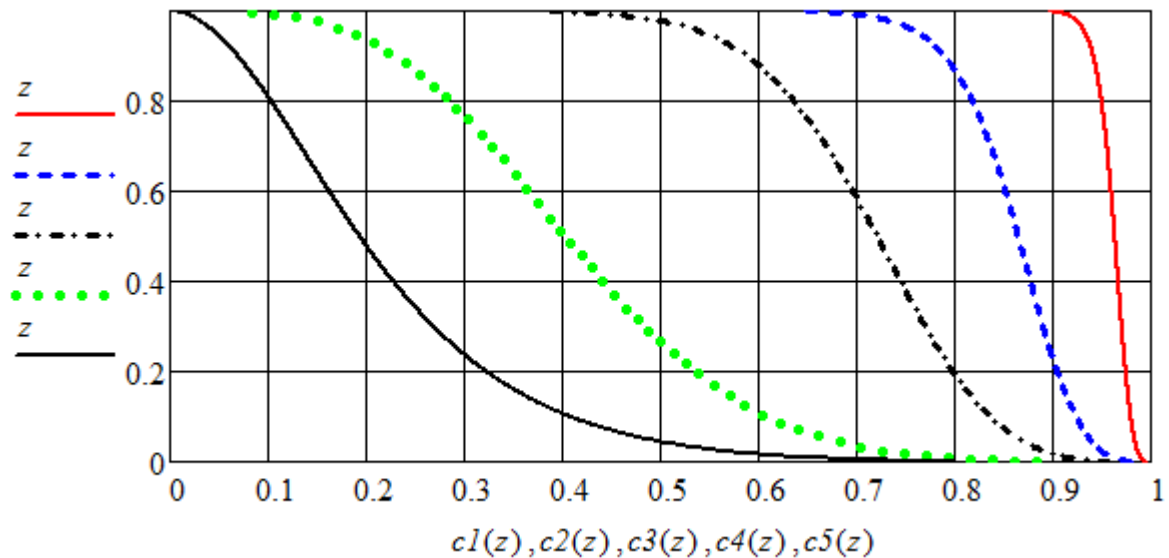


Рис. 6.1. Безразмерные профили концентрации фракций примеси

4. Значения размерной концентрации фракций у дна по формулам (6.7):

$$C_{w1} := \frac{\rho M z \cdot km_1}{c1(1-hz)} \quad C_{w2} := \frac{\rho M z \cdot km_2}{c2(1-hz)} \quad C_{w3} := \frac{\rho M z \cdot km_3}{c3(1-hz)} \quad C_{w4} := \frac{\rho M z \cdot km_4}{c4(1-hz)}$$

$$C_{w5} := \frac{\rho M z \cdot km_5}{c5(1-hz)} \quad C_w^T = (2.289 \quad 2.296 \quad 1.991 \quad 2.309 \quad 3.321)$$

Профили размерных концентраций фракций

$$C1(z) := C_{w1} \cdot c1(z) \quad C2(z) := C_{w2} \cdot c2(z) \quad C3(z) := C_{w3} \cdot c3(z)$$

$$C4(z) := C_{w4} \cdot c4(z) \quad C5(z) := C_{w5} \cdot c5(z)$$

Профиль мутности на вертикали (рис. 6.2):

$$\rho M(z) := C1(z) + C2(z) + C3(z) + C4(z) + C5(z)$$

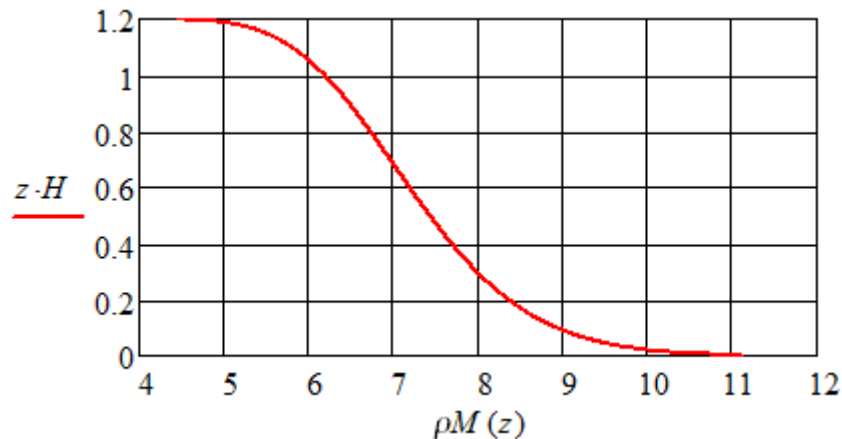


Рис. 6.2. Профиль мутности (г/л) на размерной вертикали (м)

Значение мутности у дна (г/л) $\rho M(0) = 12.204$

Средняя мутность на вертикали (г/л) $\int_0^1 \rho M(z) dz = 7.284$

Выводы:

1. Гидравлическая крупность фракции самого большого размера 3,7 мм/с; у остальных еще меньше. Гидродинамическая область сопротивления – линейная ($Re < 1$).

2. Чем больше размер частиц, тем больше неравномерность профиля концентрации фракции на вертикали.

3. Значение мутности у дна – 12,2 г/л; средняя мутность на вертикали – 7,3 г/л.

Контрольные вопросы

1. Почему можно изучать процессы вертикальной диффузии дисперсных примесей, не принимая во внимание диффузию в двух других направлениях?
2. В каких единицах измеряется мутность воды?
3. Каким образом инерционность частиц влияет на профиль мутности?
4. От чего зависит коэффициент Шези?
5. Как найти среднее значение мутности на вертикали?

Лабораторная работа № 7

Моделирование динамики взаимодействия популяций «хищник-жертва»

Физическая постановка задачи (схематизация)

Проследим, как изменится численность популяции хищника Y и жертвы X , если поместить их в ограниченный объем с достаточным количеством пищи для жертвы. Например, два вида простейших микроорганизмов (хищники и жертвы) помещены в лабораторную колбу с добавлением достаточного количества пищи для жертв или два вида рыб обитают в озере. Полагаем справедливыми следующие допущения:

1) в отсутствие хищника популяция жертвы размножается до предельной величины X_m , обусловленной ограниченностью ресурсов в заданном ареале обитания;

2) популяция хищника в отсутствие жертвы экспоненциально вымирает;

3) суммарное количество жертвы, потребляемое популяцией хищника в единицу времени, линейно зависит и от плотности популяции жертвы, и от плотности популяции хищника (произведение XY характеризует частоту встречи жертвы и хищника в их ограниченном ареале совместного обитания);

4) потребленная хищником биомасса жертвы с постоянным коэффициентом перерабатывается в биомассу хищника.

Математическая модель

Для моделирования воспользуемся модифицированной системой уравнений Лотка-Вольтерра с учетом ограниченности роста популяции жертв:

$$\frac{dX}{dt} = r \cdot X \cdot \left(1 - \frac{X}{X_m}\right) - c \cdot XY, \quad \frac{dY}{dt} = g \cdot XY - f \cdot Y, \quad (7.1)$$

$$X(0) = X_0, \quad Y(0) = Y_0, \quad (7.2)$$

где r – скорость естественного увеличения популяции жертв (без учета влияния хищников); c – коэффициент успеха охоты; g – коэффициент рождаемости для хищников (скорость увеличения их численности пропорциональна XY); f – коэффициент естественной смертности хищников. Отношение $k = g/c$ представляет собой коэффициент переработки потребленной хищником биомассы жертвы в собственную биомассу

Задача Коши включает дифференциальные уравнения (7.1) и начальные условия к ним (7.2); может быть решена численным методом.

Рассчитаем равновесные значения численности популяций. Для этого в уравнениях (7.1) положим, что производные равны нулю. Получим систему алгебраических уравнений

$$rX \left(1 - \frac{X}{X_m}\right) - cXY = 0, \quad gXY - fY = 0. \quad (7.3)$$

Система (7.3), кроме тривиального ($X(t)=Y(t)=0$), имеет следующее аналитическое решение:

$$X_* = \frac{f}{g}; \quad Y_* = \frac{r}{c} \left(1 - \frac{f}{g \cdot Xm} \right). \quad (7.4)$$

Фазовым портретом системы называют графическую зависимость численности хищником от численности жертв $Y(X)$. С помощью фазового портрета можно изучать основные закономерности динамики системы взаимодействующих популяций.

Задание

1. Найти равновесные значения численности популяций для данных своего варианта; вычислить коэффициент переработки.
2. Решить задачу Коши (7.1)-(7.2) численным методом в среде Mathcad помощью операторов *Given-Odesolve*, построить и проанализировать графики зависимостей $X(t)$, $Y(t)$.
3. Исследовать влияние одного из размерных параметров, указанного в последней строке данных, на численное решение задачи, включая частные случаи.
4. Построить фазовый портрет системы; определить состояния равновесия системы.

Таблица 7.1 – Варианты параметров

Величина	Номер варианта											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$10^4 Xm$	1,0	1,3	1,6	1,8	1,5	1,1	1,7	1,2	1,9	2,3	2,0	2,4
$10^3 X_0$	3,0	3,8	4,0	4,4	3,7	3,2	3,9	4,2	2,9	3,5	3,3	4,1
$10^2 Y_0$	4,2	4,5	4,7	4,9	4,1	3,9	4,4	4,8	5,0	4,6	4,0	3,8
$r, \text{ час}^{-1}$	0,8	0,7	0,5	0,4	0,85	0,3	0,9	0,7	0,6	0,5	0,4	0,8
$10^3 c, \text{ час}^{-1}$	0,8	0,9	1,2	0,5	0,85	0,6	1,3	1,4	0,6	0,8	1,3	1,1
$10^3 g, \text{ час}^{-1}$	0,4	0,6	0,7	0,3	0,5	0,3	0,9	0,8	0,4	0,3	0,6	0,7
$f, \text{ час}^{-1}$	1,6	1,4	1,5	1,7	1,9	1,8	2,0	1,2	2,2	1,6	2,1	1,0
Исследовать	Y_0	c	g	f	Xm	X_0	r	c	g	f	Xm	Y_0

Пример выполнения лабораторной работы с методическими указаниями (вариант 0)

Дано: $Xm = 10^4$; $X_0 = 3000$; $Y_0 = 420$; $r = 0,8 \text{ час}^{-1}$; $c = 0,0008 \text{ час}^{-1}$; $g = 0,0004 \text{ час}^{-1}$; $f = 1,6 \text{ час}^{-1}$. Исследовать влияние Y_0 на численность популяций.

Программа расчета

$Xm := 10^4$ $X_0 := 3000$ $Y_0 := 420$ $r := 0.8$ $c := 0.0008$ $g := 0.0004$ $f := 1.6$

1. Рассчитаем равновесные значения численности популяций, коэффициент переработки

$$X_z := \frac{f}{g} = 4000 \quad Y_z := \frac{r}{c} \cdot \left(1 - \frac{X_z}{X_m}\right) = 600 \quad k := \frac{g}{c} = 0.5$$

2. Решим систему (7.1) численным методом. Заметим, между операторами *Given* и *Odesolve* все знаки равенства – логические (Boolean Toolbar)

$$\begin{aligned} & \text{Given} \\ & \frac{d}{dt} X(t) = r \cdot X(t) \cdot \left(1 - \frac{X(t)}{X_m}\right) - c \cdot X(t) \cdot Y(t) \\ & \frac{d}{dt} Y(t) = g \cdot X(t) \cdot Y(t) - f \cdot Y(t) \quad X(0) = X_0 \quad Y(0) = Y_0 \\ & \begin{pmatrix} X1 \\ Y1 \end{pmatrix} := \text{Odesolve} \left[\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, t, 40 \right] \quad t := 0, 0.1..40 \end{aligned}$$

Построим графики изменения численности популяций по времени (рис. 7.1). Так как численности популяций отличаются на порядок, для численности хищников используем дополнительную (правую) шкалу ординат. Видно, что изменение численности популяций носит характер затухающих колебаний, со сдвигом по времени.

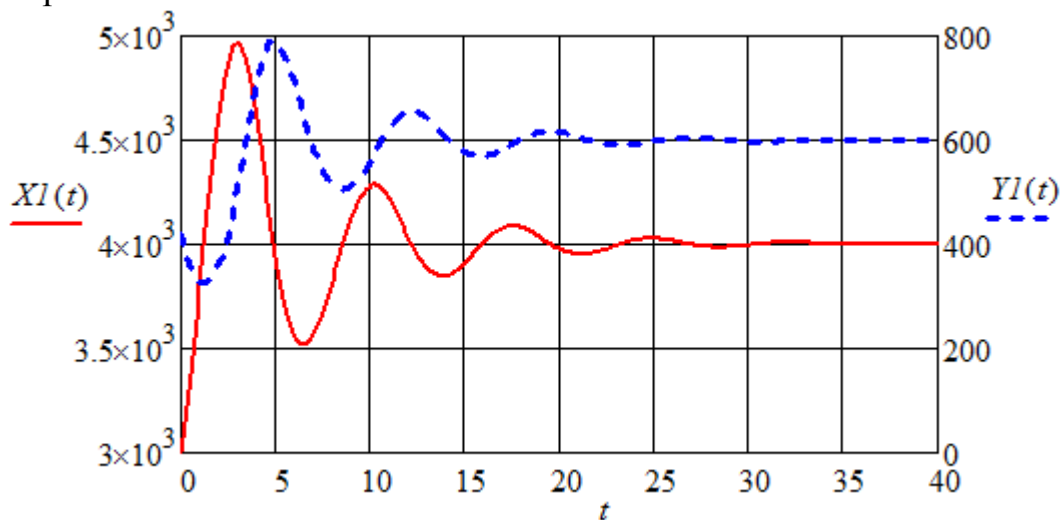


Рис. 7.1. Изменение по времени численности популяций

3. Исследуем влияние Y_0 на численное решение задачи. Дважды копируем составленную программу и размещаем все три копии последовательно; во 2-й и 3-й изменяем Y_0 ($Y_0 := 600$ и $Y_0 := 1000$). Во второй и третьей копии в переменных $X1, Y1$ меняем цифру 1 на 2 и 3, соответственно.

На рис. 7.2 показано влияние начальной численности хищников на изменение численности жертв по времени; на рис. 7.3 – на изменение численности хищников. На рис. 7.1-7.3 наблюдаются популяционные волны. При заданных параметрах с течением времени размах популяционных волн уменьшается, численность популяций стремится к равновесным значениям (не набирать):

$$t \rightarrow \infty, \quad X(t) \rightarrow X_z, \quad Y(t) \rightarrow Y_z.$$

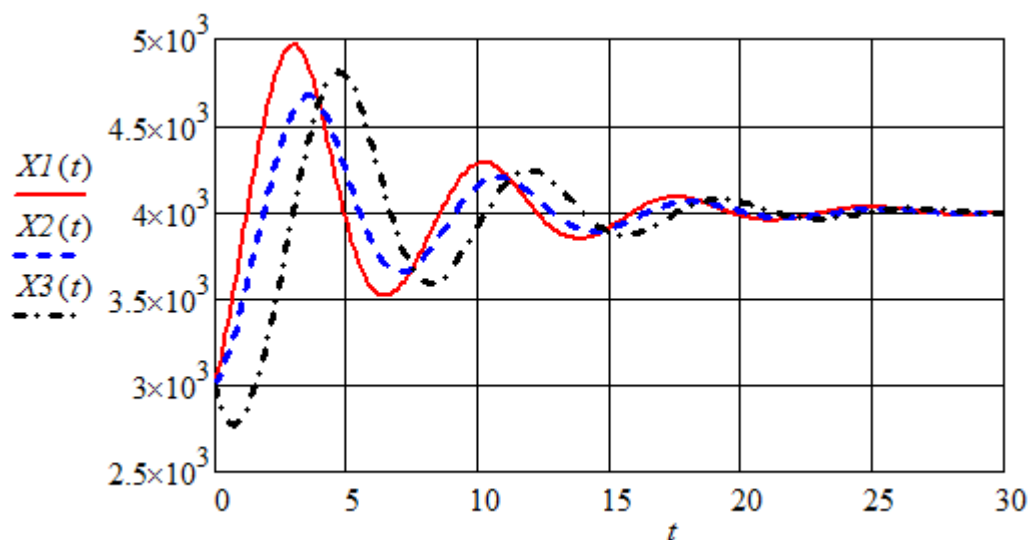


Рис. 7.2. Влияние начальной численности хищников на изменение численности жертв по времени: 1 – $Y_0 = 420$; 2 – 600; 3 – 1000

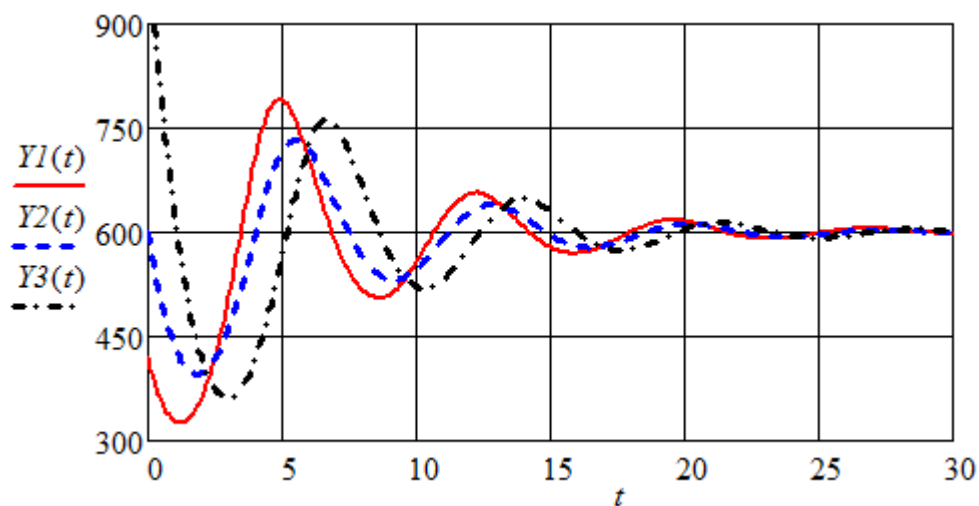


Рис. 7.3. Влияние начальной численности хищников на изменение их численности по времени. Обозначения, как на рис. 7.2

Увеличение начального количества хищников Y_0 не влияет на равновесные (установившиеся) значения (см. рис. 7.2-7.3), но изменяет размах колебаний популяционных волн; вначале происходит их увеличение, а при дальнейшем росте Y_0 – понижение. При этом процесс установления численности популяций замедляется по времени.

Исследуем частные случаи. Если хищники отсутствуют (задаем $Y_0 = 0$), то количество жертв экспоненциально возрастает до X_m (см. рис. 10.4). Если задать начальное количество хищников много больше, чем количество жертв, то через некоторое время популяция жертв будет уничтожена, а следом погибнут хищники из-за отсутствия пищи (см. рис. 7.5).

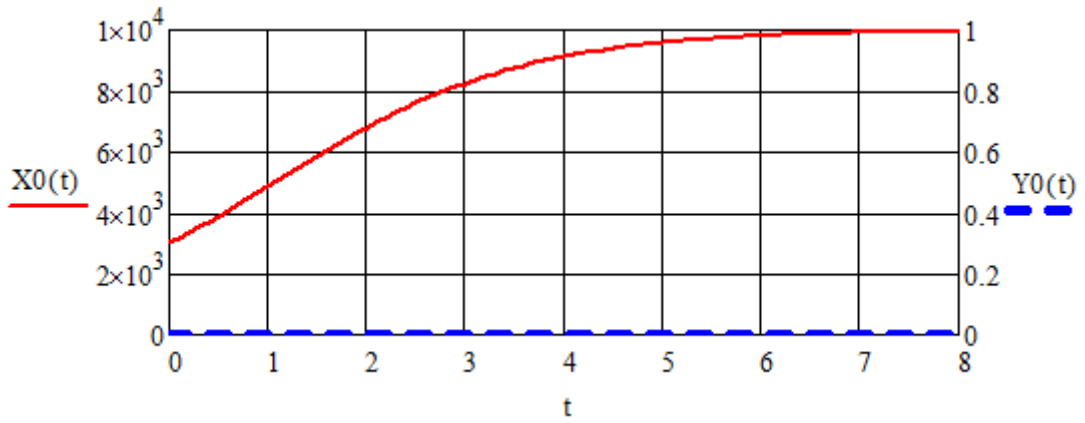


Рис. 7.4. Изменение по времени численности популяции жертв при отсутствии хищников

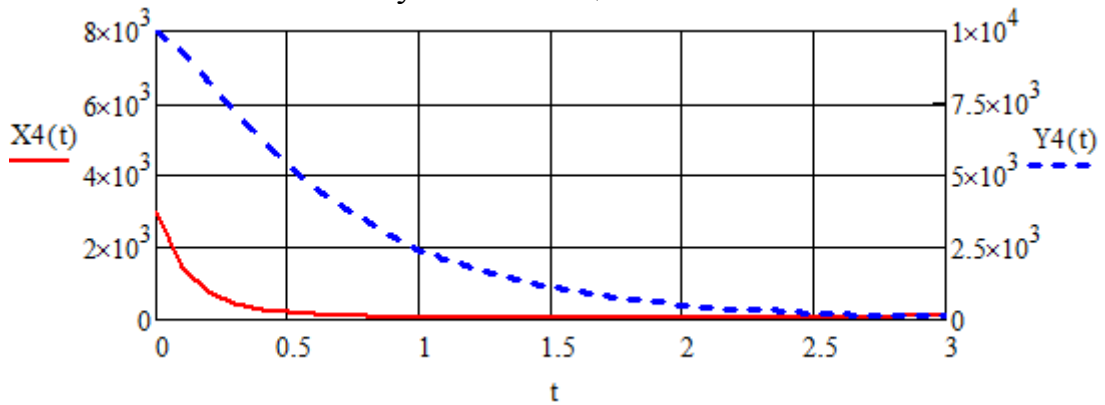


Рис. 17.5. Изменение по времени численности популяций, когда начальное количество хищников превосходит численность жертв

4. Построим фазовый портрет системы (рис. 7.6). Все фазовые траектории стремятся к точке равновесной численности популяций

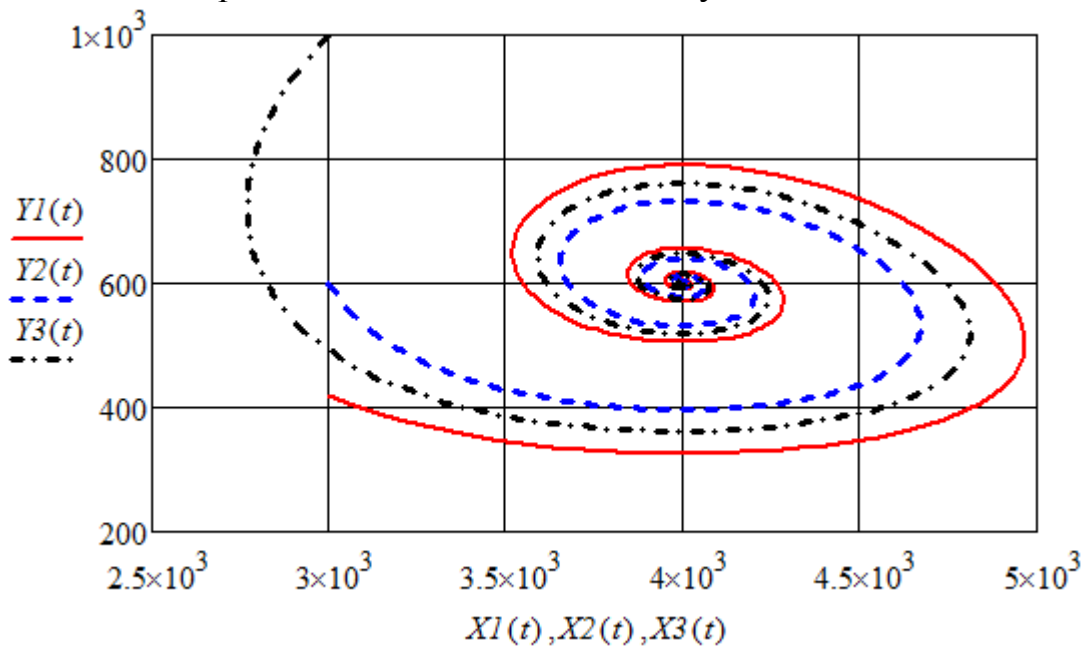


Рис. 7.6. Фазовый портрет системы

Выводы:

1. Равновесные значения численности популяций $X_z = 3000$, $Y_z = 400$.
2. При заданных параметрах наблюдаются популяционные волны; с течением времени размах популяционных волн уменьшается, численность популяций стремится к равновесным значениям.
3. Увеличение начального количества хищников Y_0 до 1000 не влияет на равновесные (установившиеся) значения, но изменяет размах колебаний популяционных волн. При этом процесс установления численности популяций замедляется по времени.
4. Если хищники отсутствуют ($Y_0 = 0$), то количество жертв возрастает до предельного значения ($X_m = 10000$) примерно за 7 часов.
5. Если, не изменяя начальной численности популяции жертв ($X_0=3000$), увеличить начальную численность хищников до $Y_0=8000$, то популяция жертв будет уничтожена через 1 час; популяция хищников погибнет от голода примерно через 2,5 часа.

Контрольные вопросы

1. Приведите примеры объектов, динамика которых может быть описана моделью «хищник-жертва».
2. Запишите систему уравнений Лотка-Вольтерра.
3. Как оценить частоту встречи жертвы и хищника в их ограниченном ареале совместного обитания? Влияние этой частоты на численность популяций.
4. Как рассчитать равновесные значения численности популяций? Всегда ли они достигаются?
5. Что произойдет с популяцией жертв при отсутствии хищников?
6. Что такое фазовый портрет системы?

Лабораторная работа № 8

Моделирование распространения и осаждения тяжелой примеси в водоеме при стационарном точечном источнике

Физическая постановка задачи (схематизация)

Длительно действующий точечный источник загрязняющего вещества находится в точке у самого берега неглубокого озера (глубиной H). Интенсивность источника G_0 , кг/с. Примесь представляет собой частицы с гидравлической крупностью W , плотностью $\rho > \rho_f$. Фоновая концентрация взвеси в водоеме мала. Распада примеси не происходит, но происходит ее постепенное осаждение на дне водоема. Концентрацию загрязняющего вещества C можно считать постоянной по глубине; изменения происходят в горизонтальной плоскости (X, Y) : $C=f(X, Y)$. В области сброса сточных вод отсутствует однонаправленное постоянное течение. Имеются меняющиеся во времени и по направлению слабые течения, средняя скорость которых V . C_0 – концентрация взвеси (г/л), измеренная на расстоянии R_0 от источника.

Математическая модель

Дифференциальное уравнение стационарной диффузии пассивной примеси в горизонтальной плоскости с учетом симметрии имеет вид:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \cdot D_{\Gamma} \frac{dC}{dR} \right) - \frac{\Phi}{H} = 0, \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad (8.1)$$

где R – радиальная координата; $C(R)$ – концентрация взвеси; D_{Γ} – коэффициент турбулентной диффузии в горизонтальной плоскости; Φ – расход осаждения примеси, кг/(м²с).

Коэффициент турбулентной диффузии:

$$D_{\Gamma} = g \cdot H \cdot V / (Cs \cdot M), \quad (8.2)$$

где g – ускорение свободного падения; Cs – коэффициент Шези, определяемый по формуле (2.2) при $R=H$; M – величина, зависящая от коэффициента Шези:

$$M = \begin{cases} 0,7 \cdot Cs + 6 & \text{при } Cs < 60; \\ 48 & \text{при } Cs \geq 60. \end{cases} \quad (8.3)$$

Расход осаждения примеси приближенно оценивают:

$$\Phi = k \cdot W \cdot C(R), \quad (8.4)$$

где k – поправочный коэффициент.

При $\Phi = 0$ (нет осаждения частиц) с учетом $D_{\Gamma} = 0$ уравнение (8.1) упростится и может быть проинтегрировано:

$$D_{\Gamma} \frac{d}{dR} \left(R \cdot \frac{dC}{dR} \right) = 0 \Rightarrow R \cdot D_{\Gamma} \frac{dC}{dR} = const. \quad (8.5)$$

Умножая обе части равенства (8.5) на $(-\pi H)$ получим полный поток взвеси в горизонтальном (радиальном) направлении, равный интенсивности источника (при отсутствии осаждения частиц):

$$-\pi \cdot H \cdot R \cdot D_{\Gamma} \frac{dC}{dR} = G_0. \quad (8.6)$$

Приведем дифференциальное уравнение (8.6) к безразмерной форме:

$$r \cdot \frac{dc}{dr} = a, \quad r = \frac{R}{R_0}, \quad c = \frac{C}{C_0}, \quad a = \frac{G_0}{\pi \cdot H \cdot C_0 \cdot D_{\Gamma}}. \quad (8.7)$$

Граничное условие к (8.7): $c(1) = 1$. Аналитическое решение задачи Коши:

$$c(r) = 1 - a \cdot \ln(r). \quad (8.8)$$

С помощью переменных (8.7) приведем к безразмерной форме дифференциальное уравнение (8.1), в котором осаждение частиц учтено:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dq}{dr} \right) = b \cdot c, \quad \frac{dc}{dr} = q, \quad b = \frac{k \cdot W \cdot R_0^2}{H \cdot D_{\Gamma}}. \quad (8.9)$$

Граничные условия к (8.9):

$$c(1) = 1, \quad q(1) = -a. \quad (8.10)$$

Последнее условие в (8.10) получено дифференцированием функции (8.8) в точке $r = 1$.

Задание

1. По данным своего варианта из табл. 8.1 рассчитать коэффициент Шези, коэффициент горизонтальной диффузии.
2. Построить график аналитической зависимости концентрации взвеси от расстояния до источника (без учета осаждения частиц).
3. Численным методом решить задачу Коши с учетом осаждения взвеси в озере, сравнить с аналитическим решением.
4. Построить поля концентрации (линии уровня) взвеси в озере.

Таблица 8.1 – Варианты параметров

Параметр	Номер варианта											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
C_0 , г/л	176	160	95	180	158	88	140	130	92	170	190	165
G_0 , кг/с	0,12	0,14	0,1	0,16	0,18	0,1	0,15	0,17	0,2	0,11	0,13	0,21
H , м	1,7	1,62	1,5	1,66	1,75	1,6	1,58	1,77	1,8	1,64	1,72	1,88
V , см/с	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8	4,1	4,3	4,5	4,7	4,9	5,1	3,8
$W \cdot 10^6$, м/с	8,0	8,2	7,8	8,4	7,6	8,6	7,4	8,1	7,7	8,3	7,5	7,2
R_0 , см	5	5,5	6	6,2	5,3	7	6,4	5,8	4	4,4	4,8	5,6
Номер n	4	3	2	1	2	3	4	5	6	1	2	7

Пояснение:

Номер n соответствует номеру строки в табл. Б.1 (Приложение Б).

Пример выполнения лабораторной работы с методическими указаниями

Покажем порядок выполнения работы на примере варианта 0.

Дано: $C_0 = 176$ г/л; $G_0 = 0,12$ кг/с; $H = 1,7$ м; $V = 4$ см/с; $W = 8 \cdot 10^{-6}$ м/с; $R_0 = 5$ см. Номер строки n равен 4.

Справочные данные: По табл. Б.1 (Приложение Б) находим значение безразмерного коэффициента шероховатости в строке номер 4: $n = 0,04$.

Программа расчета

$$\begin{aligned}
 & \text{ORIGIN} := 1 \quad g := 9.8 \\
 n := 0.04 \quad W := 8 \cdot 10^{-6} \quad V := 0.04 \quad H := 1.7 \quad G_0 := 0.12 \quad C_0 := 176 \quad R_0 := 0.05 \\
 & y_s := 2.5 \cdot \sqrt{n} - 0.13 - 0.75 \cdot \sqrt{H} \cdot (\sqrt{n} - 0.1) \quad C_s := \frac{H^{y_s}}{n} \quad C_s = 28.88 \\
 & M := \begin{cases} 0.7 \cdot C_s + 6 & \text{при } C_s < 60 \\ 48 & \text{при } C_s \geq 60 \end{cases} \quad M = 26.22 \quad D := \frac{g \cdot H \cdot V}{C_s \cdot M} \quad D = 8.799 \cdot 10^{-4} \\
 & a := \frac{G_0}{\pi \cdot H \cdot C_0 \cdot D} \quad a = 0.145 \quad b := \frac{W \cdot R_0^2}{H \cdot D} \quad b = 1.337 \cdot 10^{-5}
 \end{aligned}$$

Найденная аналитически безразмерная концентрация взвеси на разных относительных расстояниях до источника показана на рис. 8.1.

$$co(r) := 1 - a \cdot \ln(r)$$

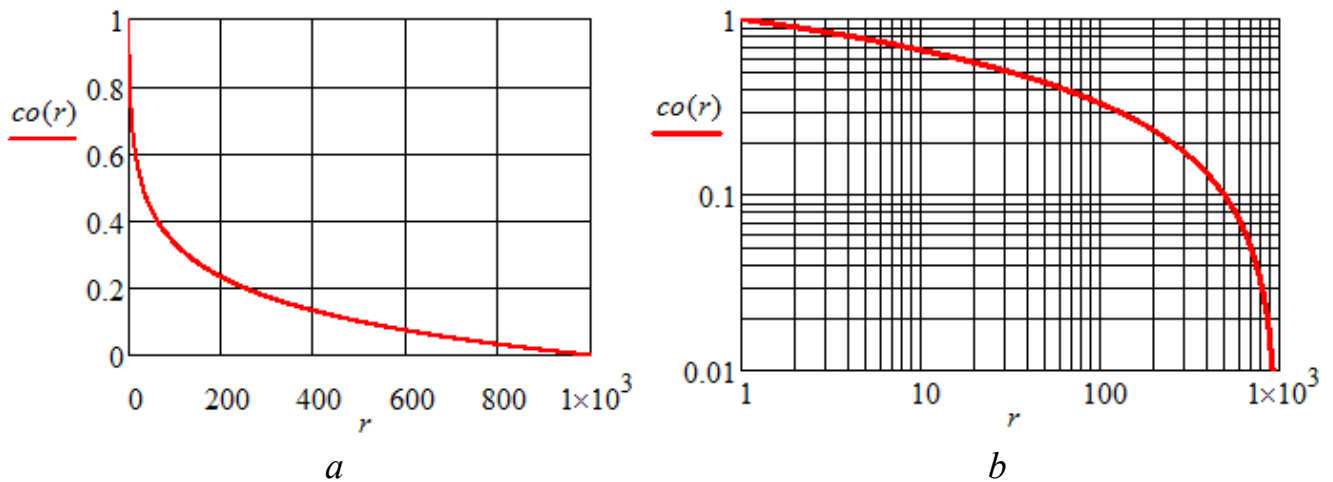


Рис. 8.1. Безразмерная концентрация взвеси на разных относительных расстояниях от источника (аналитическое решение):
a – равномерные координаты; *b* – логарифмические координаты

Дважды решаем задачу Коши численным методом, первый раз без учета осаждения частиц ($b=0$)

Given

$$\frac{d}{dr} q(r) = -\frac{q(r)}{r} \quad \frac{d}{dr} c(r) = q(r) \quad c(1) = 1, \quad q(1) = -a$$

$$\begin{pmatrix} q0 \\ c0 \end{pmatrix} := \text{Odesolve} \left[\begin{pmatrix} q \\ c \end{pmatrix}, r, 1000, 400 \right]$$

Given

$$\frac{d}{dr} q(r) = -b \cdot c(r) - \frac{q(r)}{r} \quad \frac{d}{dr} c(r) = q(r) \quad c(1) = 1, \quad q(1) = -a$$

$$\begin{pmatrix} q1 \\ c1 \end{pmatrix} := \text{Odesolve} \left[\begin{pmatrix} q \\ c \end{pmatrix}, r, 450, 400 \right]$$

На рис. 8.2-8.3 решение, найденное аналитически, совпадает с численным решением при $b=0$. Что подтверждает возможность использования данного численного метода. Видно, что учет осаждения частиц приводит к заметному уменьшению концентрации взвеси на соответствующих расстояниях от источника.

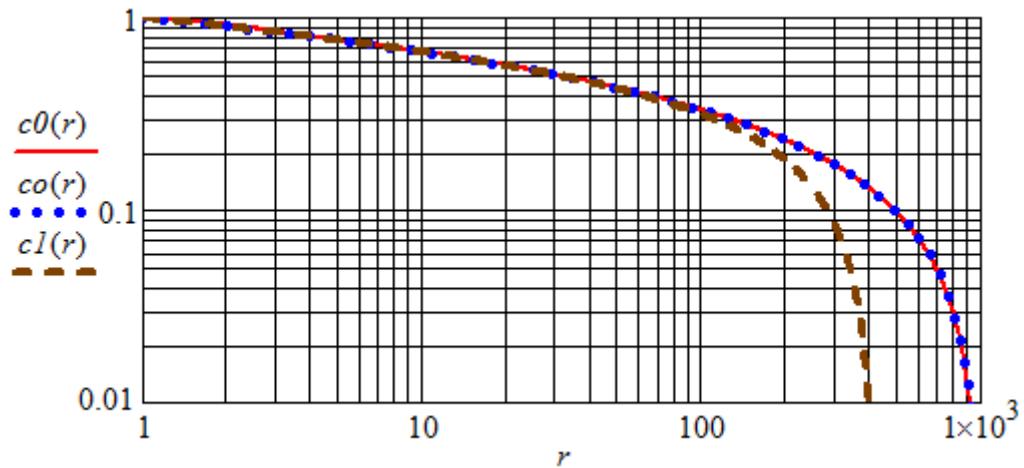


Рис. 8.2. Влияние осаждения на безразмерную концентрацию взвеси (решение численным методом, логарифмические координаты)

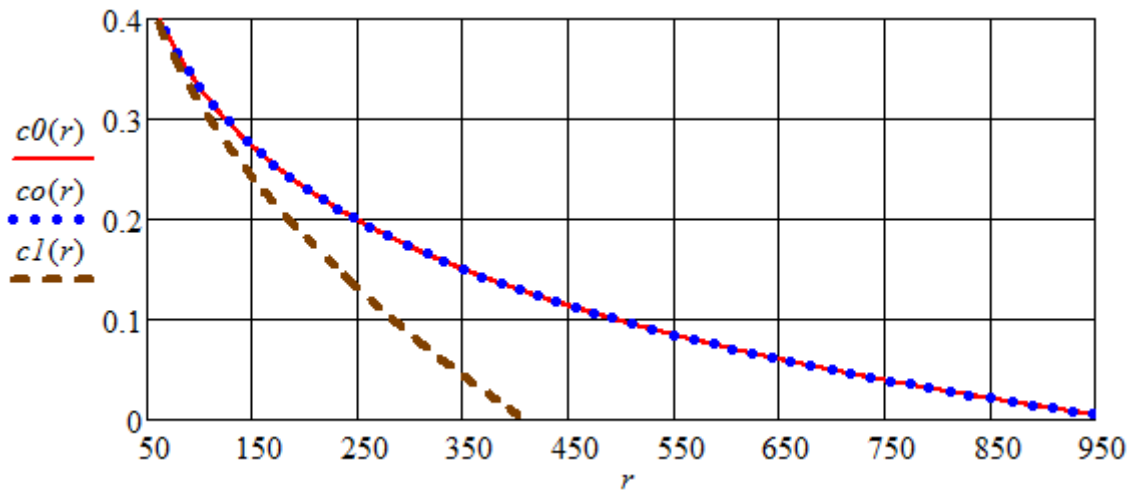


Рис. 8.3. Влияние осаждения на безразмерную концентрацию взвеси (решение численным методом, равномерные координаты)

Для формирования полей концентрации взвеси без учета осаждения (рис. 8.4) и с учетом осаждения частиц (рис. 8.5) используем следующие операторы:

$$C0(x, y) := Co \cdot co\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

$$C00 := CreateMesh(C0, -300, 300, 0, 300, 100, 100)$$

$$C1(x, y) := Co \cdot cl\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

$$C10 := CreateMesh(C1, -300, 300, 0, 300, 100, 100)$$

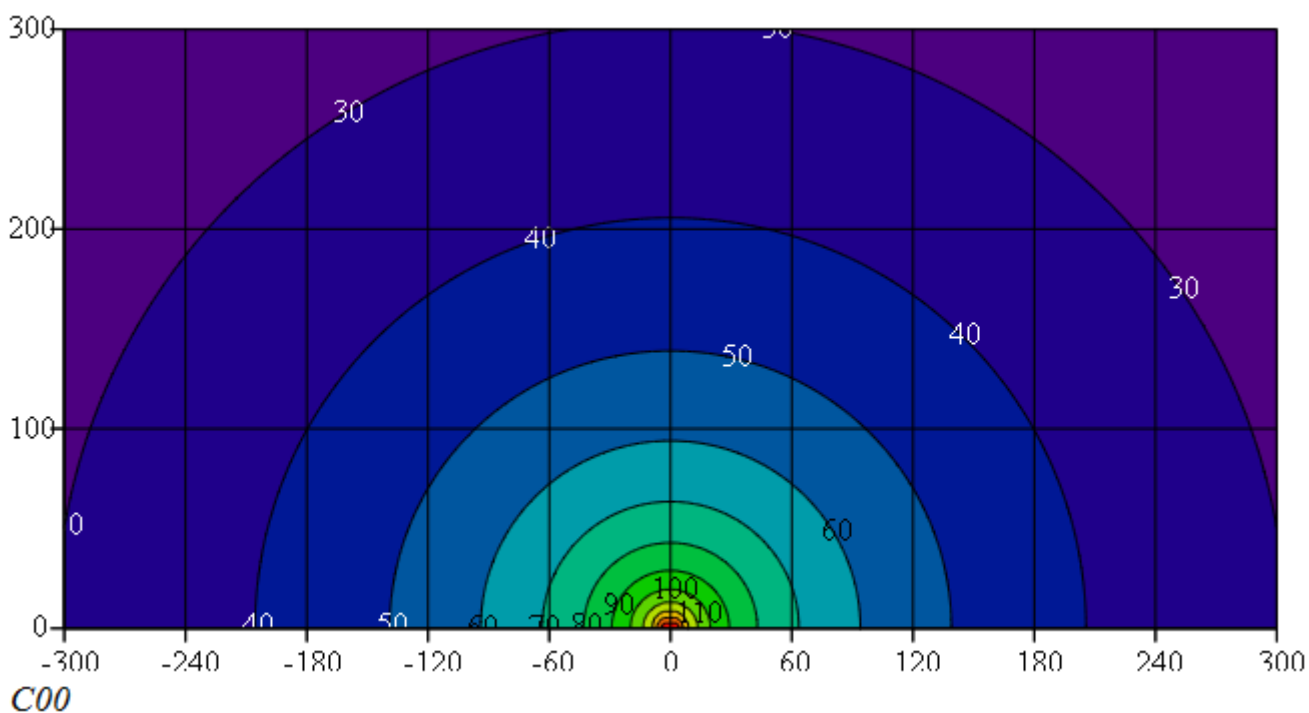


Рис. 8.4. Поле концентрации взвеси (г/л) без учета осаждения

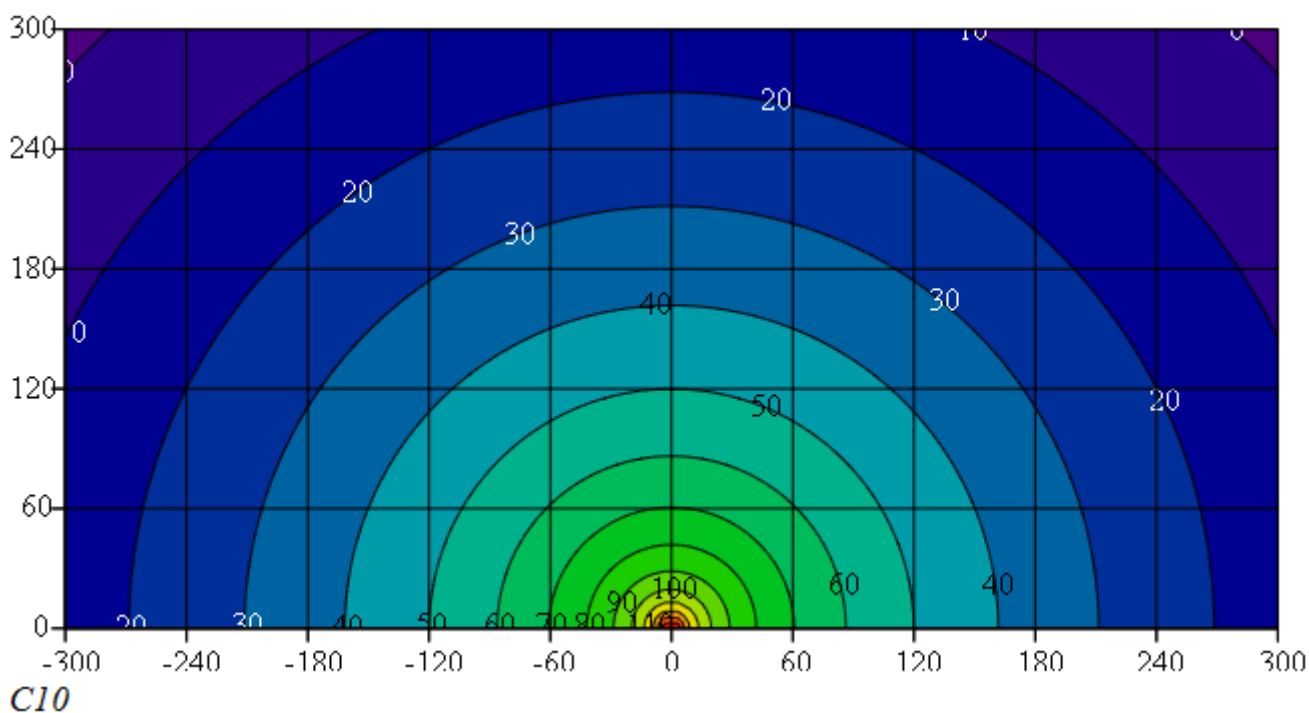


Рис. 8.5. Поле концентрации взвеси (г/л) при осаждении частиц

Выводы:

1. Концентрация неосаждающейся примеси в озере убывает прямо пропорционально логарифму от расстояния до источника.
2. Профиль безразмерной концентрации неосаждающейся примеси, найденный с помощью численного решения задачи Коши практически совпадает с аналитическим решением.

3. Учет осаждения частиц приводит к заметному уменьшению концентрации взвеси на соответствующих расстояниях от источника.

Контрольные вопросы

1. Запишите дифференциальное уравнение стационарной диффузии пассивной примеси в водоеме.
2. Сформулируйте задачу Коши для стационарной диффузии.
3. В каком случае можно найти аналитическое решение задачи Коши?
4. Какие параметры влияют на интенсивность осаждения взвеси?
5. Объясните структуру и назначение оператора *CreateMesh*.

Лабораторная работа № 9

Моделирование фильтрации солей в слое грунта Физическая постановка задачи (схематизация)

Рассматривается процесс нестационарной фильтрации соли в слое грунта длиной L между двумя водоупорами. Толщина слоя считается постоянной. С одной стороны слоя (точка O – начало координат) напор равен H_1 , с другой (точка A) – $H_2 < H_1$. Предельная концентрация раствора не может быть больше растворимости соли в воде C_m , которая зависит от температуры T . Во все время процесса концентрация соли в точке O остается постоянной, равной $C_0 = 0,8C_m$. В начальный момент времени во всех остальных точках слоя концентрация соли в воде была равна фоновому значению C_ϕ . Далее соль начинает распространяться по слою под действием конвективного и диффузионного механизма фильтрации. При этом происходит увеличение концентрации соли в воде за счет растворения.

Известна эффективная пористость грунта ε – часть объема грунта, занимаемая порами и другими пустотами, по которым воды могут свободно передвигаться (совершать процесс фильтрации), не испытывая заметного притяжения и трения со стороны почвенно-грунтовых частиц, покрытых пленочной влагой.

Математическая модель

Дифференциальное уравнение нестационарной одномерной фильтрации соли с учетом ее растворения имеет вид:

$$\varepsilon \cdot \frac{\partial C}{\partial t} + U \cdot \frac{\partial C}{\partial x} = D \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + b \cdot (C_m - C), \quad (9.1)$$

где ε – активная пористость грунта; D – коэффициент фильтрационной диффузии, $\text{м}^2/\text{сут}$; b – коэффициент скорости растворения соли, $1/\text{сут}$; C – концентрация соли в воде; C_m – растворимость соли; U – скорость фильтрации, $\text{м}/\text{сут}$, которая в данной работе находится по формуле

$$U = -k \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = -k \cdot \frac{H_2 - H_1}{L} = k \cdot \frac{H_1 - H_2}{L}, \quad (9.2)$$

k – коэффициент фильтрации, м/сут.

Начальные и граничные условия к дифференциальному уравнению (8.1):

$$C(0,t) = C_0, \quad C(x,0) = f_0(x), \quad \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{x=L} = 0. \quad (9.3)$$

По полю концентрации рассчитывают поток соли через единичную площадку:

$$q(x,t) = U \cdot C(x,t) - D \frac{\partial C}{\partial x} \approx U \cdot C(x,t). \quad (9.4)$$

В данной работе первое слагаемое (9.4) – конвективный поток много больше второго слагаемого – диффузионного потока.

Масса соли, прошедшая через единичную площадку за заданное время (кг/м²) находится с помощью интегрирования

$$G(t) = 0,01 \cdot \int_0^t q(x,\tau) d\tau = 0,01 \cdot U \cdot \int_0^t C(x,\tau) d\tau. \quad (9.5)$$

Задание

1. По данным своего варианта из табл. 9.1 рассчитать скорость фильтрации.
2. Численным методом в среде Mathcad решить дифференциальное уравнение нестационарной фильтрации соли с учетом и без учета растворения.
3. Построить профили концентрации соли (зависимость $C(x)$) в различные моменты времени и зависимость концентрации соли от времени при разных значениях координаты x .
4. Найти время t_k , за которое концентрация соли на расстоянии $x = L$ достигнет 50% значения C_0 . Построить зависимость массы соли, прошедшей через единичную площадку за время t_k от координаты x .

Таблица 9.1 – Варианты параметров

Параметр	Номер варианта											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$T^\circ\text{C}$	15	5	10	20	10	25	15	5	10	20	25	30
C_ϕ , г/100 г воды	1,1	0,8	1,3	0,75	1,25	1,0	0,85	1,15	1,2	1,45	0,9	1,5
L , м	20	22	24	26	28	21	23	30	27	29	25	18
H_1 , м	5,0	5,2	4,9	5,4	5,7	5,6	5,8	4,8	4,6	5,1	4,7	5,9
H_2 , м	2,0	2,1	1,8	2,2	2,3	2,4	2,5	1,7	1,5	1,9	1,4	1,3
k , м/сут.	0,48	0,42	0,4	0,46	0,52	0,5	0,45	0,38	0,3	0,56	0,49	0,63
$10^3 b$, 1/сут.	1,9	1,8	1,7	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8
E	0,39	0,35	0,3	0,36	0,33	0,4	0,42	0,37	0,4	0,44	0,38	0,27

$D, \text{ м}^2/\text{сут.}$	0,13	0,15	0,1	0,17	0,19	0,2	0,14	0,12	0,1	0,16	0,11	0,22
Соль	Фосфат калия	Хлорид железа	Сульфат марганца	Перхлорат ртути	Карбонат калия	Нитрат свинца	Йодид натрия	Бромид меди	Хлорид кальция	Сульфат алюминия	Нитрат магния	Хлорид кадмия

Пример выполнения лабораторной работы с методическими указаниями

Покажем порядок выполнения работы на примере варианта 0.

Дано: $T = 15^\circ\text{C}$; $C_\phi = 1,1$ (г на 100 г воды); $L = 20$ м; $H_1 = 5$ м; $H_2 = 2$ м; $k = 0,48$ м/сут.; $D = 0,13$ м²/сут.; $\varepsilon = 0,39$; $b = 1,9 \cdot 10^{-3}$ 1/сут. Соль – фосфат калия.

Справочные данные: По табл. Д.1 (Приложение Д) находим растворимость фосфата калия при температурах 10°C и 20°C . Рассчитываем с помощью линейной интерполяции значение при 15°C : $C_m = 0,5(81,5 + 92,3) = 86,9$ (г на 100 г воды).

Программа расчета

$ORIGIN := 1$

$C_m := 86.9$ $C_\phi := 1.1$ $b := 1.9 \cdot 10^{-3}$ $H_1 := 5$ $H_2 := 2$ $L := 20$ $k := 0.48$
 $D := 0.13$ $C_0 := 0.8 \cdot C_m$ $\varepsilon := 0.39$ $T_0 := 200$

1. Скорость фильтрации и исходное распределение концентрации соли

$$U := k \cdot \frac{H_1 - H_2}{L} \quad U = 0.072 \quad C_0(x) := \begin{cases} C_0 & \text{if } x = 0 \\ C_\phi & \text{otherwise} \end{cases}$$

2. Решение дифференциального уравнения нестационарной фильтрации соли численным методом с учетом растворения

Given

$$C_t(x,t) + U \cdot C_x(x,t) = D \cdot C_{xx}(x,t) + b \cdot (C_m - C(x,t))$$

$$C(0,t) = C_0 \quad C_x(L,t) = 0 \quad C(x,0) = C_0(x)$$

$$C := Pdesolve \left[C, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ T_0 \end{pmatrix}, 200, 200 \right]$$

Замечания:

1. Частная производная в виде индекса по соответствующему аргументу (r или t) задается после точки;
2. После оператора *Given* знаки равенства в уравнениях набираются в логическом меню (выделяются полужирным шрифтом).

Решение дифференциального уравнения нестационарной фильтрации соли численным методом без учета растворения

Given

$$C_t(x,t) + U \cdot C_x(x,t) = D \cdot C_{xx}(x,t)$$

$$C(0,t) = C_0 \quad C_x(L,t) = 0 \quad C(x,0) = C_0(x)$$

$$C1 := Pdesolve \left[C, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ T_0 \end{pmatrix}, 200, 200 \right]$$

3. Строим профили концентрации соли (зависимость $C(x)$) в различные моменты времени (рис. 9.1, 9.2) и зависимость концентрации соли от времени при разных значениях координаты x (рис. 9.3).

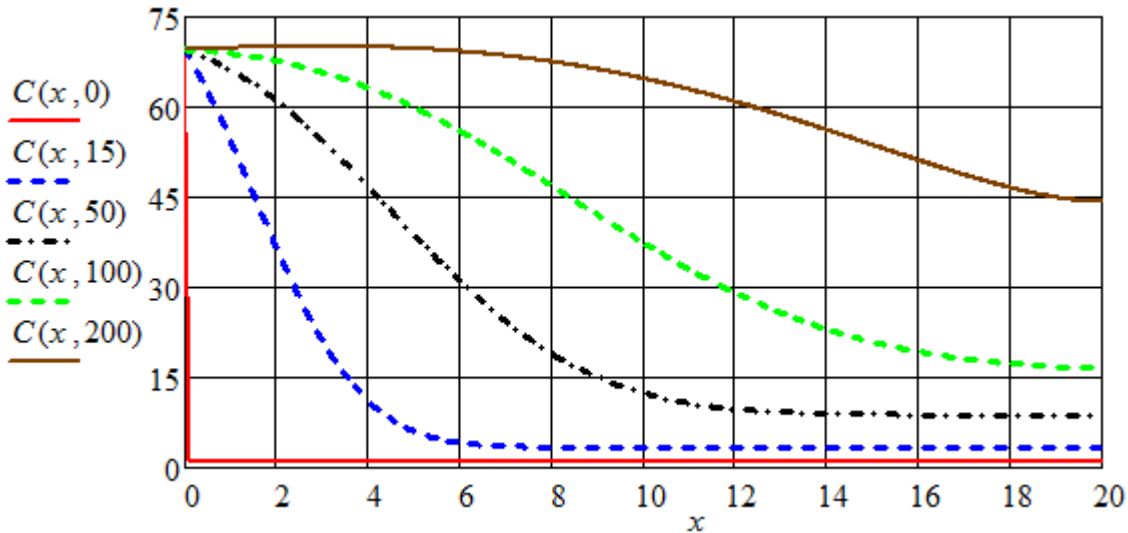


Рис. 9.1. Профили концентрации соли (г на 100 г воды) в различные моменты времени t

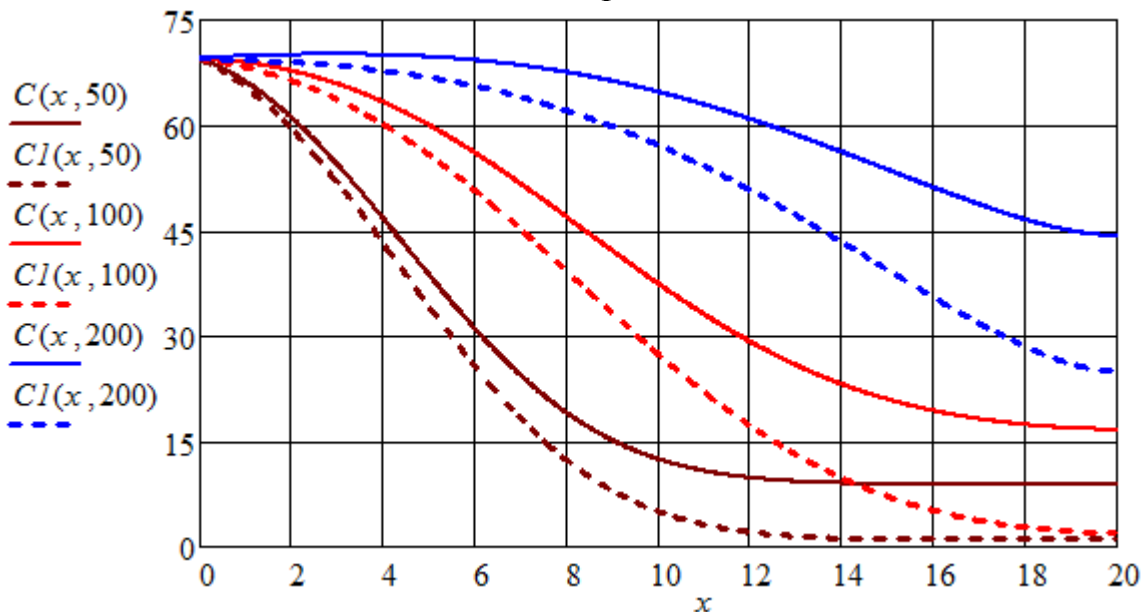


Рис. 9.2. Профили концентрации соли (г на 100 г воды) в различные t . Штриховые линии – результаты, полученные без учета процесса растворения

4. Найдем время t_k , за которое концентрация соли на расстоянии $x = L$ достигнет 50% значения C_0 :

$$t_0 := 100 \quad t_k := \text{root}(C(L, t) - 0.5 \cdot C_0, t) \quad t_k = 168.795$$

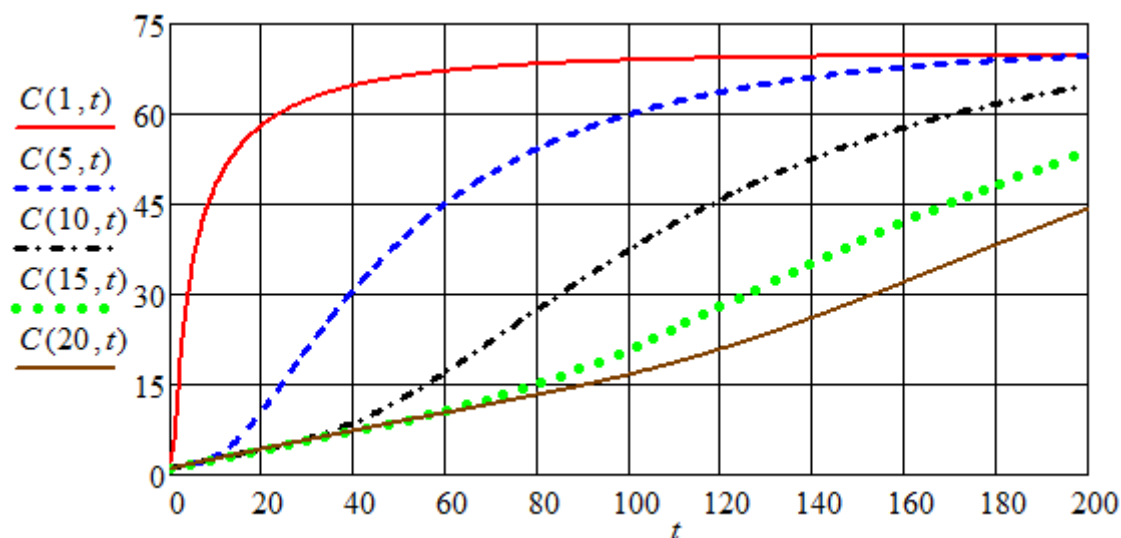


Рис. 9.3. Зависимость концентрации соли от времени (сут.) при разных значениях координаты x

Строим зависимость массы соли, прошедшей через единичную площадку за время t_k от координаты x (рис. 9.4):

$$G(x) := U \cdot \int_0^{t_k} C(x, t) dt \quad G(L) = 1.867$$

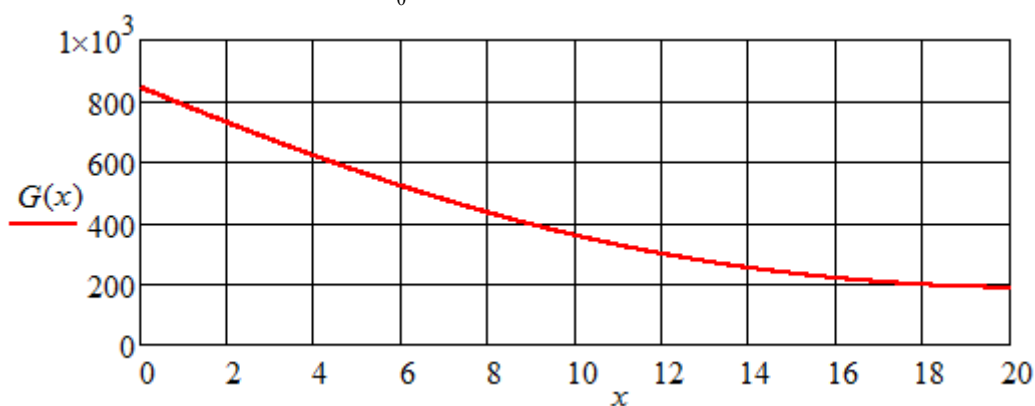


Рис. 9.4. Масса соли, прошедшей через единичную площадку за время t_k в разных точках

Выводы:

1. Скорость фильтрации в данной задаче $U = 0,072$ м/сут.
2. Время t_k , за которое концентрация соли на расстоянии $x = L$ достигнет 50% значения C_0 , равно 168,8 суток. Следовательно, фильтрация соли в заданных условиях происходит довольно медленно.
3. Масса соли, прошедшей через единичную площадку за время t_k на расстоянии $x = L$, составила $G(L) = 1,867$ кг/м².

Контрольные вопросы

1. Запишите дифференциальное уравнение фильтрации соли.
2. Как найти скорость фильтрации в одномерной задаче?
3. Что такое растворимость соли в воде? От чего она зависит?

4. Какими двумя способами можно задать производную в блоке *Given*?
5. В каком случае можно найти аналитическое решение задачи Коши?
6. Как рассчитать массу соли, прошедшей через единичную площадку?

Лабораторная работа № 10

Моделирование распространения загрязнения из стационарного точечного источника по водотоку

Физическая постановка задачи (схематизация)

Длительно действующий точечный источник загрязняющего вещества находится на расстоянии Y_u от берега водотока. Расход воды из этого источника много меньше расхода водотока Q . Средняя глубина водотока H , ширина – B . Интенсивность источника (масса загрязняющего вещества, поступающего в водоток в единицу времени) – G_0 , кг/с. Примесь представляет собой частицы с гидравлической крупностью W , плотностью $\rho > \rho_f$. Фоновая концентрация взвеси в водоеме C_0 , кг/м³ (или г/л). Распада примеси не происходит, но происходит ее постепенное осаждение на дне водотока. Считаем, что профиль концентрации загрязняющего вещества C по глубине установился. Будем изучать изменение в горизонтальной плоскости (X, Y) концентрации, осредненной на вертикали $C=f(X, Y)$. Ось OX направим по течению вдоль берега, ось OY – перпендикулярно к ней. C_0 – концентрация взвеси (г/л), измеренная на расстоянии R_0 от источника.

Математическая модель

Дифференциальное уравнение стационарного распространения пассивной примеси в горизонтальной плоскости с учетом осаждения:

$$U \frac{\partial C}{\partial X} = D \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} - \frac{\Phi}{H}, \quad (10.1)$$

где R – радиальная координата; $C(R)$ – концентрация взвеси; D – коэффициент турбулентной диффузии в горизонтальной плоскости; Φ – расход осаждения примеси, кг/(м²с), U – продольная (средняя) скорость водотока, м/с, $U = Q/(B \cdot H)$.

Коэффициент турбулентной диффузии:

$$D = g \cdot H \cdot V / (Cs \cdot M), \quad (10.2)$$

где g – ускорение свободного падения; Cs – коэффициент Шези, определяемый по формуле (2.2) при $R=H$; M – величина, зависящая от коэффициента Шези:

$$M = \begin{cases} 0,7 \cdot Cs + 6 & \text{при } Cs < 60; \\ 48 & \text{при } Cs \geq 60. \end{cases} \quad (10.3)$$

Расход осаждения примеси приближенно оценивают:

$$\Phi = k \cdot W \cdot C(X, Y), \quad (10.4)$$

где k – поправочный коэффициент, W – гидравлическая крупность частиц.

(10.1) является дифференциальным уравнением параболического типа. Это означает, что граничные условия к нему требуется задать в исходном сечении

водотока $C(0, Y) = F_0(Y)$, а также по береговым линиям, через которые, по условию, поток загрязнения отсутствует:

$$\left. \frac{\partial C}{\partial Y} \right|_{Y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial C}{\partial Y} \right|_{Y=B} = 0. \quad (10.5)$$

Введем безразмерные переменные:

$$c = \frac{C - C_\phi}{C_{np} + C_\phi}, \quad x = \frac{X}{B}, \quad y = \frac{Y}{B}, \quad q = \frac{\partial c}{\partial y}. \quad (10.6)$$

Значение концентрации примеси из источника, когда перемешивание будет полностью завершено (предельное): $C_{np} = G_0 / Q$.

Подставляем (10.6) в (10.1), (10.5) и получим краевую задачу в безразмерной форме:

$$\frac{\partial c}{\partial x} = a \cdot \frac{\partial q}{\partial y} - \phi \cdot c, \quad c(0, y) = f_0(y), \quad q(x, 0) = 0, \quad q(x, 1) = 0. \quad (10.7)$$

$$\phi = k \cdot W \cdot B / (U \cdot H), \quad a = D / (U \cdot B).$$

Массовый расход взвеси (за вычетом фонового) в любом створе водотока может быть найден с помощью интегрирования:

$$G(x) = G_0 \cdot \int_0^1 c(x, y) dy. \quad (10.8)$$

Задание

1. По данным своего варианта из табл. 10.1 рассчитать параметры задачи: коэффициент Шези, коэффициент горизонтальной диффузии, предельную концентрацию примеси.

2. Построить профиль концентрации примеси в начальном створе.

3. Численным методом решить краевую задачу без учета и с учетом осаждения взвеси в водотоке.

4. Построить профили концентрации взвеси в водотоке, изменение массового расхода взвеси вниз по течению.

Таблица 10.1 – Варианты параметров

Параметр	Номер варианта											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
C_ϕ , мг/л	5,0	6,5	4,8	5,4	6,1	4,7	5,6	6,2	5,8	4,5	6,3	7,8
G_0 , кг/с	0,40	0,42	0,5	0,46	0,38	0,6	0,55	0,47	0,5	0,41	0,53	0,39
H , м	2,5	2,3	2,1	1,9	2,15	1,8	2,2	2,4	2,6	1,84	1,92	2,8
B , м	50	48	46	44	52	42	49	47	45	43	40	55
Q , м ³ /с	25	27	29	31	33	22	24	26	28	30	32	35
$W \cdot 10^4$, м/с	1,28	1,32	1,3	1,24	1,36	1,2	1,41	1,33	1,4	1,35	1,23	1,54
L , км	15	16	17	18	19	20	19	18	17	16	15	14
Y_u , м	10	9	8	7	12	6	10	8	11	7	6	14

Номер n	4	3	2	1	2	3	4	5	6	1	2	7
-----------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Пояснение:

Номер n соответствует номеру строки в табл. Б.1 (Приложение Б).

Пример выполнения лабораторной работы с методическими указаниями

Покажем порядок выполнения работы на примере варианта 0.

Дано: $C\phi = 0,005$ г/л; $G_0 = 0,4$ кг/с; $H = 2,5$ м; $Y_u = 10$ м; $W = 1,28 \cdot 10^{-4}$ м/с;
 $B = 50$ м; $L = 15000$ м; $Q = 25$ м³/с. Номер строки n равен 4.

Справочные данные: По табл. Б.1 (Приложение Б) находим значение безразмерного коэффициента шероховатости в строке номер 4: $n = 0,04$.

Программа расчета

$$\begin{aligned}
 & \text{ORIGIN} := 1 \quad g := 9.8 \\
 n := 0.04 \quad W := 1.28 \cdot 10^{-4} \quad B := 50 \quad H := 2.5 \quad G_0 := 0.5 \quad C\phi := 0.005 \quad Y_u := 10 \\
 & Q := 25 \quad L := 15000 \quad k := 1 \quad \Delta y = 0.01
 \end{aligned}$$

1. Рассчитаем параметры задачи:

$$\text{Средняя скорость водотока} \quad U := \frac{Q}{B \cdot H} = 0.2$$

$$\text{Безразмерная ордината источника} \quad y_u := \frac{Y_u}{B} = 0.2$$

$$\text{Безразмерная длина участка водотока} \quad l := \frac{L}{B} = 300$$

Коэффициент Шези

$$y_s := 2.5 \cdot \sqrt{n} - 0.13 - 0.75 \cdot \sqrt{H} \cdot (\sqrt{n} - 0.1) \quad C_s := \frac{H^{y_s}}{n} \quad C_s = 31.48$$

Коэффициент диффузии

$$M := \begin{cases} 0.7 \cdot C_s + 6 & \text{при } C_s < 60 \\ 48 & \text{при } C_s \geq 60 \end{cases} \quad M = 28.03 \quad D := \frac{g \cdot H \cdot U}{C_s \cdot M} \quad D = 5.553 \cdot 10^{-3}$$

$$a := \frac{D}{U \cdot B} \quad a = 5.553 \cdot 10^{-4} \quad \phi := \frac{k \cdot W \cdot B}{U \cdot H} \quad \phi = 0.013$$

Концентрация примеси максимальная и предельная после перемешивания

$$C_m := \frac{G_0}{Q \cdot \Delta y} \quad C_m = 2 \quad C_{np} := \frac{G_0}{Q} \quad C_{np} = 0.02$$

2. Безразмерная максимальная концентрация и координата источника

$$c_0 := \frac{C_m - C\phi}{C_{np} + C\phi} \quad c_0 = 79.8 \quad y_u := \frac{Y_u}{B} \quad y_u = 0.2$$

Рассчитаем профиль безразмерной концентрации примеси в начальном створе (рис. 10.1) с помощью условных операторов:

$$fo(y) := \begin{cases} co \cdot \left(1 + \frac{y - yu}{\Delta y}\right) & \text{if } yu - \Delta y < y \leq yu \\ co \cdot \left(1 - \frac{y - yu}{\Delta y}\right) & \text{if } yu < y < yu + \Delta y \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

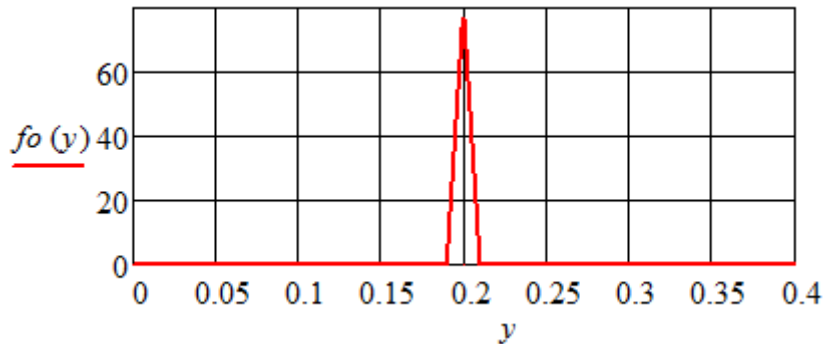


Рис. 10.1. Профиль безразмерной концентрации в начальном створе

3. Решение краевой задачи численным методом с учетом осаждения

$$\begin{aligned} & \text{Given} \\ c_x(y,x) &= a \cdot q_y(y,x) - \phi \cdot c(y,x) & c_y(y,x) &= q(y,x) \\ c(y,0) &= fo(y) & q(y,0) &= 0 & q(0,x) &= 0 & q(1,x) &= 0 \\ (c1) & := Pdesolve \left[\begin{pmatrix} c \\ q \end{pmatrix}, y, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x, \begin{pmatrix} 0 \\ l \end{pmatrix}, 800, 800 \right] \end{aligned}$$

Замечания:

1. Частная производная в виде индекса по соответствующему аргументу (x или y) задается после точки;
2. После оператора *Given* знаки равенства в уравнениях набираются в логическом меню (выделяются полужирным шрифтом).

Решение краевой задачи численным методом без учета осаждения

$$\begin{aligned} & \text{Given} \\ c_x(y,x) &= a \cdot q_y(y,x) & c_y(y,x) &= q(y,x) \\ c(y,0) &= fo(y) & q(y,0) &= 0 & q(0,x) &= 0 & q(1,x) &= 0 \\ (c0) & := Pdesolve \left[\begin{pmatrix} c \\ q \end{pmatrix}, y, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x, \begin{pmatrix} 0 \\ l \end{pmatrix}, 800, 800 \right] \end{aligned}$$

4. Строим профили концентрации взвеси в водотоке на разных расстояниях от источника загрязнения (рис. 10.2-10.3)

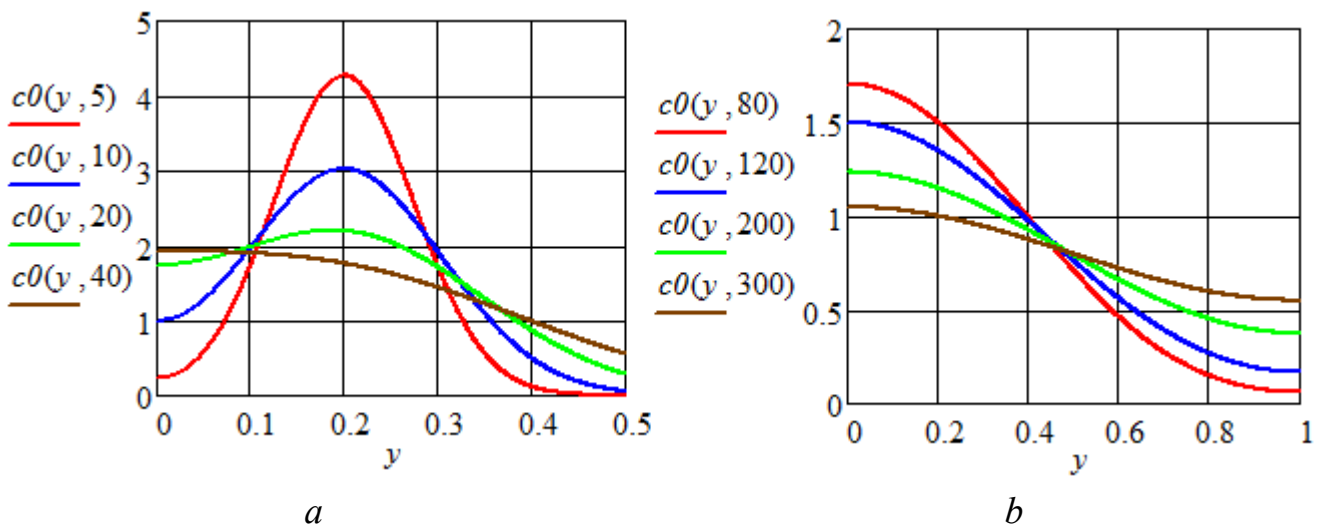


Рис. 10.2. Профили концентрации взвеси без учета осаждения частиц:
a – в ближней области течения; *b* – в дальней области

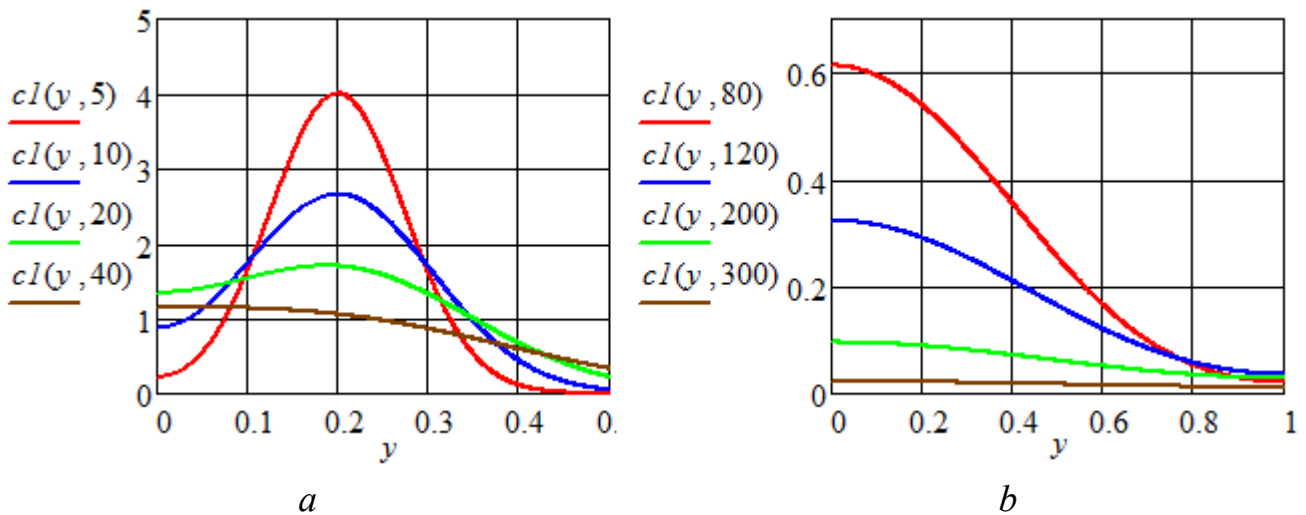


Рис. 10.3. Профили концентрации взвеси с учетом осаждения частиц:
a – в ближней области течения; *b* – в дальней области

Находим массовый расход взвеси (за вычетом фонового) в створах водотока с помощью интегрирования

$$G_0(x) := G_0 \cdot \int_0^1 c_0(y, x) dy \quad G_l(x) := G_0 \cdot \int_0^1 c_l(y, x) dy$$

При этом массовый расход взвеси, рассчитанный без учета осаждения частиц, практически, не изменяется $G_0(200) = 0,399$.

Уменьшение массового расхода взвеси, рассчитанного с учетом осаждения частиц, оценим безразмерной величиной, показанной на рис. 10.4:

$$g_l(x) := \frac{G_l(x)}{G_l(0.01)}$$

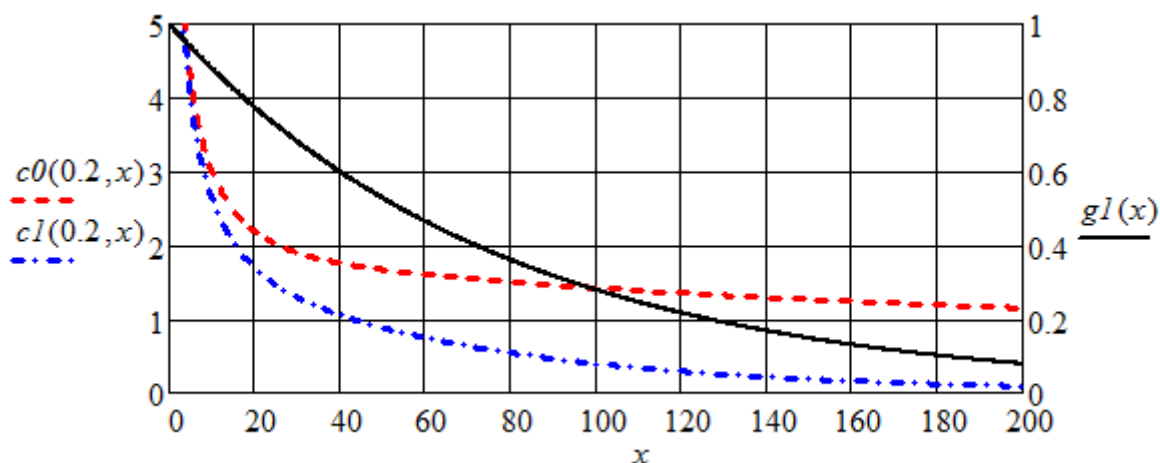


Рис. 10.4. Изменение безразмерной концентрации на ординате источника и расхода взвеси gI в створах вниз по течению водотока

Выводы:

1. По заданным параметрам средняя скорость водотока $U = 0,2$ м/с; коэффициент горизонтальной диффузии $D = 5,55 \cdot 10^{-3}$ м²/с.
2. В ближней области течения максимум концентрации взвеси находится на ординате источника, в дальней области он смещается к ближнему берегу водотока.
3. Концентрация взвеси в дальней области заметно ниже при расчете с учетом осаждения частиц.
4. Контрольный расчет массового расхода взвеси без учета осаждения частиц дает хорошее сохранение исходной величины на исследованном участке водотока.

Контрольные вопросы

1. Запишите дифференциальное уравнение распространения примеси в водотоке.
2. От чего зависит интенсивность осаждения взвеси в водотоке?
3. Как найти коэффициент горизонтальной диффузии взвеси в водотоке?
4. С помощью, каких операторов Mathcad можно численно решить дифференциальные уравнения в частных производных? Структура операторов.
5. Как рассчитать массовый расход взвеси в любом створе водотока?
6. Объясните, как задать концентрацию взвеси в створе источника загрязнения?

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

Нормативные документы

1. СП 33-101-2003. Свод правил. Определение основных расчетных гидрологических характеристик. Одобрен для применения в качестве нормативного документа постановлением Госстроя России № 218 от 26.12.2003.
2. СП 47.13330.2012. Инженерные изыскания для строительства. Утвержден приказом Федерального агентства по строительству и жилищно-коммунальному хозяйству (Госстрой России) от 10 декабря 2012 г., № 83/ГС.
3. СП 11-103-97. Свод правил. Инженерно-гидрометеорологические изыскания для строительства. Одобрен Департаментом развития научно-технической политики и проектно-изыскательских работ Госстроя России № 9-1-1/69 от 10.07.97.
4. 11 ВРДС 12-05-03 МО РФ. Методические указания по расчету распространения зон мутности при дноуглублении и дампинге на акваториях ВМФ. Утверждены заместителем Министра обороны РФ, Главнокомандующим Военно-Морским Флотом. Введены в действие с 1 января 2004 г. М., 2003. – 79 с.

Рекомендуемые учебные и учебно-методические пособия

5. Наумов В.А. Прикладная математика: учебное пособие по решению профессиональных задач в среде Mathcad. – Калининград: Изд-во ФГБОУ ВПО «КГТУ», 2014. – 144 с.
6. Тернов А.Ф. Гидравлика грунтовых вод: учебное пособие. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2010. – 63 с.
7. Гороховский А.Н. Моделирование и прогнозирование состояния окружающей среды: методические указания по выполнению лабораторных работ. – Донецк: Изд-во ДонНТУ, 2009. – 130 с.
8. Наумов В.А. Математическое моделирование: методические указания по выполнению лабораторных работ в среде Mathcad. – Калининград: Изд-во ФГБОУ ВПО «КГТУ», 2015. – 71 с.
9. Ресурсы поверхностных вод СССР. Т. 4, Вып. 3. Литовская ССР и Калининградская обл. РСФСР / Под ред. В.Е. Водогрецкого. – Л.: Гидрометиздат, 1969. – 508 с.
10. Методические основы оценки антропогенного влияния на качество поверхностных вод / Под ред. А.В. Караушева. – Л.: Гидрометеиздат, 1981. – 176 с.

Интернет-ресурсы

11. Автоматизированная информационная система государственного мониторинга водных объектов [Электронный ресурс]. URL: <https://gmvo.skniivh.ru/> (дата обращения: 01.01.2017).
12. Специализированные массивы для климатических исследований [Электронный ресурс]. URL: http://www.meteo.ru/climate/sp_clim.php (дата обращения: 01.01.2017).

Приложение А
Коэффициенты фильтрации и водоотдачи грунтов

Таблица А.1 – Коэффициент фильтрации грунта

Наименование грунта	Коэффициент фильтрации	
	см/сек	м/сут
Галечник промытый	0,1 и выше	80 и выше
» с песком	0,1—0,2	80—17
Песок крупнозернистый	0,05—0,01	40—8
» мелкозернистый	0,005—0,001	4—0,8
Пески глинистые	0,002—0,0001	1,5—0,08
Супесь плотная	0,0005—0,0001	0,4—0,08
Суглинок	0,0001 и ниже	0,8 и ниже
Глина	0,000001 и ниже	0,0008 и ниже

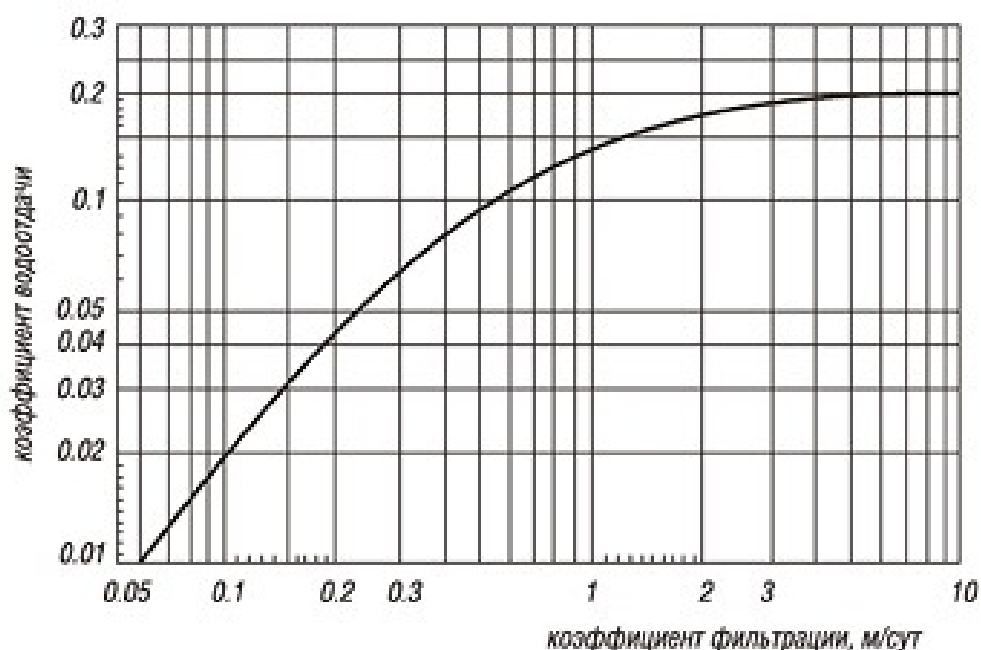


Рисунок А.1 – Зависимость коэффициента водоотдачи от коэффициента фильтрации грунта

Приложение Б

Таблица Б.1 – Шкала шероховатости речных русел и пойм [1]

№ пп	n	Характеристика русел и пойм		
		Равнинные реки	Полугорные и горные реки	Поймы
1	0,020	Прямолинейные русла канализированных рек в плотных грунтах с тонким слоем илистых отложений	—	—
2	0,025	Естественные земляные русла в благоприятных условиях, чистые, прямые, со спокойным течением	Искусственные отводы русел, высеченные в скале	Ровная чистая пойма с низкой травой без сельскохозяйственного использования
3	0,030	Гравийно-галечные русла в тех же условиях	Гравийно-галечные русла в благоприятных условиях. $J = 0,8‰ - 1,0‰$	Ровная пойма под пашней без посевов и пастбищем с низкой травой
4	0,040	Сравнительно чистые русла постоянных водотоков с некоторыми неправильностями в направлениях струй, неровностями дна и берегов и влечением донных наносов	Земляные русла периодических водотоков (сухих логов) в благоприятных условиях. Правильные хорошо разработанные галечные русла в нижнем течении. $J = 0,8‰ - 1,0‰$	Ровная пойма, занятая зрелыми полевыми культурами, пастбищем с высокой травой и вырубками без побегов, небольшое количество староречий и мелких просек
5	0,050	Значительно засоренные русла больших и средних рек, частично заросшие или каменистые. Чистые русла периодических водотоков	Значительно засоренные каменистые русла с бурным течением. Периодические водотоки с крупногалечным покрытием ложа. $J = 7‰ - 15‰$	Пойма, поросшая редким кустарником и деревьями (весной без листвы), изрезанная староречьями
6	0,065	Скалистые русла больших и средних рек. Русла периодических водотоков, засоренные и заросшие	Галечно-валунные русла с бурным течением. Засоренные периодические водотоки. $J = 15‰ - 20‰$	Пойма под редким кустарником и деревьями или вырубками с развивающейся порослью
7	0,080	Речные русла, значительно заросшие, с промоинами и неровностями дна и берегов	Валунные русла и периодические водотоки с бурным течением и взволнованной водной поверхностью. $J = 50‰ - 90‰$	Поймы, покрытые кустарником средней и большой густоты (весной без листвы)
8	0,100	Русла рек, сильно заросшие, загроможденные стволами деревьев и валунами	Русла водопадного типа с крупновалунным ложем и бурным течением. $J = 90‰ - 200‰$	Поймы, занятые лесом при уровне ниже ветвей и кустарником средней и большой густоты
9	0,140	Реки болотного типа (заросли, кочки, почти стоячая вода)	Русла с завалами из валунов и обломков скал и валунами. $J = 90‰ - 200‰$	Поймы, покрытые лесом при затоплении ветвей и густым ивняком
10	0,200	—	Русла с завалами из валунов и обломков скал	Глухие, сплошь заросшие поймы таежного типа

Приложение В

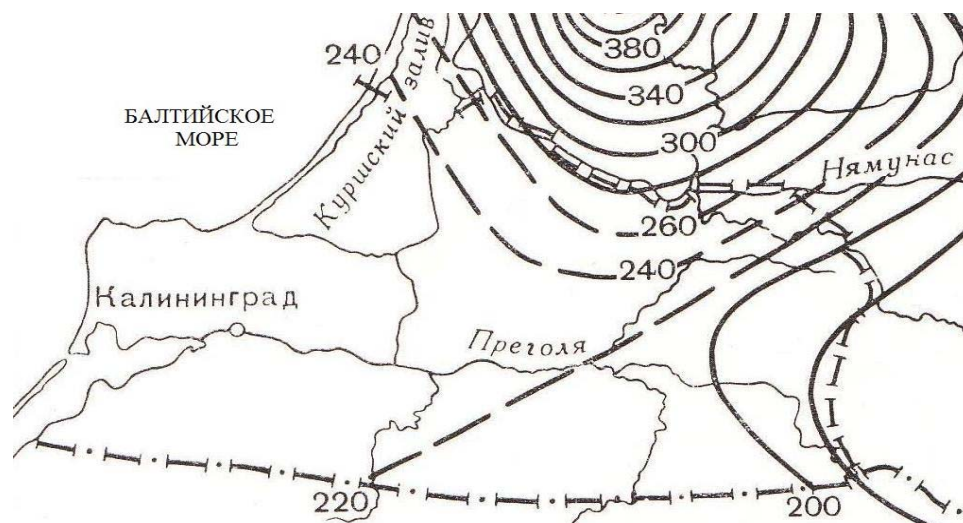


Рис. В.1. Средний слой годового стока по Калининградской области [9]

Приложение Г

Таблица Г.1 – Гидравлическая крупность взвеси, см/с [4]

Диаметр частиц, мм	Температура воды, град.				
	5	10	15	20	25
0,001	0,000059	0,000069	0,000079	0,000089	0,000100
0,005	0,00148	0,00172	0,00197	0,00223	0,00250
0,010	0,00593	0,00689	0,00784	0,00888	0,00997
0,015	0,0133	0,0154	0,0176	0,0199	0,0223
0,02	0,0235	0,0272	0,0311	0,0351	0,0394
0,03	0,0525	0,0606	0,0691	0,0780	0,0874
0,04	0,0923	0,1064	0,1212	0,1366	0,1527
0,05	0,1426	0,1640	0,1864	0,2097	0,2340
0,06	0,203	0,233	0,264	0,296	0,330
0,07	0,272	0,312	0,353	0,395	0,439
0,08	0,350	0,400	0,452	0,506	0,560
0,09	0,437	0,498	0,561	0,626	0,692
0,1	0,530	0,604	0,679	0,755	0,833

Приложение Д

Таблица Д.1 – Растворимость солей при различных температурах
(г сухого вещества в 100 г воды)

№ пп	Название соли	Химическая формула	Температура, °С			
			0	10	20	30
1	Бромид железа	FeBr ₂	101	109	117	124
2	Бромид магния	MgBr ₂	98	99	101	104
3	Бромид марганца	MnBr ₂	127	136	147	157
4	Бромид меди	CuBr ₂	107	116	126	128
5	Бромид натрия	NaBr	80.2	85.2	90.8	98.4
6	Йодид калия	KI	128	136	144	153
7	Йодид натрия	NaI	159	167	178	191
8	Йодид никеля	NiI ₂	124	135	148	161
9	Карбонат калия	K ₂ CO ₃	105	109	111	114
10	Карбонат натрия	Na ₂ CO ₃	7,0	12,5	21,5	40,8
11	Нитрат алюминия	Al(NO ₃) ₃	60	66.7	73.9	81.8
12	Нитрат марганца	Mn(NO ₃) ₂	102	118	139	206
13	Нитрат магния	Mg(NO ₃) ₂	62.1	66	69.5	73.6
14	Нитрат натрия	NaNO ₃	73.0	80.8	87.6	94.9
15	Нитрат свинца	Pb(NO ₃) ₂	37.5	46.2	54.3	63.4
16	Нитрит натрия	NaNO ₂	71.2	75.1	80.8	87.6
17	Нитрит калия	KNO ₂	279	292	306	320
18	Перхлорат натрия	NaClO ₄	167	183	201	222
19	Перхлорат никеля	Ni(ClO ₄) ₂	105	107	110	113
20	Перхлорат ртути	Hg ₂ (ClO ₄) ₂	282	325	407	455
21	Сульфат алюминия	Al ₂ (SO ₄) ₃	31.2	33.5	36.4	40.4
22	Сульфат марганца	MnSO ₄	52.9	59.7	62.9	62.9
23	Сульфат калия	K ₂ SO ₄	7.4	9.3	11.1	13
24	Сульфат натрия	Na ₂ SO ₄	5,0	9,0	19,2	41,0
25	Сульфат цинка	ZnSO ₄	41.6	47.2	53.8	61.3
26	Хлорид алюминия	AlCl ₃	43.9	44.9	45.8	46.6
27	Хлорид железа	FeCl ₂	49.7	59	62.5	66.7
28	Хлорид кадмия	CdCl ₂	100	135	135	135
29	Хлорид калия	KCl	27,6	31,0	34,0	37,0
30	Хлорид кальция	CaCl ₂	59.5	64.7	74.5	100
31	Хлорид магния	MgCl ₂	52.9	53.6	54.6	55.8
32	Хлорид марганца	MnCl ₂	63.4	68.1	73.9	80.8
33	Хлорид меди	CuCl ₂	68.6	70.9	73	77.3
34	Хлорид натрия	NaCl	35.65	35.72	36.00	36.09
35	Хлорид никеля	NiCl ₂	53.4	56.3	66.8	70.6
36	Хлорид цинка	ZnCl ₂	342	353	395	437
37	Фосфат калия	K ₃ PO ₄	72,0	81.5	92.3	108