ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО РЫБОЛОВСТВУ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Калининградский государственный технический университет»

Балтийская государственная академия рыбопромыслового флота

Е.А. Мажаева

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Часть 2

Учебное пособие
для курсантов направления подготовки
16.03.03 «Холодильная, криогенная техника
и системы жизнеобеспечения»

Калининград
Издательство БГАРФ
2020

БГАРФ

УДК 517 (075)
М 13

Мажаева, Е.А. **Высшая математика. Функции нескольких переменных. Интегральное исчисление функции одной переменной. Дифференциальные уравнения. Часть 2:** *учебное пособие / Е.А. Мажаева*. – Калининград: Изд-во БГАРФ, 2020. – 75 с.

Учебное пособие содержит материал по функции двух переменных, интегральному исчислению, дифференциальным уравнениям. Выделены основные понятия и определения, приведены примеры решения типовых задач различного уровня сложности, предложены задачи для выполнения расчетно-графических работ.

Пособие предназначено для использования как на практических занятиях, так и для организации самостоятельной работы курсантов.

Библиогр. – 5 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Балтийской государственной академии рыбопромыслового флота.

Рецензенты: ***Ганиева Р.А.,*** кандидат педагогических наук, доцент, зав. кафедрой математики филиала ВУНЦ ВМФ «Военно-морская академия» в г. Калининграде;
Авдеева Н.Н., кандидат педагогических наук, доцент секции прикладной математики кафедры высшей математики ФГБОУ ВО «КГТУ»

© БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ», 2020

БГАРФ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 4

I. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ 5

II. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ 38

Список использованной литературы 75

БГА РФ

Введение

Учебное пособие разработано в соответствии с программой курса «Высшая математика» для направления подготовки 16.03.03 «Холодильная, криогенная техника и системы жизнеобеспечения».

Содержание пособия составляют функции нескольких переменных; интегральное исчисление функции одной переменной; дифференциальные уравнения. Представлены темы, в которых последовательно излагаются фундаментальные разделы курса: функция нескольких переменных; наибольшее и наименьшее значения функции в заданной области; условный экстремум; неопределенный интеграл; определенный интеграл и его приложения; несобственный интеграл; дифференциальные уравнения первого и второго порядка; ряды.

По каждой теме выделены основные понятия и определения, приведены примеры решения типовых задач различного уровня сложности, предложены задачи для выполнения расчетно-графических работ. Работа содержит большое количество разобранных задач, поэтому может служить пособием для самостоятельного изучения данных тем.

Пособие предназначено для использования как на практических занятиях, так и для организации самостоятельной работы курсантов.

Оно поможет не только усвоить фундаментальные понятия, но и получить навыки решения основных задач.

БГАРФ

I. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть даны два непустых множества D и U. Если каждой паре действительных чисел (x, y) из множества D по некоторому правилу ставится в соответствие определенный элемент z из множества U, то говорят, что на множестве D задана *функция двух переменных*. Ее обозначают $z=f(x,y)$.

x, y – независимые переменные или аргументы;

z – функция; D – область определения функции; U – множество ее значений.

График функции двух переменных $z=f(x,y)$ есть множество точек (x, y, z) трехмерного пространства и представляет собой, как правило, некоторую *поверхность*.

Аналогично определяется функция любого числа переменных:

$$u = f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Частными производными от функции $z=f(x,y)$ по переменным x и y называются пределы вида:

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x; y) - f(x, y)}{\Delta x};$$

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Для нахождения частных производных используют правила и формулы дифференцирования функции одной переменной в предположении, что одна из переменных – постоянная.

Пример. Найти частные производные функции $z = x^2 e^{y^2}$.

Решение. При нахождении частной производной по x считаем постоянной переменную y: $z'_x = 2xe^{y^2}$.

При нахождении частной производной по y считаем постоянной переменную x: $z'_y = x^2 e^{y^2} 2y = 2x^2 ye^{y^2}$.

Полным приращением функции $z=f(x,y)$ в точке M(x,y) называется разность

$$\Delta z = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x, y),$$

где $\Delta x, \Delta y$ – приращения аргументов.

Функция $z=f(x,y)$ называется дифференцируемой в точке M(x,y), если ее полное приращение можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \gamma,$$

где γ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Полным дифференциалом функции *z=f(x,y)* называется главная часть ее полного приращения, линейная относительно $\Delta x, \Delta y$

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями:

$$dx = \Delta x;$$

$$dy = \Delta y.$$

Полный дифференциал можно найти по формуле:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy.$$

Пример. Найти полный дифференциал функции $z = 5x^2 y^3$.

Решение. Найдем сначала частные производные:

$$z'_x = 10x \cdot y^3; \quad z'_y = 15x^2 \cdot y^2.$$

По формуле $dz = z'_x dx + z'_y dy$ определяем полный дифференциал:

$$dz = 10xy^3 dx + 15x^2 y^2 dy.$$

Частными производными второго порядка от функции *z=f(x,y)* называются частные производные от ее частных производных первого порядка.

Обозначения частных производных второго порядка:

$$\left(z'_x\right)'_x = z''_{xx}; \quad \left(z'_x\right)'_y = z''_{xy};$$

$$\left(z'_y\right)'_x = z''_{yx}; \quad \left(z'_y\right)'_y = z''_{yy}.$$

Аналогично определяются и обозначаются производные третьего и высших порядков.

Так называемые «смешанные» производные, отличающиеся друг от друга лишь последовательностью дифференцирования, равны между собой, если они непрерывны, т. е.

$$z''_{xy} = z''_{yx}.$$

Экстремум функции двух переменных

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется *точкой максимума (минимума)* функции $z = f(x, y)$ если существует окрестность точки M_0, такая, что для всех точек (x, y) из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ или ($f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$). Точки максимума и минимума *называются точками экстремума*.

Необходимое условие экстремума: если точка $M_0(x_0, y_0)$ является точкой экстремума функции $z = f(x, y)$, то в этой точке ее частные производные обращаются в ноль или не существуют.

Достаточное условие экстремума: пусть в точке $M_0(x_0, y_0)$ обе частные производные обращаются в ноль или не существуют. Обозначим

$$z''_{xx}(x_0, y_0) = A, \quad z''_{xy}(x_0, y_0) = B, \quad z''_{yy}(x_0, y_0) = C.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Тогда:

– при $\Delta > 0$ точка $M_0(x_0, y_0)$является точкой экстремума (точкой максимума при $A<0$ и точкой минимума при $A>0$);

– при $\Delta < 0$ точка $M_0(x_0, y_0)$не является точкой экстремума;

– при $\Delta = 0$ требуется дополнительное исследование.

Пример. Найти экстремумы функции $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

Решение. Устанавливаем, что множеством задания данной функции является вся Евклидова плоскость R^2. Применим необходимое условие экстремума. Для этого найдем частные производные z'_x и z'_y, приравняем их к нулю и решим полученную систему:

$z'_x = 4x^3 - 4x + 4y; \quad z'_y = 4y^3 + 4x - 4y;$

$$\left.\begin{aligned} 4x^3 - 4x + 4y = 0; \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Откуда:

$$\left.\begin{aligned} x_1 = 0; \\ y_1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x_2 = -\sqrt{2}; \\ y_2 = \sqrt{2} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x_3 = \sqrt{2}; \\ y_3 = -\sqrt{2} \end{aligned}\right\}.$$

Таким образом, имеем три критические точки:

$O(0,0); \quad P_1(-\sqrt{2}, \sqrt{2}); \quad P_2(\sqrt{2}, -\sqrt{2}).$

Применим достаточное условие экстремума. Найдем частные производные второго порядка и вычислим их значения в критических точках:

$$A = z''_{xx}(x, y) = 12x^2 - 4; \quad B = z''_{xy}(x, y) = 4; \quad C = z''_{yy}(x, y) = 12y^2 - 4.$$

В точке $O(0,0)$ имеем: A=-4; B=4; C=-4;

$AC - B^2 = 0.$

Достаточный признак ответа не дает. Заметим, что в любой окрестности этой точки, в которой значения данной функции $f(x,y)$ могут быть как положительными, так и отрицательными. Например, вдоль оси $0x$ $(y=0)$. Тогда

$f(x,y)\big|_{y=0} = x^4 - 2x^2 = -x^2(2-x^2) < 0$ вблизи точки $O(0,0)$, а вблизи биссектрисы $y = x$; $f(x,y)\big|_{y=x} = f(x,x) = 2x^4 > 0$.

Оказалось, что для различных точек из некоторой окрестности точки $O(0,0)$ полное приращение $f(x,y)$ не сохраняет знака, вследствие чего в этой точке функция не имеет локального экстремума.

В точке $P_1\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ имеем: $A = 20; B = 4; C = 20$ и $A > 0$.

$AC - B^2 > 0,\quad A > 0$. Следовательно, в этой точке функция имеет локальный минимум $f_{\min}(x,y) = -8$.

В точке $P_2\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$, $AC - B^2 > 0,\quad A > 0$. Значит, и в этой точке функция имеет локальный минимум $f_{\min}(x,y) = -8$.

Функция нескольких переменных

Пример 1. Отраслевая производительная функция для кондитерской промышленности региона получена в виде

$$\ln y = -1{,}675 + 0{,}433\ln x_1 + 0{,}052\ln x_2 + 0{,}771\ln x_3,$$

где y – объем валовой продукции в неизменных ценах; x_1 – численность промышленно-производственного персонала; x_2 – стоимость промышленно-производственных фондов; x_3 – стоимость оборотных средств. Найти частные коэффициенты эластичности объема выпуска относительно каждой из переменных.

Решение. Так как y – функция нескольких переменных, то эластичность функции рассматривают относительно каждой из переменных по формуле $E_{x_i}(y) = \dfrac{x_i}{y} y'_{x_i}$, где – y'_{x_i} частная производная y по аргументу x_i. В соответствии с этим получаем

$$(\ln y)' = \frac{y'_{x_i}}{y} = \frac{0{,}433}{x_1};\ (\ln y)'_{x_2} = \frac{y'_{x_2}}{y} = \frac{0{,}052}{x_2};\ (\ln y)'_{x3} = \frac{y'_{x_3}}{y} = \frac{0{,}771}{x_3}.$$

Тогда $E_{x_1}(y) = 0{,}433;\ E_{x_2}(y) = 0{,}052;\ E_{x_3}(y) = 0{,}771.$

Найденные значения коэффициентов эластичности показывают приближенно на сколько процентов изменится функция *y* при изменении только соответствующей переменной x_i на 1 %.

Пример 2. Фактически данные о количестве запущенных *x* в производство и выпущенных *y* промышленных изделий приведены в таблице.

Запуск *x*	13	14	15	18	20	22
Запуск y	11,6	12,9	14,1	17,2	18,7	20,9

Предполагая, что между переменными *x* и *y* существует линейная функциональная зависимость *f(x)*=ax+b, найти, пользуясь методом наименьших квадратов, эту функцию и определить погрешность приближения. Вычислить с помощью полученной формулы приближенные значения *y* при *x* = 17 и *x* =25.

Решение. Система нормальных уравнений для определения коэффициента *a* и *b* имеет вид

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{6} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{6} x_i = \sum_{i=1}^{6} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{6} x^1 + 6b = \sum_{i=1}^{6} y_i. \end{cases}$$

Для определений значений коэффициентов при неизвестных и свободных членов исходные данные и промежуточные вычисления удобно располагать в следующей расчетной таблице:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i\, y_i$	$f(x_i)$	δ_i	δ_i^2
1	13	11,6	169	150,8	11,9	0,3	0,09
2	14	12,9	196	180,6	12,9	0	0
3	15	14,1	225	211,5	13,9	-0,2	0,04
4	18	17,2	324	309,6	16,9	-0,3	0,09
5	20	18,7	400	374,0	18,9	0,2	0,04
6	22	20,9	484	459,8	20,9	0	0
∑	102	95,4	1798	1686,3	-	-	0,026

Полученные значения соответствующих сумм определяют конкретный вид системы нормальных уравнений

$$\begin{cases} 1798a+102b=1686{,}3, \\ 102a+6b=95{,}4, \end{cases}$$

решая которую, получим: a =1,01; b = -1,27 .

Таким образом, эмпирическая зависимость имеет вид

$f(x)$ = 1,01x-1,27.

Погрешность приближения δ определим как корень квадратный из среднего значения суммы квадратов отклонений, т. е.

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\delta_i^2},$$

где $\delta_1 = f(x_1) - y_1$ (i =1, 2, …, 6).

Вычисленные значения δ_i и δ_i^2 приведены в трех последних столбцах таблицы.

Так как $\sum_{i=1}^{6}\delta_i^2 = 0{,}26$, то средняя погрешность приближения δ будет равна $\delta = \sqrt{\frac{0{,}26}{6}} = 0{,}208$.

Приближенные значения y при заданных значениях x =25 вычислим с помощью эмпирической формулы:

$$y_{x=17} \approx f(17) = 1{,}01 \cdot 17 - 1{,}27 = 15{,}9;$$

$$y_{x=25} \approx f(25) = 1{,}01 \cdot 25 - 1{,}27 = 23.$$

Неопределенный интеграл

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на промежутке X , если в каждой точке этого промежутка справедливо равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке X называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C – произвольная постоянная;

БГАРФ

$f(x)$ называется подынтегральной функцией;
$f(x)dx$ называется подынтегральным выражением;
x называется переменной интегрирования.

Основные свойства неопределенного интеграла

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x);$$

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$$

$$\int dF(x) = F(x) + C;$$

$$\int k\, f(x)dx = k\int f(x)dx, \quad k - число;$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Таблица основных интегралов

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1.$
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C.$
4. $\int e^x dx = e^x + C.$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$
8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$
9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C.$
10. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arctg\,\dfrac{x}{a} + C.$
11. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C.$
12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C.$

Основные методы интегрирования

Основное содержание различных методов интегрирования состоит в сведении искомого интеграла к одному или сумме нескольких табличных интегралов.

Непосредственное интегрирование

Интеграл сводится к одному или нескольким табличным интегралам с помощью эквивалентных преобразований подынтегральной функции.

БГАРФ

Пример

$$\int \frac{\left(2\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x^3}}dx = \int \frac{4x+4\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^3}}dx = \int\left(4x^{-\frac{1}{2}}+\frac{4}{x}+x^{-\frac{3}{2}}\right)dx =$$

$$= 4\int x^{-\frac{1}{2}} + 4\int\frac{dx}{x} + \int x^{-\frac{3}{2}}dx = 8x^{\frac{1}{2}} + 4\,ln|x| - 2x^{-\frac{1}{2}} + C = 8\sqrt{x} + 4\,ln|x| - \frac{2}{\sqrt{x}} + C.$$

Пример

$$\int tg^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx - \int dx = tgx - x + C\,.$$

Внесение под знак дифференциала

Интеграл приводится к табличному с помощью преобразования подынтегрального выражения. При этом используются свойства дифференциала функции, например:

$$dx = \frac{1}{k}d(kx+b);\;\; x^n dx = \frac{1}{n+1}d\left(x^{n+1}\right);\;\; sin\,xdx = -d(cos\,x);\; cos\,xdx = d(sin\,x);$$

$$\frac{dx}{cos^2 x} = d(tgx);\;\; \frac{dx}{x} = d(ln\,x)\;\; и\;\; т.д.$$

Этот метод применим, когда интеграл имеет вид

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x).$$

Пример

$$\int (3x+2)^{19}dx = \frac{1}{3}\int (3x+2)^{19}d(3x+2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+2)^{20}}{20} + C = \frac{(3x+2)^{20}}{60} + C\,.$$

Пример

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}dx = \int \ln^2 x\, d\ln x = \frac{\ln^3 x}{3} + C\,.$$

Замена переменной

$$\int f(x)dx = \left|\begin{matrix} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt \end{matrix}\right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,.$$

БГАРФ

Пример

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{c} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{array} \right| = \int \frac{2tdt}{1+t} = 2\int \frac{(1+t)-1}{1+t} dt = 2\left(\int dt - \int \frac{dt}{1+t} \right) = 2\left(t - ln|1+t|\right) + C =$$

$$= 2\left(\sqrt{x} - ln\left|1+\sqrt{x}\right|\right) + C.$$

Интегрирование по частям

Метод интегрирования по частям определяется формулой

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du\,.$$

Можно выделить основные виды интегралов, к которым применим этот метод.

№	*Вид интеграла*	*Способ разбиения на части*
1	$\int P(x)e^{kx}dx,$ $\int P(x)\sin kxdx,$ $\int P(x)\cos kxdx$	$u = P(x), \quad dv = \left[\begin{array}{l} e^{kx}dx, \\ \cos kxdx, \\ \sin kxdx. \end{array} \right.$
2	$\int P(x)\ln xdx,$ $\int P(x)arctgxdx,$ $\int P(x)arcctgxdx,$ $\int P(x)\arcsin xdx,$ $\int P(x)\arccos xdx$	$u = \left\| \begin{array}{l} \ln x, \\ arctgx, \\ arcctgx, \\ \arcsin x, \\ \arccos x; \end{array} \right. \quad dv = P(x)dx.$

P(x) – некоторая степенная функция, k – число.

Пример

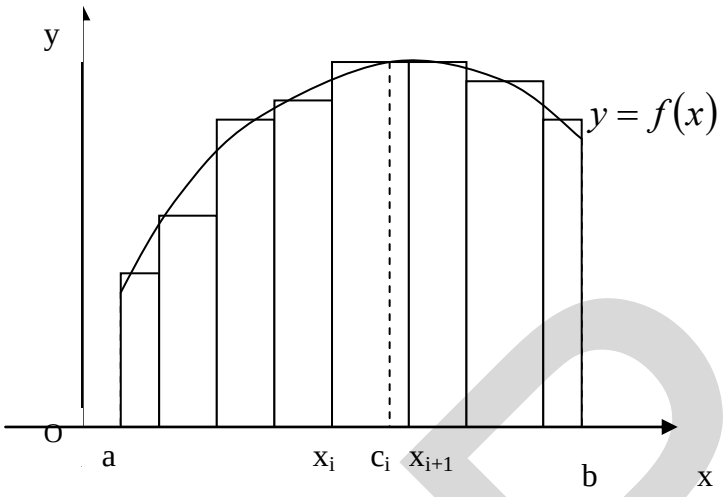
$$\int (x+1)sin\,xdx = \left| \begin{array}{c} u = x+1, \Rightarrow du = dx \\ dv = sin\,xdx, \Rightarrow v = -cos\,x \end{array} \right| = -(x+1)cos\,x + \int cos\,xdx =$$

$$= -(x+1)cos\,x + sin\,x + C.$$

БГАРФ

Определенный интеграл

Пусть непрерывная функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a,b]$.



Разобьем отрезок $[a,b]$ на n элементарных отрезков точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Обозначим $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. В каждом из отрезков разбиения $[x_i, x_{i+1}]$ выберем произвольную точку c_i и вычислим в ней значение функции $f(c_i)$. Составим сумму

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i ,$$

которая называется *интегральной суммой* для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Если существует конечный предел интегральной суммы при максимальном значении Δx_i стремящемся к нулю, который не зависит от способа разбиения отрезка $[a,b]$ и выбора точек c_i, то он называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i .$$

Геометрически определенный интеграл представляет собой площадь криволинейной трапеции (фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью Ox, прямыми $x = a$, $x = b$).

БГАРФ

Свойства определенного интеграла

1. $\int\limits_a^b k\, f(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$, где k – число.

2. $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$.

3. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

4. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

5. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx, \quad c \in (a,b)$.

6. *Теорема о среднем*. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то найдется такое значение $c \in [a,b]$, что $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

7. Если функция $y = f(x)$ – четная, то $\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx$.

8. Если функция $y = f(x)$ – нечетная, то $\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 0$.

9. *Формула Ньютона-Лейбница*:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

10. *Замена переменной в определенном интеграле*:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt; \;\; \varphi(\alpha) = a, \; \varphi(\beta) = b.$$

11. *Интегрирование по частям* определенного интеграла:

$$\int\limits_a^b u\, dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\, du.$$

БГАРФ

Пример

$$\int_0^{ln2} e^x\sqrt{e^x-1}\,dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{e^x-1}=t,\ x=ln\left(t^2+1\right), \\ dx=\dfrac{2t\,dt}{t^2+1}, \\ x=0\Rightarrow t=0, x=ln\,2\Rightarrow t=1 \end{array} \right| = \int_0^1 \left(t^2+1\right)t\,\frac{2t\,dt}{t^2+1} = 2\int_0^1 t^2dt =$$

$$= 2\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Несобственные интегралы

Несобственный интеграл I рода (с бесконечными пределами интегрирования)

Пусть функция $y=f(x)$ задана на бесконечном промежутке $[a,+\infty)$. *Несобственным интегралом I рода* называется

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx.$$

Если предел, стоящий в правой части равенства существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*; в противном случае – *расходящимся*.

Аналогично можно определить

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx,$$

где c – некоторое число.

Пример

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x} = \lim_{t\to+\infty}\int_2^t\frac{dx}{x\ln x} = \lim_{t\to+\infty}\int_2^t\frac{d\ln x}{\ln x} = \lim_{t\to+\infty}\ln\ln x\Big|_2^t = \lim_{t\to+\infty}\left(\ln\ln t-\ln\ln 2\right)=+\infty,$$

т.е. данный интеграл расходится.

БГАРФ

Несобственный интеграл II рода (от неограниченной функции)

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на полуинтервале $[a, b)$ и в точке $x = b$ имеет бесконечный разрыв. *Несобственным интегралом II рода* называется

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx .$$

Если предел, стоящий в правой части равенства существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*; в противном случае – *расходящимся*.

Аналогично можно определить несобственный интеграл на полуинтервале $(a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx .$$

Если функция $y = f(x)$ имеет бесконечный разрыв во внутренней точке $c \in (a,b)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

Оба интеграла в правой части равенства являются несобственными.

Пример: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Подынтегральная функция $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ имеет бесконечный разрыв в точке $x = 1$.

Поэтому

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0\right) =$$

$$= \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

БГАРФ

Дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию и ее производную: $f(x, y, y') = 0$.

Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке ее вместе с производной в это уравнение превращает ее в тождество.

Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ имеет бесчисленное множество решений, которые обычно определяются формулой $y = \varphi(x, C)$, содержащей одну произвольную постоянную С.

Такое решение называют *общим решением*.

Придавая произвольной постоянной С определенные допустимые числовые значения, мы будем получать *частные решения*.

В дальнейшем при решении конкретных задач нас будет интересовать преимущественно частное решение, определяемым заданным *начальным условием.*

Обычно начальное условие дифференциального уравнения первого порядка задается указанием пары соответствующих друг другу значения независимой переменной (X_0) и функции (Y_0).

Записывают это так:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0 .$$

Теорема Коши о существовании и единственности решения

Пусть дано уравнение $y' = f(x, y)$ и начальное условие:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0 .$$

Если функция *f(x,y)* и ее частная производная $\frac{df}{dy}$ непрерывны в открытой области, содержащей точку $P_0(x_0, y_0)$, то в достаточно малом интервале $[x_0 - h, x_0 + h]$ это уравнение имеет единственное решение y = y(x), удовлетворяющее заданному начальному условию.

График частного решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой*. Общему решению $y = \varphi(x, C)$ соответствует *семейство интегральных кривых*.

БГАРФ

Уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим уравнение вида

$$f_1(y)dy = f_2(x)dx \quad (*),$$

где $f_1(y)$ и $f_2(x)$ – заданные функции. В этом дифференциальном уравнении *переменные разделены*, т.е. каждая из переменных содержится только в той части уравнения, где находится ее дифференциал. Уравнение $dy = f(x)dx$ является частным случаем рассматриваемого уравнения.

В обеих частях уравнения (*) стоят дифференциалы некоторых функций; справа этот дифференциал выражен прямо через независимую переменную *x*, а слева – через промежуточный аргумент *y*, который является функцией от *x*. Именно эта независимость *y* от *x* является искомой. Произведя интегрирование, мы получим связь между переменными *x* и *y*, освобожденную от их дифференциалов:

$$\int f_1(y)dy = \int f_2(x)dx + C.$$

Напомним, что под символом $\int$ условились понимать какую- то первообразную. Ясно также, что производную постоянную С можно писать в любой части равенства.

Если задано начальное условие $y\big|_{x=x_0} = y_0$, то, определяя постоянную С, получим частное решение, удовлетворяющее данному условию. Воспользовавшись определенными интегралами, можно сразу записать искомое частное решение.

$$\int_{y_0}^{y} f_1(y)dy = \int_{x_0}^{x} f_2(x)dx.$$

При этом значении x_0 и y_0 действительно соответствуют друг другу, так как обе части равенства обращаются в нуль при замене верхних переделов *x* и *y* на x_0 и y_0.

Таким образом, решение дифференциального уравнения (*) записывается в виде, содержащим интегралы от неизвестных функций.

В этом случае принято говорить, что уравнение *приведено к квадратурам*.

Примеры:

1. Найдем общее решение уравнения $3y^2dy = 2xdx$.

Интегрируя, получим $y^3 = x^3 + C$. Здесь решение легко выразить в явном виде: $y = \sqrt[3]{x^2 + C}$.

2. Найдем решение уравнения $\frac{dy}{y} = 3x^2 dx$, удовлетворяющее условию $y|_{x=0} = 2$.

Интегрируя и записывая для удобства потенцирования произвольную постоянную в виде $\ln|C|$ $(C \neq 0)$, получим $\ln|y| = x^3 + \ln|C|$, откуда $|y| = |C|e^{x^3}$ или $y = Ce^{x^3}$.

Если бы мы взяли произвольную постоянную в виде lnC, то было бы C > 0 и общее решение пришлось бы записать так: $y = \pm Ce^{x^3}$.

Подставляя в общее решение начальное условие, найдем C :

$$2 = C.$$

Таким образом, функция $y = 2e^{x^3}$ является искомым частным решением данного уравнения. Если бы мы воспользовались определенными интегралами, то получили бы

$$\int_2^y \frac{dy}{y} = \int_0^x 3x^2 dx.$$

То есть $\ln y\Big|_2^y = x^3\Big|_0^x$ или $\ln y - \ln 2 = x^3$.

Потенцируя, приходим к тому же частному решению

$$y = 2e^{x^3}.$$

Часто встречаются уравнения, в которых переменные еще не разделены, но их можно разделить, производя простые арифметические операции.

Дифференциальные уравнения, в которых переменные можно разделить посредством умножения или деления обеих частей уравнения на одно и то же выражение, называются *дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными*.

Таким будет, например, уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_2(x)}{f_1(y)}.$$

В нем переменные еще не разделены, однако, умножив обе его части на $f_1(y)dx$, мы приходим к уравнению с разделяющимися переменными.

Легко также разделить переменные, если уравнение записано в дифференциальной форме и имеет вид

$$f_1(x) f_2(y)dx + f_3(x) f_4(y)dy = 0. \qquad (**)$$

БГАРФ

Деля обе части на произведение $f_2(y)f_3(x)$, получим

$$\frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx+\frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy=0.$$

Нам теперь даже не обязательно переносить одно из слагаемых в правую часть. Интегрируя, запишем

$$\int\frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx+\int\frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy=C.$$

Следует заметить, что при делении на $f_2(y)f_3(x)$ может произойти потеря некоторых частных решений уравнений (**) .

Пусть, например, при y = y_0 имеем $f_2(y_0)=0$. Тогда функция $y=y_0$ (постоянная) является решением уравнения. Действительно $dy=0$ и подстановка в уравнении (**) приводит к тождеству. Считая x и y равноправными и рассуждая аналогично, получим, что если $f_3(x_0)=0$, то $x=x_0$ так же является решением уравнения.

3. Найдем общее решение уравнения

$$x(y+1)dx-(x^2+1)ydy=0.$$

Разделяя переменные, приведем его к виду

$$\frac{xdx}{x^2+1}dx-(x^2+1)ydy=0.$$

Интегрируя, получим

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\int(1-\frac{1}{y+1})dy=C.$$

То есть $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-y+\ln|y+1|=C$.

Итак, мы нашли общее решение, причем y является неявной функцией от *x*. Заменяя C на $\ln|C|$, мы можем представить решение в таком виде:

$$\frac{Ce^y}{y+1}=\sqrt{x^2+1}.$$

Кроме того, есть еще частное решение *y=-1*, графиком которого является горизонтальная прямая *y=-1*.

Однородные уравнения

Функция M(x,y) *называется однородной степени m*, если для любых x, y и t > 0 выполняется равенство:

$$M(t_x^m,t_y^m)=t^mM(x,y).$$

БГАРФ

Пример. Проверим, является ли функция однородной:

$M(x,y) = x^2 + xy$;

$M(t_x, t_y) = (tx)^2 + txty = t^2x^2 + t^2xy = t^2(x^2 + xy)$.

Функция однородна.

Если функция M(x,y) и N(x,y,) однородные функции одной и той же степени n, то уравнение называется **однородным**.

Преобразуем данное уравнение:

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = -\frac{M\left(x, \frac{y|x|}{|x|}\right)}{N\left(x, \frac{y|x|}{|x|}\right)} = -\frac{|x|^m M\left(\pm 1; \pm\frac{y}{x}\right)}{|x|^m N\left(\pm 1; \pm\frac{y}{x}\right)} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Тогда однородное уравнение перепишем в виде:

$$y' = f\left(\frac{x}{y}\right).$$

Метод решения

Чтобы решить такое однородное уравнение, введем подстановку

$$\frac{y}{x} = U \Rightarrow y = Ux;\ y' = U'x + U;$$

$$U'x + U = f(U),$$

$$U'x = f(U) - U,$$

$$x\frac{du}{dx} = f(U) - U,$$

$$\frac{du}{f(U) - U} = \frac{dx}{x}.$$

Подставляя все в исходное уравнение, всегда получаем уравнение с разделяющими переменными.

Пример

$$(x^2+y^2)dx+xydy=0$$

$$x^2+y^2+xy\frac{dy}{dx}=0$$

$$x^2+y^2+xyy'=0$$

$$y'=-\frac{x^2+y^2}{xy}$$

$$y'=\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}}$$

$$U'x+U=\frac{1+U^2}{U}$$

$$U'x=\frac{1+U^2-U^2}{U}$$

$$U'x=\frac{1}{U}$$

$$x\frac{dU}{dx}=\frac{1}{U}$$

$$xdU=\frac{dx}{U}$$

$$xdU=\frac{dx}{dU}\div\frac{x}{U}$$

$$UdU=\frac{dx}{x}$$

$$\int UdU=\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{U^2}{2}=\ln|x|+C$$

$$\frac{y^2}{2x^2}=\ln|x|+C$$ – общий интеграл.

БГА РФ

Линейные уравнения

Уравнение вида $y' + P(x)y = q(x)$, где *P(x) и q(x)* – непрерывные функции, называется линейным, так как оно линейное относительно исходной функции и ее производной.

Если q(x)=0, то уравнение $y' + P(x)y = 0$ является уравнением с разделяющимися переменными.

Рассмотрим *2 метода* решения линейных уравнений.

Первый метод вариации произвольной постоянной

Рассмотрим линейное уравнение $y' + P(x)y = f(x)$ – общее неоднородное.

Составим для него однородное уравнение, положив q(x) = 0, оно является уравнением с разделяющимися переменными $y' + P(x)y = 0$ – однородное уравнение.

Решим его:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

$$dy + P(x)ydx = 0$$

$$\frac{dy}{y} + P(x)dx = 0$$

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx$$

$$\ln|y| = -\int P(x)dx$$

$$y_{oo} = e^{-\int P(x)dx} + C_1$$

$$y_{он} = e^{-\int P(x)dx} + C_1(x).$$

Цель: Найти введенную const в функцию, для этого найдем $y'_{он}$ и вместе с $y_{он}$ подставим в первоначальное уравнение, получим относительно $C_1(x)$.

БГА РФ

Пример

$$y' + \frac{1}{x} y = \frac{\sin x}{x} - \textit{линейное}$$

$$y' + \frac{y}{x} = 0$$

$$dy = -\frac{y}{x} dx$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + C$$

$$\ln|y| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

$$y_{oo} = \frac{C}{x}$$

$$y_{он} = \frac{C(x)}{x}$$

$$y'_{он} \frac{C'(x) \cdot x - C(x)}{x^2} = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}$$

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = \frac{\sin x}{x}$$

$$\frac{C'(x)}{x} = \frac{\sin x}{x}$$

$$C'(x) = \sin x$$

$$\int C'(x) = \int \sin x$$

$$C(x) = -\cos x + \tilde{C}.$$

$$\textit{Ответ}: y_{он} = -\frac{-\cos x + \tilde{C}}{x}.$$

Второй метод подстановки

$$y = U(x) \cdot V(x)$$

$$y = UV$$

$$y' = U'V + UV'$$

$$U'V + UV' + P(x)UV = q(x)$$

$$U(V' + P(x)V) = q(x) - U'V$$

$$\begin{cases} V' + P(x)V = 0 \\ q(x) - U'V = 0 \end{cases}$$

Пример

$$y' + \frac{1}{x} y = \frac{\sin x}{x}$$

$$U'V + UV' + \frac{UV}{x} = \frac{\sin x}{x}$$

$$U(V' + \frac{V}{x}) = \frac{\sin x}{x} - U'V$$

БГАРФ

$$\begin{cases} V' + \frac{V}{x} = 0 \\ \frac{\sin x}{x} - U'V = 0 \end{cases}$$

1) $V' = -\frac{V}{x}$

$\frac{dV}{dx} = -\frac{V}{x}$

$dV = -\frac{V}{x}dx$

$\frac{dV}{V} = -\frac{dx}{x}$

$\int \frac{dV}{V} = -\int \frac{dx}{x}$

$\ln|V| = -\ln|x|$

$V = \frac{1}{x};$

2) $\frac{\sin x}{x} = \frac{U'}{x}$

$U' = \sin x$

$\frac{dU}{dx} = \sin x$

$dU = \sin x dx$

$\int dU = \int \sin x dx$

$U = -cjsx + C.$

Ответ : $y = \frac{1}{x}(-\cos x + C).$

Уравнения Бернулли

Уравнение вида: $y' + P(x)y = q(x)y^{-n}$.

При n = 0 получим линейное уравнение при n = 1 с разделяющимися переменными.

Это уравнение можно свести к линейному, если введем замену $-y^{-n+1} = U$.

Будем решать уравнение Бернулли с помощью замены $y = U \cdot V$.

Пример

$$y' + 2xy = 2x^3y^3$$

$$U'V + UV' + 2xUV = 2x^3U^3V^3$$

$$U(V' + 2xV) = 2x^3U^3V^3 - U'V$$

$$\begin{cases} V' + 2xV = 0 \\ 2x^3U^3V^3 = U'V \end{cases}$$

$$V' = -2xV$$

$$\frac{dV}{dx} = -2xV$$

$$dV = -2xVdx$$

$$\frac{dV}{V} = -2xdx$$

$$ln|V| = -x^2$$

$$V = e^{-x^2}$$

$$2x^3U^3e^{-3x^2} = U'e^{-x^2}$$

$$2x^3U^3e^{-2x^2} = U'$$

$$dU = 2x^3U^3e^{-2x^2}dx$$

$$\frac{dU}{U^3} = 2x^3e^{-2x^2}dx$$

$$\int U^{-3}dU = \frac{1}{4}\int -2x^2e^{-2x^2}d(-2x^2)$$

$$\int U^{-3}dU = \frac{1}{4}\int te^t dt$$

$$\left.\begin{cases} U = t \\ dV = e^t dt \\ dU = dt \\ V = e^t \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{U^2}{2} = \frac{1}{4}\left((-2x^2)e^{-2x^2} + 2e^{2x^2}\right) + C$$

$$U^{-2} = -x^2e^{-2x^2} + e^{-2x^2} + 2C$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{2C + e^{-2x^2} - x^2e^{-2x^2}}}.$$

Дифференциальные уравнения второго и высших порядков

Мы перейдем к изучению дифференциальных уравнений вида

$$F(x, y, y', y'') = 0,$$

в левую часть которых входит вторая производная неизвестной функции. Мы будем называть их *дифференциальными уравнениями второго порядка*.

Дифференциальное уравнение второго порядка $y'' = f(x, y, y')$ обычно имеет бесчисленное множество решений, определенных формулой $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, *содержащей две произвольные постоянные*. Это множество решений называют *общим решением*.

Теорема существования и единства решения

Если функция $f(x, y, y')$ и ее частные производные $\frac{df}{dy}$ и $\frac{df}{dy'}$ непрерывны в окрестности значений x_0, y_0, y_0', то уравнение $y'' = f(x, y, y')$ имеет в достаточно малом интервале $[x_0 - h, x_0 + h]$ единственное решение y = y(x), такое что $y(x_0) = y_0$ и $y(x_0) = y_0'$.

Рассмотрим уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$.

Общее решение этого уравнения мы получим, произведя последовательно n интегрирований; при каждом таком интегрировании будет появляться новая произвольная постоянная.

Пример

Решим уравнение $y'''' = \sin x$.

Имеем

$$y''' = -\cos x + C_1$$

$$y'' = -\sin x + C_1 x + C_2$$

$$y' = \cos x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$y = \sin x + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4.$$

Изменяя обозначения произвольных постоянных, общее решение можно записать в виде

$$y = \sin x + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$$

Частный случай:

$$F(y', y'') = 0$$

$$y' = P$$

$$y'' = P'.$$

Пример

$$y'' = \sqrt{1 + (y')^2}$$

$$P' = \sqrt{1 + P^2}$$

$$\frac{dP}{dx} = \sqrt{1 + P^2}$$

$$dP = \sqrt{1 + P^2}\, dx$$

$$\frac{dP}{\sqrt{1 + P^2}} = dx$$

БГАРФ

$$ln\left|P+\sqrt{1+P^2}\right|=x+C_1$$

$$P+\sqrt{1+P^2}=e^{x+C_1}$$

$$\sqrt{1+P^2}=e^{x+C_1}-P$$

$$1+P^2=(e^{x+C_1}-P)^2$$

$$1+P^2=e^{2(x+C_1)}-2e^{x+C_1}P+C^2$$

$$2e^{x+C_1}P=e^{2(x+C_1)}-1$$

$$P=\frac{e^{2(x+C_1)}-1}{e^{x+C_1}}=\frac{e^{x+C_1}}{2}-e^{-x-C_1}$$

$$y'=\frac{e^{x+C_1}}{2}-e^{-x-C_1}$$

$$y=\int\left(\frac{e^{x+C_1}}{2}-e^{-x-C_1}\right)dx=\frac{e^{x+C_1}}{2}+e^{-x+C_1}+C.$$

Рассмотрим уравнение

$$F(y,y',y'')=0$$
$$y'=P(y)=P$$
$$y''=P'\cdot P$$
$$F(y,P,P'P)=0.$$

Пример

$$(y')^2+2yy''=0$$
$$P^2 2yP'P=0$$
$$P(P+2yP')=0$$
$$1)P=0$$
$$y'=0$$
$$y=const$$
$$P+2yP'=0$$
$$P+2y\frac{dP}{dy}=0$$
$$Pdy=-2ydP$$
$$\frac{dy}{y}=-\frac{2dP}{P}$$

$$ln|y| = -2\,ln|P| + ln\,C$$

$$y = \frac{C}{P^2}$$

$$yP^2 = C$$

$$P = \pm\sqrt{\frac{C}{y}}$$

$$y' = \pm\sqrt{\frac{C}{y}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{y}}$$

$$\sqrt{y}dy = \pm\sqrt{C}dx$$

$$\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = \pm\sqrt{C}x + C_2.$$

Линейные дифференциальные уравнения

Линейным дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение первой степени относительно неизвестной функции и ее производных.

Будем записывать в виде

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x).$$

I. Линейные уравнения без правой части

Рассмотрим уравнение

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0. \qquad (**)$$

В дальнейшем считается, что функции $a_1(x)$ и $a_2(x)$ непрерывны на интервале (a, b); этот интервал может быть бесконечным.

Для краткости записи вместо $a_1(x)$ и $a_2(x)$ будем писать a_1 и a_2; в частых случаях a_1 и a_2 могут быть постоянными.

Одно решение уравнения (**) находится сразу: это $y \equiv 0$; его называют *нулевым или тривиальным.*

Установим некоторые свойства решений уравнения (**).

Теорема I

Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – решения линейного уравнения (**), то функция $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ при любых постоянных C_1 и C_2 также является решением уравнения.

Для краткости в дальнейшем мы будем записывать решения в виде y_1 и y_2, а выражение $C_1y_1 + C_2y_2$ называть их *линейной комбинацией.*

Доказательство

Продифференцируем дважды функцию $y = C_1y_1 + C_2y_2$:

$y' = C_1y_1' + C_2y_2'$; $y'' = C_1y_1'' + C_2y_2''$.

Подставим y, y′ и y″ в левую часть уравнения (**).

Получим

$C_1y_1'' + C_2y_2'' + a_1(C_1y_1' + C_2y_2') + a_2(C_1y_1 + C_2y_2) =$

$= C_1(y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1) + C_2(y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2)$.

Выражения в скобках представляют собой результат подстановки в левую часть уравнения (**) соответственно функций y_1 и y_2, а так как они по условию суть решения уравнения, то оба эти выражения равны нулю, и, таким образом, функция $y = C_1y_1 + C_2y_2$ действительно удовлетворяет уравнению (**). Теорема доказана.

Теорема II

Если y_1 и y_2 – решения уравнения (**) такие, что их отношение не равно постоянной величине ($\frac{y_2}{y_1} \neq const$), то линейная комбинация этих функций $y = C_1y_1 + C_2y_2$ (***) является общим решением в том смысле, что каждое решение уравнения (**) может быть получено по формуле (***) при надлежащем выборе постоянных C_1 и C_2.

Условие $\frac{y_2}{y_1} \neq const$ показывает, что ни одно из этих решений не может быть нулевым.

Доказательство

В теореме I было доказано, что функция y при любых C_1 и C_2 является решением. Докажем (при сделанном предположении относительно y_1 и y_2), что, каковы бы ни были начальные условия $y\big|_{x=x_0} = y_0, y'\big|_{x-x_0} = y_0'$, всегда можно так подобрать C_1 и C_2, чтобы полученное решение удовлетворяло этим начальным условиям.

Конечно, точка x_0 принадлежит интервалу, в котором рассматривается уравнение; в частности, если a_1 и a_2 – постоянные, то x_o может быть любым.

Подставляя начальные значения в выражения для функции y ее производной, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно C_1 и C_2:

$$C_1 y_{10} + C_2 y_{20} = y_0;$$
$$C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} = y'_0,$$

где $y_{10} = y_1(x_0)$, $y'_{10} = y_1'(x_0)$, $y_{20} = y_2(x_0)$, $y'_{20} = y_2'(x_0)$ – известные числа.

Покажем, что определитель этой системы не равен нулю:

$$W_0 = \begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y'_{10} & y'_{20} \end{vmatrix} \neq 0;$$

тем самым будет доказано, что система имеет единственное решение для любых правых частей.

Предположим противное, т. е. что этот определитель равен нулю.

Тогда система линейных однородных уравнений

$C_1 y_{10} + C_2 y_{20} = 0;\ C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} = 0,$

получающаяся при нулевых начальных условиях $y_0 = 0$ и $y'_0 = 0$, помимо нулевого решения $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ имеет бесчисленное множество других, ненулевых решений. Пусть C_{10}, C_{20} – одно их них; значит, функция $C_{10}y_1 + C_{20}y_2$ является решением уравнения (**) при нулевых начальных условиях. Но так как тривиальное решение $y \equiv 0$, очевидно, что оно также удовлетворяет этим условиям, а по теореме единственности должно быть только одно, то

$$C_{10}y_1 + C_{20}y_2 \equiv 0.$$

Отсюда $\frac{y_2}{y_1} = -\frac{C_{10}}{C_{20}} = const$, что противоречит условию $\frac{y_2}{y_1} \neq const$ (если $C_{20} = 0$, то $C_{10} \neq 0$ и $y_1 \equiv 0$, что также невозможно по условию).

Итак, предположив, что $W_0 = 0$, мы пришли к противоречию; тем самым наше заключительное утверждение, а с ним и теорема доказаны.

Теорема II очень важна; она показывает, что, найдя какие-либо два решения уравнения (**), удовлетворяющие условиям теоремы, мы можем построить общее решение и, значит, находить частные решения по любым заданным условиям.

II. Линейные уравнения с правой частью

Пусть теперь дано линейное уравнение второго порядка с правой частью

$$y'' + a_1y' + a_2y = f(x). \ (*)$$

Уравнение без правой части

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0,$$

получающееся из данного уравнения (*), если вместо свободного члена $f(x)$ взять нуль, назовем *соответствующим уравнению* (*).

Докажем теорему о *структуре* общего решения уравнения с правой частью (*).

Теорема

Общее решение уравнения с правой частью (*) можно составить как сумму общего решения соответствующего уравнения без правой части (**) и какого-нибудь частного решения данного уравнения (*).

Доказательство. Обозначим через $\Phi(x)$ общее решение уравнения (**), а через $\varphi(x)$ – какое-нибудь частное решение уравнения (*). Возьмем функцию

$$y = \Phi(x) + \varphi(x).$$

Имеем

$$y' = \Phi'(x) + \varphi'(x), \ y'' = \Phi''(x) + \varphi''(x).$$

Подставляя выражения для y, y′ и y″ в левую часть заданного уравнения (*) найдем

$$\Phi''(x) + \varphi''(x) + a_1[\Phi'(x) + \varphi'(x)] + a_2[\Phi(x) + \varphi(x)] = [\Phi''(x) +$$

$$+ a_1\Phi'(x) + a_2\Phi(x)] + [\varphi''(x) + + a_1\varphi'(x) + a_2\varphi(x)].$$

Выражение в первой квадратной скобке равно нулю, ибо Φ(x) – решение уравнения без правой части (**), а выражение во второй квадратной скобке равно f(x), ибо φ(x) – решение уравнения с правой частью (*).

Следовательно, функция y = Φ(x) + φ(x) действительно есть решение уравнения (*). Согласно теореме II п.1 эту функцию можно записать так:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \varphi(x),$$

где y_1 и y_2 – частные решения соответствующего уравнению без правой части, а $\varphi(x)$ – частное решение уравнения с правой частью.

Уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами с правой частью

$y'' + a_1y' + a_2y = f(x)$ – линейные уравнения с постоянными коэффициентами, где a_1 и a_2 – постоянные величины.

Начнем с уравнений без правой части. Возьмем однородное линейное уравнение второго порядка

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0, \ (**),$$

где a_1 и a_2 – постоянные. Поставим перед собой цель – найти общее решение такого уравнения. Попробуем удовлетворить функцией вида $y = e^{rx}$ (r – действительное или комплексное число).

Имеем $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2e^{rx}$.

Следовательно, должно иметь место тождество

$$e^{rx}(r^2 + a_1r + a_2) = 0,$$

или, так как $e^{rx} \neq 0$,

$$r^2 + a_1r + a_2 = 0. \qquad (A)$$

Функция e^{rx} будет решением дифференциального уравнения (**), если r будем корнем квадратного уравнения *(A)*.

Уравнение *(A)* называется *характеристическим*.

Чтобы составить характеристическое уравнение, нужно в данном дифференциальном уравнении (**) y заменить единицей, а каждую производную искомой функции (y' *и* y'') – величиной r в степени, равной порядку производной (r *и* r^2).

Следует различать три возможных случая для корней r_1 и r_2 характеристического уравнения (здесь везде предполагается, что коэффициенты a_1 и a_2 – действительные числа):

1. r_1 и r_2 – действительные различные числа: $r_1 \neq r_2$;

2. r_1 и r_2 – действительные и равные числа: $r_1 = r_2$ (r_1 – двукратный корень уравнения (А));

3. r_1 и r_2 – комплексные сопряженные числа: $r_1 = \alpha + \beta i$; $r_2 = \alpha - \beta i$, $\beta \neq 0$.

Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

1. *Корни характеристического уравнения действительные и различные*: $r_1 \neq r_2$. При этом оба корня могут быть взяты в качестве показателей r функции e^{rx}, и мы сразу получаем два решения уравнения (**) $e^{r_1 x}$ и $e^{r_2 x}$. Ясно, что их отношение не является постоянной величиной:

$$\frac{e^{r_2 x}}{e^{r_1 x}} = e^{(r_2 - r_1)x}.$$

БГАРФ

Общее решение в случае действительных и разных корней характеристического уравнения дается формулой

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Определитель W_0 системы линейных уравнений для отыскания C_1 и C_2 по заданным начальным условиям в точке x_0 равен

$$W_0 = \begin{vmatrix} e^{r_1 x_0} & e^{r_2 x_0} \\ r_1 e^{r_1 x_0} & r_2 e^{r_2 x_0} \end{vmatrix} = e^{(r_1 + r_2) x_0 (r_2 - r_1)}.$$

Так как $r_1 \neq r_2$, а $W_0 \neq 0$, то при каком значении x_0, как и должно быть по теореме об общем решении линейного уравнения без правой части.

2. *Корни характеристического уравнения действительные и равные:* $r_1 = r_2$. В этом случае мы непосредственно получаем только одно решение $y_1 = e^{r1x}$. Покажем, что в качестве второго решения можно взять функцию

$$y_2 = xe^{r1x}.$$

Продифференцируем дважды функцию y_2:

$$y_2' = e^{r1x} + r_1 xe^{r1x},$$

$$y_2'' = 2r_1 xe^{r1x} + r_1^2 xe^{r_1 x}.$$

Подставим найденные выражения в левую часть уравнения (**):

$$2r_1 xe^{r1x} + r_1^2 xe^{r_1 x} + a_1(e^{r1x} + r_1 xe^{r1x}) + a_2 xe^{r1x} =$$

$$= e^{r1x}[x(r_1^2 + a_1 r_1 + a_2) + (2r_1 + a_1)].$$

Поскольку r_1 – корень характеристического уравнения, то $r_1^2 + a_1 r_1 + a_2 = 0$; а так как r_1 – двукратный корень, то по формуле Виета $r_1 + r_2 = -a_1$, т. е. $2r_1 + a_1 = 0$.

Таким образом, выражение, заключенное в квадратной скобке, равно нулю и функция $y_2 = xe^{r1x}$ действительно является решением уравнения (**).

Итак, ***в случае действительных равных корней характеристического уравнения общее решение уравнения (**) имеет вид***

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{r1x}.$$

Здесь легко проверить, что определитель W_0 ни при каком значении x_0 не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} e^{r_1 x_0} & x_0 e^{r_1 x_0} \\ r_1 e^{r_1 x_0} & e^{r_1 x_0} + r_1 x_0 e^{r_1 x_0} \end{vmatrix} = e^{2 r_1 x_0} \neq 0 .$$

Пример

Решим уравнение

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$r^2 - 6r + 9 = 0$$

имеет один двукратный корень

$$r^1 = r^2 = 3.$$

Значит, общее решение уравнения запишется так:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{3x}.$$

3. *Корни характеристического уравнения – комплексные сопряженные числа:* $r_1 = \alpha + \beta i$; $r_2 = \alpha - \beta i$, $\beta \neq 0$. Если допускать в качестве решений комплексные фннкции действительного переменного, то, как и выше, получаем два решения уравнения (**): $e^{(\alpha+\beta i)\,x}$ и $e^{(\alpha-\beta i)\,x}$ не есть постоянное число. Общее решение можно записать так:

$$C_1\, e^{(\alpha+\beta i)\,x} + C_2\, e^{(\alpha-\beta i)\,x},$$

где C_1 и C_2 – произвольные комплексные постоянные.

Для того чтобы получить решение в *действительной* форме, воспользуемся следующим простым правилом: *если уравнение (**) с действительными коэффициентами имеет комплексное решение* $y = u(x) + iv(x)$, *то каждая из функций* $u(x)$ *и* $v(x)$ *является решением этого уравнения.* В самом деле, дифференцируя функцию y и подставляя результат в уравнение, получим

$$(u'' + iv'') + a_1(u' + iv') + a_2(u + iv) = 0$$

или после перегруппировки слагаемых

$$(u'' + a_1 u' + a_2 u) + i(v'' + + a_1 v' + a_2 v) = 0.$$

Так как комплексное выражение равно нулю тогда и только тогда, когда равны нулю его действительная и мнимая части, то

$$u'' + a_1 u' + a_2 u = 0 \text{ и } v'' + + a_1 v' + a_2 v = 0,$$

а это и значит, что функции $u(x)$ *и* $v(x)$ являются решениями.

Так как по формуле Эйлера

$$e^{(\alpha+\beta i)\,x} = e^{\alpha x} e^{ibx} = e^{ax}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + i\, e^{ax}\sin\beta x,$$

БГАРФ

то в силу указанного правила функции $e^{\alpha x} \cos\beta x$ и $i\, e^{ax}\sin\beta x$ являются решениями уравнения (**); ясно, что их отношение не есть постоянная. Зная два частных решения, строим общее решение:

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos\beta x + C_2 e^{ax}\sin\beta x = e^{ax}(C_1 \cos\beta x + C_2\sin\beta x),$$

где C_1 и C_2 – уже действительные постоянные. Второе решение в комплексной форме $e^{(\alpha-\beta i)\, x}$ нам даже не понадобилось; строя общее решение по его действительной ($e^{\alpha x} \cos\beta x$) и мнимой ($-e^{ax}\sin\beta x$) частям, мы, очевидно получим то же самое.

Итак, ***в случае комплексных сопряженных корней характристического уравнения общее решение имеет вид***

$$\boldsymbol{y \equiv e^{ax}(C_1 \cos\beta x + C_2\sin\beta x).}$$

Пример: $y'' - 4y' + 13y = 0.$

Записываем характеристическое уравнение: $r^2 - 4r + 13 = 0$.
Его корни

$$r_1 = 2 + 3i,\ r_2 = 2 - 3i.$$

Поэтому общим решением будет

$$y = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x).$$

В теории колебаний часто встречается уравнение, в котором $a_1 = 0$ и $a_2 > 0$. Запишем его в виде

$$y'' + \omega^2 y = 0,$$

где ω – положительная постоянная.

Из характеристического уравнения $r^2 + \omega^2 = 0$ находим

$$r_1 = \omega i,\ r_2 = -\omega i.$$

Поэтому $y = C_1 \cos\omega x + C_2\sin\omega x.$

Полученное общее решение можно записать в несколько ином виде, если ввести другие произвольные постоянные при помощи условий

$$C_1 = A\sin\varphi,\ C_2 = A\cos\varphi.$$

Отсюда $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ и $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{C_1}{C_2}$.

Тогда $y = A(\sin\varphi\cos\omega x + \cos\varphi\sin\omega x) = A\sin(\omega x + \varphi).$

БГАРФ

II. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задача 1. Исследовать на экстремум следующие функции:

1.1. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$

1.2. $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$

1.3. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$

1.4. $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$

1.5. $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$

1.6. $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$

1.7. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$

1.8. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$

1.9. $z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2$

1.10. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$

1.11. $z = (x - 2)^2 + 2y^2 - 10$

1.12. $z = (x - 5)^2 + y^2 + 1$

1.13. $z = x^3 + y^3 - 3xy$

1.14. $z = 2xy - 2x^2 - 4y^2$

1.15. $z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2$

1.16. $z = xy(12 - x - y)$

1.17. $z = xy - x^2 - y^2 + 9$

1.18. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$

БГА РФ

1.19. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$

1.20. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$

1.21. $z = xy(6 - x - y)$

1.22. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$

1.23. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$

1.24. $z = (x - 1)^2 + 2y^2$

1.25. $z = xy - 3x^2 - 2y^2$

Задача 2. С помощью полного дифференциала вычислить приближенно:

2.1. $(1{,}02)^3 \cdot (0{,}97)^2$

2.2. $\sqrt{(4{,}05)^2 + (2{,}93)^2}$

2.3. $\sin 32^\circ \cdot \cos 59^\circ$

2.4. $arctg\left(1{,}02 / 0{,}95\right)$

2.5. $1{,}02^{4{,}05}$

2.6. $\ln\left(0{,}09^3 + 0{,}99^3\right)$

2.7. $\sqrt[3]{1{,}02^2 + 0{,}05^2}$

2.8. $\sqrt{5e^{0{,}02} + 2{,}03^2}$

2.9. $(2{,}02)^3 \cdot (0{,}98)^2$

БГАРФ

2.10. $\ln\left(0{,}09^2 + 0{,}99^2\right)$

2.11. $\sin 59^\circ \cdot \cos 32^\circ$

2.12. $arctg\left(1{,}05 / 0{,}95\right)$

2.13. $\ln\left(0{,}09^3 + 0{,}99^3\right)$

2.14. $\sqrt{(1{,}04)^2 + \ln 1{,}02}$

2.15. $1{,}02^{4{,}05}$

2.16. $(2{,}02)^2 \cdot (0{,}98)^3$

2.17. $\sqrt{5e^{0{,}01} + 1{,}99^2}$

2.18. $\sqrt[3]{0{,}99^2 + 0{,}05^2}$

2.19. $(0{,}98)^3 \cdot (1{,}03)^2$

2.20. $\ln\left(0{,}09^3 + 0{,}99^3\right)$

2.21. $arctg\left(0{,}95 / 1{,}05\right)$

2.22. $(4{,}01)^2 \cdot (0{,}99)^2$

2.23. $\sqrt{2e^{0{,}01} + 1{,}99^2}$

2.24. $\ln\left(0{,}09^3 + 0{,}99^3\right)$

2.25. $\sqrt{\sin^2 1{,}55 + 8e^{0{,}015}}$ (принять $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}571$).

БГА РФ

Задача 3. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

3.1. $z = \ln\left(y^2 - e^{-x}\right)$

3.2. $z = arctg\left(x^2 + y^2\right)$

3.3. $z = \arcsin\sqrt{xy}$

3.4. $z = \cos\left(x^3 - 2xy\right)$

3.5. $z = \sin\sqrt{\dfrac{y}{x^3}}$

3.6. $z = tg\left(x^3 + y^2\right)$

3.7. $z = ctg\sqrt{xy^3}$

3.8. $z = e^{-x^2+y^2}$

3.9. $z = \ln\left(3x^2 - y^4\right)$

3.10. $z = \arccos\dfrac{y}{x}$

3.11. $z = arcctg\left(xy^2\right)$

3.12. $z = \cos\sqrt{x^2 + y^2}$

3.13. $z = \sin\sqrt{x - y^3}$

3.14. $z = tg\left(x^3 y^4\right)$

3.15. $z = ctg(3xy - y)$

3.16. $z = e^{2x^2 - y^5}$

3.17. $z = \ln\left(\sqrt{xy} - 1\right)$

3.18. $z = \arcsin\left(2x^3 y\right)$

3.19. $z = arctg\,\dfrac{x^2}{y^3}$

3.20. $z = \cos\left(x - \sqrt{xy^3}\right)$

3.21. $z = ctg\sqrt{xy^3}$

3.22. $z = e^{-x^2+y^2}$

3.23. $z = \arcsin\sqrt{xy}$

3.24. $z = \cos\left(x^3 - 2xy\right)$

3.25. $z = \cos\sqrt{x^2 + y^2}$

Задача 4. Исследовать на экстремум следующие функции:

4.1. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$

4.2. $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$

4.3. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$

4.4. $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$

4.5. $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$

БГАРФ

4.6. $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$

4.7. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$

4.8. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$

4.9. $z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2$

4.10. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$

4.11. $z = (x - 2)^2 + 2y^2 - 10$

4.12. $z = (x - 5)^2 + y^2 + 1$

4.13. $z = x^3 + y^3 - 3xy$

4.14. $z = 2xy - 2x^2 - 4y^2$

4.15. $z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2$

4.16. $z = xy(12 - x - y)$

4.17. $z = xy - x^2 - y^2 + 9$

4.18. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$

4.19. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$

4.20. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$

4.21. $z = xy(6 - x - y)$

4.22. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$

4.23. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$

4.24. $z = (x - 1)^2 + 2y^2$

4.25. $z = xy - 3x^2 - 2y^2$

БГАРФ

Задача 5. Найти наибольшее и наименьшее значения в области:

5.1. $Z = x^2 + y^2 - 9xy - 27,$ $\quad 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3$

5.2. $Z = x^2 + 2y^2 + 1,$ $\quad x \ge 0,\ y \ge 0, x + y \le 3$

5.3. $Z = 3 - 2x^2 - xy - y^2,$ $\quad x \le 1,\ y \ge 0,\ y \le x$

5.4. $Z = x^2 + 3y^2 + x - y,$ $\quad x \ge 1,\ y \ge -1,\ x + y \le 1$

5.5. $Z = x^2 + 2xy + 2y^2,$ $\quad -1 \le x \le 1,\ 0 \le y < 2$

5.6. $Z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4,$ $\quad x \ge -1,\ y \ge -1, x + y \le 1$

5.7. $Z = 10 + 2xy - x^2,$ $\quad 0 \le y \le 4 - x^2$

5.8. $Z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x,$ $\quad x \le 0,\ y \le 0, x + y + 2 \ge 0$

5.9. $Z = x^2 + xy - 2,$ $\quad 4x - 4 \le y \le 0$

5.10. $Z = x^2 + xy,$ $\quad -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 3$

5.11. $Z = x^2 - y^2,$ $\quad x^2 - y^2 \le 4$

5.12. $Z = x^2 + 2xy - 4x + 8,$ $\quad x = 0,\ y = 0,\ x = 1, y = 2$

5.13. $Z = x^2 y(4 - x - y),$ $\quad x = 0,\ y = 0,\ x + y = 6$

5.14. $Z = e^{x^2 - y^2}(2x^2 + 3y^2),$ $\quad x^2 - y^2 \le 9$

5.15. $Z = x^2 y(2 - x - y),$ $\quad x > 0,\ y = 0, x + y = 5$

5.16. $Z = x + y,$ $\quad x^2 + y^2 \le 1$

5.17. $Z = x^2 - y^2,$ $\quad x^2 + y^2 \le 1$

5.18. $Z = x^2 + y^2 - 3xy,$ $\quad 0 \le x \le 2, -1 \le y \le 2$

5.19. $Z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1,$ $\quad x = 0, y = 0, x + y = 3$

5.20. $Z = x^2 - y^2 + 4,$ $\quad x^2 + y^2 \le 2$

5.21. $Z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy,$ $\quad y = x^2, y = 4$

5.22. $Z = x^3 + y^3 - 9xy + 27,$ $\quad 0 \le x \le 4, 0 \le y \le 4$

БГАРФ

5.23. $Z = 3xy,$ $x^2 + y^2 \leq 2$

5.24. $Z = xy(10 - x - y),$ $x = 1,\ y = 0, x + y = 3$

5.25. $Z = 3x^2 + 4y^2 - 5xy,$ $11 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 4$

Задача 6. Найти условный экстремум:

6.1. $Z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4,$ при $x + y + 3 = 0$

6.2. $Z = 6 - 4x - 3y,$ при $x^2 + y^2 = 1$

6.3. $Z = x^2 - y^2,$ при $x + 2y - 6 = 0$

6.4. $Z = \frac{x-y-4}{\sqrt{2}},$ при $x^2 + y^2 = 1$

6.5. $Z = xy^2,$ при $x + 2y = 1$

6.6. $Z = 2x + y,$ при $x^2 + y^2 = 1$

6.7. $Z = xy^2,$ при $x + 2y = 12\ (x > 0, y > 0)$

6.8. $Z = x^2 + y^2,$ при $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

6.9. $Z = 2x + y,$ при $x^2 + y^2 = 16$

6.10. u= $xy,$ при $x + y = 4$

6.11. $Z = 8 - 2x - 4y,$ при $x^2 + 2y^2 = 12$

6.12. $Z = 16 - 10x - 24y,$ при $x^2 + y^2 = 169$

6.13. $Z = x^2 - y^2,$ при $x + 2y - 6 = 0$

6.14. $Z = x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 10,$ при $x + y = 4$

6.15. $Z = 9 - 8x - 6y,$ при $x^2 + y^2 = 25$

6.16. $Z = xy,$ при $x + 2y = 1$

6.17. $Z = x + 2y,$ при $x^2 + y^2 = 5$

6.18. $Z = Z = \frac{x-y-4}{\sqrt{2}},$ при $x^2 + y^2 = 4$

6.19. $Z = 2x + y,$ при $x^2 + y^2 = 4$

6.20. $Z = xy^2,$ при $x + 2y = 1$

6.21. $Z = xy,$ при $x + y = 1$

БГАРФ

6.22. $Z = x + 2y,$ при $x^2 + y^2 = 5$

6.23. $Z = x^2 + y^2,$ при $x/2 + y/3 = 1$

6.24. $Z = 6 - 4x - 3y,$ при $x^2 + y^2 = 1$

6.25. $Z = 1 + x\,2y,$ при $x + y = 1$

Задача 7. Вычислить неопределенный интеграл:

7.1.

1) $\int (3 - 4\sin x)^{\frac{1}{3}} \cos x dx$

2) $\int \arccos x dx$

3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - x^2}}$

4) $\int e^x \left(\sin e^x\right) dx$

5) $\int \frac{\sqrt[3]{(4 + \ln x)} dx}{x}$

6) $\int x \cdot \ln^2 x\, dx$

7) $\int \frac{(x^3 - 6) dx}{x^4 - 6x^2 + 8}$

8) $\int \frac{dx}{2\sin x + \cos x + 2}$

9) $\int \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x - 10} dx$

10) $\int x \cos(2 - x) dx$

7.2.

1) $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$

2) $\int x \cdot \cos x dx$

3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4 - x^2}}$

4) $\int e^{\sin x} \cdot \cos x dx$

5) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{3 + 2\cos x}}$

6) $\int x^2 \cdot \sin 4x\, dx$

7) $\int \frac{(x^2 - x + 1) dx}{x^4 - 2x^2 - 3}$

8) $\int \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt[6]{x} + 1) dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

9) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x} + 3}} dx$

10) $\int arctg \frac{x}{2} dx$

БГАРФ

7.3.

1) $\int xe^{x^2}dx$

2) $\int x\ln x dx$

3) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$

4) $\int \frac{\cos\frac{x}{\sqrt{2}}}{2-3\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}dx$

5) $\int \frac{arctg\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}\cdot(x+1)}$

6) $\int x\cdot\sin x\cdot\cos x dx$

7) $\int \frac{x^2dx}{x^4-81}$

8) $\int \frac{dx}{3cos\,x+4\,sin\,x}$

9) $\int \frac{3x+3}{x^2+2x}dx$

10) $\int \ln(2x+3)dx$

7.4.

1) $\int \frac{e^x dx}{e^x+1}$

2) $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx$

3) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$

4) $\int \cos(ax+b)dx$

5) $\int \frac{(x+arctg\,x)dx}{1+x^2}$

6) $\int x\cdot\ln(x^2+1)dx$

7) $\int \frac{(x^2-3)dx}{x^4+5x^2+6}$

8) $\int \frac{\sqrt{x+5}dx}{1+\sqrt[3]{x+5}}$

9) $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}-5}dx$

10) $\int x\sin(x+7)\,dx$

7.5.

1) $\int 2^{\ln x}\frac{dx}{x}$

2) $\int (x^2-x+1)\ln x$

БГАРФ

3) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}}$

4) $\int \cos(1-2x)dx$

5) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$

6) $\int x \cdot arc\sin\frac{1}{x}dx$

7) $\int \frac{(x+3)dx}{x^3+x^2-2x}$

8) $\int \frac{\left(\sqrt[4]{x}+1\right)dx}{\left(\sqrt{x}+4\right)\sqrt[4]{x^3}}$

9) $\int \frac{\sin 2x}{4-\sin^2 x}dx$

10) $\int \arcsin 2x\, dx$

7.6.

1) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}dx$

2) $\int x^2 \cdot \sin x dx$

3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$

4) $\int \frac{\sin 2x dx}{1+\cos^2 x}$

5) $\int \frac{\cos 3x dx}{4+\sin 3x}$

6) $\int x^2 e^{3x} dx$

7) $\int \frac{x^2 dx}{x^3+5x^2+8x+4}$

8) $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x}$

9) $\int \frac{\sin x}{1+3\cos x}dx$

10) $\int x e^{-7x} dx$

7.7.

1) $\int x \cdot 5^{-x^2} dx$

2) $\int x^2 \cdot e^{-x} dx$

3) $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$

4) $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x}dx$

5) $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3tg\, x+1)}$

6) $\int \frac{x \arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$

БГАРФ

7) $\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$

8) $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$

9) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx$

10) $\int xe^{x+2}dx$

7.8.

1) $\int \frac{e^x}{(7-e^x)^2}dx$

2) $\int x^2 \cdot e^x dx$

3) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

4) $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot dx$

5) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^3}}$

6) $\int x \cdot 3^x dx$

7) $\int \frac{(3x-7)dx}{x^3+4x^2+4x+16}$

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{(x+3)^2}}$

9) $\int \frac{\cos 3x}{\sqrt{\sin 3x-2}}dx$

10) $\int x\cos(x+4)dx$

7.9.

1) $\int \frac{a^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$

2) $\int xarctgxdx$

3) $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)}dx$

4) $\int \cos x \cdot \cos^2 2x \cdot dx$

5) $\int \frac{xdx}{(x^2+4)^6}$

6) $\int e^x \cdot ln(1+3e^x)dx$

7) $\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx$

8) $\int \frac{dx}{sin\, x + tg\, x}$

БГАРФ

9) $\int \frac{7x^3}{2x^4-5}dx$

10) $\int x^2 e^{3x} dx$

7.10. 1) $\int \sqrt[3]{(8-3x)^7} \cdot dx$

2) $\int xe^{-5x} dx$

3) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$

4) $\int \sin^4 2x \cdot dx$

5) $\int e^{\sin^2 x} \cdot \sin 2x dx$

6) $\int arctg \sqrt{x} dx$

7) $\int \frac{dx}{x^3+8}$

8) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$

9) $\int \frac{4x-5}{2x^2-5x+17} dx$

10) $\int x\, arctgx\, dx$

7.11. 1) $\int 2x \cdot \sqrt{x^2+1} \cdot dx$

2) $\int x \cdot \cos 4x \cdot dx$

3) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx$

4) $\int \frac{\sin^3 x \cdot dx}{\cos^2 x}$

5) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$

6) $\int x^3 e^{x^2} dx$

7) $\int \frac{(x^3-2x)dx}{x^4+2x^2+4}$

8) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} dx$

9) $\int \frac{4x^3}{7+2x^4} dx$

10) $\int (x+1) e^{-x} dx$

7.12. 1) $\int x \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot dx$

2) $\int \ln^2 x \cdot dx$

3) $\int \frac{\sqrt{x} \cdot dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$

4) $\int \sin^5 6x \cdot dx$

БГАРФ

5) $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$

6) $\int x^3 arctg\, x dx$

7) $\int \frac{x^4 dx}{x^4+5x^2+4}$

8) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}+\sqrt{2x+1}}$

9) $\int \frac{e^{2x}}{5+e^{2x}}dx$

10) $\int \arcsin 5x dx$

7.13. 1) $\int x^2 \cdot \sqrt[5]{x^3+2} \cdot dx$

2) $\int x \cdot 2^x \cdot dx$

3) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$

4) $\int \frac{\sin^3 x \cdot dx}{\cos^2 x}$

5) $\int \frac{cos\, x \cdot sin\, 2x dx}{2+3cos^3 x}$

6) $\int x^2 cos^2 x dx$

7) $\int \frac{x^2 dx}{x^4+x^2-2}$

8) $\int \frac{\left(\sqrt[6]{x}+1\right)dx}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[6]{x^5}}$

9) $\int \frac{\sin 2x}{3\sin^2 x+4}dx$

10) $\int x\, arctg\, 4x\, dx$

7.14. 1) $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{4+x^5}}$

2) $\int x \cdot \cos^2 x \cdot dx$

3) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}dx$

4) $\int \cos^4 \frac{x}{2} \cdot dx$

5) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{5+x^6}}$

6) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$

7) $\int \frac{(x-1)dx}{x^3+x}$

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

БГАРФ

9) $\int \frac{x^2}{7-5x^3}dx$

10) $\int x\cos 8x dx$

7.15.

1) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$

2) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} \cdot dx$

3) $\int \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{4-x^2}}$

4) $\int \cos^5 x \cdot dx$

5) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[5]{\sin^2 x}}$

6) $\int (x+1) ln^2 (x+1) dx$

7) $\int \frac{x dx}{x^3-1}$

8) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$

9) $\int \frac{e^x}{4-3e^x}dx$

10) $\int arctg 3x\, dx$

7.16.

1) $\int \frac{(6x-5)\cdot dx}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}$

2) $\int arctg\sqrt{x} \cdot dx$

3) $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$

4) $\int \sin^3 x \cdot dx$

5) $\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

6) $\int \frac{x\cos x dx}{\sin^3 x}$

7) $\int \frac{x^2 dx}{x^4-16}$

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

9) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x-4}dx$

10) $\int x^2 e^{-2x} dx$

7.17.

1) $\int \frac{dx}{cx+m}$

2) $\int x \cdot 3^{-x} \cdot dx$

БГАРФ

3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$

4) $\int \sin\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{2}{3}x\cdot dx$

5) $\int \frac{dx}{2\sin^2 x+3\cos^2 x}$

6) $\int x\,arctg\,x dx$

7) $\int \frac{dx}{x^3+1}$

8) $\int \frac{xdx}{x^2\cdot\sqrt{x^2+1}}$

9) $\int \frac{e^x dx}{2e^x+3}$

10) $\int (x+1)e^{-4x}dx$

7.18. 1) $\int \frac{(2x-3)dx}{x^2-3x+8}$

2) $\int x^2\cdot\ln x\cdot dx$

3) $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

4) $\int \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{3}\cdot dx$

5) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x}}$

6) $\int x^3 \ln x dx$

7) $\int \frac{dx}{x^3+x^2+4x+4}$

8) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$

9) $\int \frac{\sin 3x}{3-\cos 3x}dx$

10) $\int x^2 e^{-x}dx$

7.19. 1) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2+7}}$

2) $\int x\cdot\cos x\cdot dx$

3) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}$

4) $\int \sin 10x\cdot\sin 15x\cdot dx$

5) $\int \frac{\sin 2xdx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$

6) $\int x^2\cos^2 xdx$

БГАРФ

7) $\int \frac{dx}{x^4 - 1}$

8) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3}}$

9) $\int \frac{3x^3}{1-x^4} dx$

10) $\int arctg\, 2x\, dx$

7.20.

1) $\int \frac{e^{7x} dx}{\sqrt[6]{1-e^{7x}}}$

2) $\int x \cdot \sin 2x \cdot dx$

3) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} \cdot dx$

4) $\int \sin 3x \cdot \cos 5x \cdot dx$

5) $\int \frac{dx}{(arcsin\, x)^2 \sqrt{1-x^2}}$

6) $\int x^2 e^{2x} dx$

7) $\int \frac{dx}{x^2 - x^2}$

8) $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^3 \sqrt{x}}$

9) $\int \frac{\sin 2x}{1+3\cos 2x} dx$

10) $\int \ln(x-5) dx$

7.21.

1) $\int (3-4\sin x)^{\frac{1}{3}} \cos x dx$

2) $\int \arccos x dx$

3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

4) $\int e^x \left(\sin e^x\right) dx$

5) $\int \frac{\sqrt[3]{(4+ln\, x)} dx}{x}$

6) $\int x \cdot ln^2\, x\, dx$

7) $\int \frac{(x^3-6)dx}{x^4-6x^2+8}$

8) $\int \frac{dx}{2\, sin\, x + cos\, x + 2}$

9) $\int \frac{3x^2+1}{x^3+x-10} dx$

10) $\int x \cos(2-x) dx$

БГАРФ

7.22.

1) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$

2) $\int x\cdot\cos x dx$

3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$

4) $\int e^{\sin x}\cdot\cos x dx$

5) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{3+2\cos x}}$

6) $\int x^2\cdot\sin 4x\, dx$

7) $\int \frac{\left(x^2-x+1\right)dx}{x^4-2x^2-3}$

8) $\int \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt[6]{x}+1\right)dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

9) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+3}}dx$

10) $\int arctg\frac{x}{2}dx$

7.23.

1) $\int xe^{x^2}dx$

2) $\int x\ln x dx$

3) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$

4) $\int \frac{\cos\frac{x}{\sqrt{2}}}{2-3\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}dx$

5) $\int \frac{arctg\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}\cdot(x+1)}$

6) $\int x\cdot\sin x\cdot\cos x dx$

7) $\int \frac{x^2dx}{x^4-81}$

8) $\int \frac{dx}{3\cos x+4\sin x}$

9) $\int \frac{3x+3}{x^2+2x}dx$

10) $\int \ln(2x+3)dx$

7.24.

1) $\int \frac{e^x dx}{e^x+1}$

2) $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx$

БГАРФ

3) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$

4) $\int \cos(ax+b)\,dx$

5) $\int \frac{(x+arctg\,x)\,dx}{1+x^2}$

6) $\int x\cdot\ln\left(x^2+1\right)dx$

7) $\int \frac{\left(x^2-3\right)dx}{x^4+5x^2+6}$

8) $\int \frac{\sqrt{x+5}dx}{1+\sqrt[3]{x+5}}$

9) $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}-5}dx$

10) $\int x\sin(x+7)dx$

7.25.

1) $\int 2^{\ln x}\frac{dx}{x}$

2) $\int (x^2-x+1)\ln x$

3) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}}$

4) $\int \cos(1-2x)dx$

5) $\int \frac{sin\,xdx}{\sqrt[3]{cos^2\,x}}$

6) $\int x\cdot arc\sin\frac{1}{x}dx$

7) $\int \frac{(x+3)dx}{x^3+x^2-2x}$

8) $\int \frac{\left(\sqrt[4]{x}+1\right)dx}{\left(\sqrt{x}+4\right)\sqrt[4]{x^3}}$

9) $\int \frac{\sin 2x}{4-\sin^2 x}dx$

10) $\int \arcsin 2x\,dx$

Задача 8. Вычислить определенный интеграл:

8.1. а) $\int_0^1 x\cdot e^{-2x}\cdot dx$

б) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\cdot dx$

в) $\int_2^7 \frac{\sqrt{x+2}}{x}dx$

г) $\int_{-3/4}^0 \frac{3xdx}{\sqrt{(x+1)^3}}$

БГАРФ

8.2. а) $\int_0^1 \arcsin x \cdot dx$ б) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \cdot dx$

в) $\int_{-1/4}^0 \frac{dx}{1-\sqrt{1+3x}}$ г) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{4+\sqrt[3]{x^2}}$

8.3. а) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{x \cdot dx}{\cos^2 x}$ б) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \cdot dx$

в) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}-3}$ г) $\int_{-4}^1 \frac{xdx}{\sqrt{(5-x)^3}}$

8.4. а) $\int_1^e \ln^2 x \cdot dx$ б) $\int_0^\pi \frac{dx}{3+2\cos x}$

в) $\int_1^2 \frac{dx}{2+\sqrt[4]{x-1}}$ г) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+5}$

8.5. а) $\int_1^e x \ln x \cdot dx$ б) $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}$

в) $\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{4+x} dx$ г) $\int_3^6 \frac{\sqrt{x-3}}{x} dx$

8.6. а) $\int_0^1 x \cdot arctgx \cdot dx$ б) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

в) $\int_2^7 \frac{\sqrt{x+2}}{x} dx$ г) $\int_{-3/4}^0 \frac{3xdx}{\sqrt{(x+1)^3}}$

8.7. а) $\int_0^{\pi/4} x \cos 2x \cdot dx$ б) $\int_0^3 \frac{xdx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

БГАРФ

в) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{4-x}dx$

г) $\int\limits_{-8}^0 \frac{dx}{5-\sqrt[3]{x^2}}$

8.8. а) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x \cdot dx}{\sin^2 x}$

б) $\int\limits_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} \cdot dx$

в) $\int\limits_{-1/4}^0 \frac{dx}{1-\sqrt{1+3x}}$

г) $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{4+\sqrt[3]{x^2}}$

8.9. а) $\int\limits_1^2 x \log_2 x \cdot dx$

б) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$

в) $\int\limits_0^{\pi} x^2 \sin x \cdot dx$

г) $\int\limits_{-3/4}^0 \frac{3xdx}{\sqrt{(x+1)^3}}$

8.10. а) $\int\limits_1^{e-1} \ln(x+1) \cdot dx$

б) $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \cdot dx$

в) $\int\limits_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$

г) $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{4+\sqrt[3]{x^2}}$

8.11. а) $\int\limits_0^{\pi/2} x \cos x \cdot dx$

б) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$

в) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{2+\sqrt[4]{x-1}}$

г) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+5}$

8.12. а) $\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x \cdot dx$

б) $\int\limits_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$

БГАРФ

в) $\int\limits_{-8}^{0} \frac{\sqrt[3]{x^2}\,dx}{\sqrt[3]{x^2}+3}$ г) $\int\limits_{4}^{9} \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$

8.13. а) $\int\limits_{0}^{1} xe^{-x} \cdot dx$ б) $\int\limits_{1}^{5} \frac{dx}{x+\sqrt{2x-1}}$

в) $\int\limits_{25}^{49} \frac{\sqrt{x}}{x-6}\,dx$ г) $\int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{2x+7}}$

8.14. а) $\int\limits_{0}^{\pi} x^2 \sin x \cdot dx$ б) $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$

в) $\int\limits_{0}^{3} \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}\,dx$ г) $\int\limits_{2}^{11} \frac{\sqrt{x-2}}{1+\sqrt{x-2}}\,dx$

8.15. а) $\int\limits_{0}^{3} x\ln(1+x) \cdot dx$ б) $\int\limits_{1}^{6} \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$

в) $\int\limits_{-1/4}^{0} \frac{dx}{1-\sqrt{1+3x}}$ г) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{4+\sqrt[3]{x^2}}$

8.16. а) $\int\limits_{4}^{5} x\ln(x-3) \cdot dx$ б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{e^x}\,dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}$

в) $\int\limits_{0}^{4} \frac{\sqrt{x}}{4+x}\,dx$ г) $\int\limits_{3}^{6} \frac{\sqrt{x-3}}{x}\,dx$

8.17. а) $\int\limits_{0}^{\pi/2} e^x \cos x \cdot dx$ б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{1+\sqrt{x}}$

в) $\int\limits_{-3/4}^{0} \frac{dx}{2-\sqrt{1+x}}$ г) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{8+\sqrt[3]{x^2}}$

БГАРФ

8.18. а) $\int_{-1}^{1} x \cdot arctgx \cdot dx$ б) $\int_{3}^{8} \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$

в) $\int_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x}-3}$ г) $\int_{-4}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{(5-x)^3}}$

8.19. а) $\int_{0}^{1} \frac{\arcsin x \cdot dx}{\sqrt{1+x}}$ б) $\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$

в) $\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{4-x} dx$ г) $\int_{-8}^{0} \frac{dx}{5-\sqrt[3]{x^2}}$

8.20. а) $\int_{0}^{\pi/4} e^{3x} \sin 4x \cdot dx$ б) $\int_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \cdot dx$

в) $\int_{-8}^{0} \frac{\sqrt[3]{x^2}dx}{\sqrt[3]{x^2}+3}$ г) $\int_{4}^{9} \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$

8.21. а) $\int_{0}^{1} x \cdot e^{-2x} \cdot dx$ б) $\int_{0}^{2} \sqrt{4-x^2} \cdot dx$

в) $\int_{2}^{7} \frac{\sqrt{x+2}}{x} dx$ г) $\int_{-3/4}^{0} \frac{3xdx}{\sqrt{(x+1)^3}}$

8.22. а) $\int_{0}^{1} arcsin\, x \cdot dx$ б) $\int_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \cdot dx$

в) $\int_{-1/4}^{0} \frac{dx}{1-\sqrt{1+3x}}$ г) $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{4+\sqrt[3]{x^2}}$

БГАРФ

8.23. а) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{x \cdot dx}{\cos^2 x}$ б) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1-x^2} \cdot dx$

в) $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x}-3}$ г) $\int\limits_{-4}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{(5-x)^3}}$

8.24. а) $\int\limits_{1}^{e} \ln^2 x \cdot dx$ б) $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$

в) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{2+\sqrt[4]{x-1}}$ г) $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x}+5}$

8.25. а) $\int\limits_{1}^{e} x \ln x \cdot dx$ б) $\int\limits_{0}^{a} \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}$

в) $\int\limits_{0}^{4} \frac{\sqrt{x}}{4+x} dx$ г) $\int\limits_{3}^{6} \frac{\sqrt{x-3}}{x} dx$

Задача 9. Вычислить несобственные интегралы:

9.1. а) $\int\limits_{0}^{1} \ln x \cdot dx$ б) $\int\limits_{-\infty}^{0} x \cdot e^x \cdot dx$ в) $\int\limits_{14}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x+2}}$

9.2. а) $\int\limits_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$ б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$ в) $\int\limits_{-5}^{-4} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+5)^4}}$

9.3. а) $\int\limits_{2}^{3} \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^2-4}}$ б) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$ в) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{4x^2+1}$

9.4. а) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2-1}$ б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ в) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^3}}$

БГАРФ

9.5. а) $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ б) $\int\limits_{1/2}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ в) $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx$

9.6. а) $\int\limits_{0}^{1} x\ln x \cdot dx$ б) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ в) $\int\limits_{0}^{e^{-2}} \frac{dx}{x\ln^3 x}$

9.7. а) $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{\ln x}{x} \cdot dx$ б) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^2} \cdot dx$ в) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-5x}dx$

9.8. а) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2x \cdot dx}{x^2+1}$ в) $\int\limits_{0}^{8} \frac{3x+2}{\sqrt[3]{x}}dx$

9.9. а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$ б) $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x} \cdot \sin x \cdot dx$ в) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{9x^2+1}$

9.10. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{x^3+1}{x^4} \cdot dx$ б) $\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-x^2} \cdot dx$ в) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1-x^2}$

9.11. а) $\int\limits_{0}^{\infty} x \cdot e^{-x^2}dx$ б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2}$ в) $\int\limits_{0}^{\pi/2} ctg\, x\, dx$

9.12. а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$ б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$ в) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^3}}$

9.13. а) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$ б) $\int\limits_{-3}^{2} \frac{dx}{(x+3)^2}$ в) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$

9.14. а) $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x}$ б) $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{(x-2)^2}$ в) $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$

9.15. а) $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$ б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$ в) $\int\limits_{-\pi/2}^{0} tg\, x\, dx$

БГАРФ

9.16. а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$ б) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x^2}dx$ в) $\int\limits_{1}^{2} \frac{xdx}{x-1}$

9.17. а) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^5}}$ б) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x\cdot\ln x}$ в) $\int\limits_{4}^{5} \frac{dx}{(x-4)^2}$

9.18. а) $\int\limits_{4}^{\infty} \frac{dx}{x\cdot\ln^3 x}$ б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^3-5x^2}$ в) $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$

9.19. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ б) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{x^2dx}{1+x^6}$ в) $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$

9.20. а) $\int\limits_{2}^{3} \frac{xdx}{\sqrt{\left(x^2-4\right)^3}}$ б) $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^5dx}{\sqrt{4-x^2}}$ в) $\int\limits_{-3}^{5} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+3}}$

9.21. а) $\int\limits_{0}^{1} \ln x\cdot dx$ б) $\int\limits_{-\infty}^{0} x\cdot e^x\cdot dx$ в) $\int\limits_{14}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x+2}}$

9.22. а) $\int\limits_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$ б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$ в) $\int\limits_{-5}^{-4} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+5)^4}}$

9.23. а) $\int\limits_{2}^{3} \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^2-4}}$ б) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$ в) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{4x^2+1}$

9.24. а) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2-1}$ б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ в) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^3}}$

9.25. а) $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ б) $\int\limits_{1/2}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ в) $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx$

БГАРФ

Задача 10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

10.1. $y = 6x - x^2$, осью OX

10.2. $y = x^2 + 1, \quad x + y = 3$

10.3. $y = 0, \quad y = (x+1)^2, \quad y = 4 - x$

10.4. $y^2 = 2x + 1, \quad x - y - 1 = 0$

10.5. $y = 4 - x^2, \quad y^2 = x$, осью OY

10.6. $y = \lg x, \quad x = 10, \quad y = 0$

10.7. $y = -x, \quad y = 2x - x^2$

10.8. $4y = 8x - x^2, \quad 4y = x + 6$

10.9. $y = 4 - x^2, \quad y = x^2 - 2x$

10.10. $y^2 = x, \quad y = x^2$

10.11. $y^2 + 8x = 16, \quad y^2 - 24x = 48$

10.12. $y = x^2, \quad y = \dfrac{x^3}{3}, \quad x = 1$

10.13. $x^2 + y^2 = 8, \quad y = \dfrac{x^2}{2}, \quad x = 0$

10.14. $x^2 + y^2 = 16, \quad y^2 = 6x$

10.15. $y = e^x, \quad y = e^{-x}, \quad x = 1$

10.16. $y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = 0$

10.17. $y = 0, \quad y = 6x - 3x^2, \quad x = 3$

10.18. $y = x^2, \quad y = 1/4x^2, \quad y = 4$

10.19. $y^2 + x - 4 = 0, \quad x = 0, \quad y = 0$

10.20. $xy = 4, \quad y = 0, \quad x = 4$

10.21. $x^2 + y^2 = 8, \quad y = \dfrac{x^2}{2}, \quad x = 0$

10.22. $x^2 + y^2 = 16, \quad y^2 = 6x$

10.23. $y = 4 - x^2, \quad y^2 = x$, осью OY

10.24. $y = \lg x, \quad x = 10, \quad y = 0$

10.25. $4y = 8x - x^2, \quad 4y = x + 6$

Задача 11. Найти общее решение дифференциального уравнения:

11.1. $4x\,dx - 3y\,dy = 3x^2y\,dy - 2xy^2\,dx.$

11.2. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0.$

11.3. $\sqrt{4+y^2}dx - y\,dy = x^2y\,dy.$

11.4. $\sqrt{3+y^2}dx - y\,dy = x^2y\,dy.$

11.5. $6x\,dx - 6y\,dy = 2x^2y\,dy - 3xy^2dx.$

БГАРФ

11.6. $x\sqrt{3+y^2}dx + y\sqrt{2+x^2}dy = 0.$

11.7. $(e^{2x} + 5)\, dy + ye^{2x}\, dx = 0.$

11.8. $6x\, dx - 6y\, dy = 3x^2y\, dy - 2xy^2\, dx.$

11.9. $x\sqrt{5+y^2}dx + y\sqrt{4+x^2}dy = 0.$

11.10. $y\,(4 + e^x)dy - e^x dx = 0.$

11.11. $\sqrt{4-x^2}y' + xy^2 + x = 0.$

11.12. $2x\, dx - 2y\, dy = x^2y\, dy - 2xy^2\, dx.$

11.13. $x\sqrt{4+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}\, dy = 0.$

11.14. $(e^x + 8)\, dy - ye^x\, dx = 0.$

11.15. $\sqrt{5+y^2} + y'y\sqrt{1-x^2} = 0.$

11.16. $6x\, dx - y\, dy = yx^2\, dy - 3xy^2\, dx.$

11.17. $y \ln y + xy' = 0.$

11.18. $(1 + e^x)\, y' = ye^x.$

11.19. $\sqrt{1-x^2}\, y' + xy^2 + x = 0.$

11.20. $6x\, dx - 2y\, dy = 2yx^2\, dy - 3xy^2\, dx.$

11.21. $y\,(1 + \ln y) + xy' = 0.$

11.22. $(3 + e^x)\, yy' = e^x.$

11.23. $\sqrt{3+y^2} + \sqrt{1-x^2}\, yy' = 0.$

11.24. $x\, dx - y\, dy = yx^2\, dy - xy^2\, dx = 0.$

11.25. $\sqrt{5+y^2}\, dx + 4(x^2y + y)\, dy = 0.$

Задача 12. Найти общее решение дифференциального уравнения:

12.1. $(1 + e^x)\, yy' = e^x.$

12.2. $2x\, dx - y\, dy = yx^2\, dy - xy^2 dx.$

12.3. $3\,(x^2y + y)\, dy + \sqrt{2+y^2}dx = 0.$

БГАРФ

12.4. $2x + 2xy^2 + \sqrt{2 - x^2}\, y' = 0.$

12.5. $20x\, dx - 3y\, dy = 3x^2y\, dy - 5xy^2\, dx.$

12.6. $5x\, dx - 8y\, dy = 2x^2y\, dy - xy^2 dx.$

12.7. $2x^2dx - 3y^2dy = 4x^2y^2dy - x^2y\, dy.$

12.8. $\sqrt{1 + y^2}dx - 3y\, dy = 2x^2y\, dy.$

12.9. $\sqrt{4 + y^2}dx - 2y\, dy = 3x^2y\, dy.$

12.10. $(9 + y^2)\, dx - 8y\, dy = x^2y\, dy.$

12.11. $x\sqrt{9 + y^2}dx + y\sqrt{1 + x^2}\, dy = 0.$

12.12. $x\sqrt{16 + y^2}dx + y\sqrt{2 + x^2}\, dy = 0.$

12.13. $3x\, dx - y\, dy = 8x^2y\, dy - xy^2\, dy.$

12.14. $(e^{3x} + 2)\, dy + ye^{3x}\, dx = 0.$

12.15. $x\, dx - 2y\, dy = 6x^2y\, dy - xy^2\, dx.$

12.16. $(e^{6x} + 1)\, dy + ye^{6x}\, dx = 0.$

12.17. $15x\, dx - y\, dy = 3yx^2\, dy - 6xy^2\, dx.$

12.18. $(6 + e^{7x)}\, dy = ye^{7x}dx.$

12.19. $\sqrt{4 + y^2}\, dx + 4(x^2y + y)\, dy = 0.$

12.20. $x\, dx - y\, dy = yx^2dy - xy^2dx.$

12.21. $3x + 6xy^2dx + \sqrt{3 - x^2}dy = 0.$

12.22. $10x\, dx - 3y\, dy = 5x^2y\, dy - 5xy^2dx.$

12.23. $y(5 + e^x)\, dy - e^x\, dx = 0.$

12.24. $x\sqrt{1 + y^2}dx + y\sqrt{9 + x^2}\, dy = 0.$

12.25. $5x\, dx - 2y\, dy = x^2y\, dy - 3xy^2dx.$

Задача 13. Решить уравнение с разделяющимися переменными:

13.1. $(x+1)\, dx + (y-1)\, dy = 0.$

13.2. $y'y = -2e^x \cos y.$

БГАРФ

13.3. $8(x+1)\,dx + (y+1)\,dy = 0.$

13.4. $y' = \frac{2x}{1+x^2}$.

13.5. $(y+4)\,dx + (x-5)\,dy = 0.$

13.6. $y' = \mathrm{tg}x\mathrm{tg}y.$

13.7. $(x+5)\,dx - 4dy = 0.$

13.8. $y' = y\ln y.$

13.9. $(x^2 + 1)\,dx + x^4\,dy = 0.$

13.10. $x\ln^2 x y' = y.$

13.11. $\sqrt{1-x^2}\,dy - 3dx = 0.$

13.12. $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

13.13. $(9+7\cos^3 x)\,dx - \cos^2 x\,dy = 0.$

13.14. $dx - x^2\sqrt{4-y^2}\,dy = 0.$

13.15. $x\,dx - (1-\sqrt{x})^3\,dy = 0.$

13.16. $x\,dy - (y - x\,\mathrm{tg}\frac{x}{y})\,dx = 0.$

13.17. $(x^2 + 1)\,dy - \sqrt{y}\,dx = 0.$

13.18. $\cos\sqrt{x}\,dx - \sqrt{x}\,dy = 0.$

13.19. $(y^2 + 1)\,dx + y(1 + x^2)\,dy = 0.$

13.20. $\sqrt{a^2 - x^2}\,dx - x^2\,dy = 0.$

13.21. $(y^2 - 1)dx + x\,dy = 0.$

13.22. $(x + 2)\,dx - (x^2 - 7)\,dy = 0.$

13.23. $dx - x^2\sqrt{4-y^2}dy = 0.$

13.24. $ye^{2x}\,dx - (1 + e^{2x})\,dy = 0.$

13.25. $\sqrt{y}\,dx - (\sqrt[3]{y^2} - \sqrt{y})\,dy = 0.$

БГАРФ

Задача 14. Найти общее решение дифференциального уравнения:

14.1. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0.$

14.2. $\sqrt{3+y^2}dx - y\,dy = x^2y\,dy.$

14.3. $x\sqrt{4+y^2} + yy'\sqrt{12+x^2} = 0.$

14.4. $\sqrt{4-x^2}y' + xy^2 + x = 0.$

14.5. $\sqrt{5+y^2} + y'y\sqrt{1-x^2} = 0.$

14.6. $y\ln y + xy' = 0.$

14.7. $\sqrt{1-x^2}\,y' + xy^2 + x = 0.$

14.8. $y(1 + \ln y) + xy' = 0.$

14.9. $\sqrt{3+y^2} + \sqrt{1-x^2}\,yy' = 0.$

14.10. $\sqrt{5+y^2}\,dx + 4(x^2y + y)\,dy = 0.$

14.11. $3(x^2y + y)\,dy + \sqrt{2+y^2}dx = 0.$

14.12. $2xy' + y^2 = 1.$

14.13. $x^2y' = y(x + y).$

14.14. $x^2y^2y' + 1 = y.$

14.15. $x^2y' - 2xy = 3y.$

14.16. $y' = \frac{x(1-y^3)}{(1+x^2)y^2}$.

14.17. $(xy^2 + x)\,dx + (y - x^2y)\,dy = 0.$

14.18. $xyy' = 1 - x^2.$

14.19. $yy' = \frac{1-2x}{y}$.

14.20. $y'\operatorname{tg} x - y = a.$

14.21. $xy' + y = y^2.$

14.22. $y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0.$

БГАРФ

14.23. $\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0.$

14.24. $y' = 10^{x+y}.$

14.25. $y' \sin x = y \ln y.$

Задача 15. Найти общее решение дифференциального уравнения:

15.1. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2.$

15.2. $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

15.3. $xy' = \frac{3y^3+2yx^2}{2y^2+x^2}.$

15.4. $xy' = \sqrt{x^2-y^2}.$

15.5. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3.$

15.6. $xy' = \frac{3y^3+4yx^2}{2y^2+2x^2}.$

15.7. $y' = \frac{x+2y}{2x-y}.$

15.8. $xy' = 2\sqrt{x^2+y^2} + y.$

15.9. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4.$

15.10. $xy' = \frac{3y^3+6yx^2}{2y^2+3x^2}.$

15.11. $y' = \frac{x^2+xy-y^2}{x^2-2xy}.$

15.12. $xy' = \sqrt{2x^2+y^2} + y.$

15.13. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6.$

15.14. $xy' = \frac{3y^3+8yx^2}{2y^2+4x^2}.$

15.15. $y' = \frac{x^2+xy-y^2}{x^2-2xy}.$

БГА РФ

15.16. $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y.$

15.17. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8.$

15.18. $xy' = \frac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}.$

15.19. $y' = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}.$

15.20. $xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y.$

15.21. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 12.$

15.22. $xy' = \frac{3y^3 + 12yx^2}{2y^2 + 6x^2}.$

15.23. $y' = \frac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy}.$

15.24. $xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y.$

15.25. $4y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 5.$

Задача 16. Найти решение задачи Коши:

16.1. $y' - y/x = x^2;\ y(1) = 0.$

16.2. $y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x,\ y(\pi/2) = 0.$

16.3. $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x,\ y(0) = 0.$

16.4. $y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x,\ y(\pi/4) = 1/2.$

16.5. $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x,\ y(-1) = 3/2.$

16.6. $y' - \frac{1}{x+1} y = e^x (x + 1),\ y(0) = 1.$

16.7. $y' - \frac{x}{y} = x \sin x,\ y(\pi/2) = 1.$

16.8. $y' + \frac{y}{x} = \sin x,\ y(\pi) = 1/\pi.$

16.9. $y' + \frac{y}{2x} = x^2,\ y(1) = 1.$

БГАРФ

16.10. $y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{2x^2}{1+x^2}$, $y(0) = 2/3$.

16.11. $y' - \frac{2x-5}{x^2} y = 5$, $y(2) = 4$.

16.12. $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} e^x$, $y(1) = e$.

16.13. $y' - \frac{y}{x} = -2\frac{\ln x}{x}$, $y(1) = 1$.

16.14. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}$, $y(1) = 4$.

16.15. $y' + \frac{2}{x} y = x^3$, $y(1) = -5/6$.

16.16. $y' + \frac{y}{x} = 3x$, $y(1) = 1$.

16.17. $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2$, $y(1) = 3$.

16.18. $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1$, $y(1) = 1$.

16.19. $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}$, $y(1) = 1$.

16.20. $y' + 2xy = -2x^3$, $y(1) = e^{-1}$.

16.21. $y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}$, $y(0) = 2/3$.

16.22. $y' + xy = -x^3$, $y(0) = 3$.

16.23. $y' - \frac{2}{x+1} y = e^x (x+1)^2$, $y(0) = 1$.

16.24. $y' + 2xy = xe^{-x^2} \sin x$, $y(0) = 1$.

16.25. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$, $y(0) = 1/2$.

Задача 17. Найти решение задачи Коши:

17.1. $y^2 dx + (x + e^{2/y})dy = 0$, $y|_{x=e} = 2$.

17.2. $(y^4 e^y + 2x)\, y' = y$, $y|_{x=0} = 1$.

17.3. $y^2 dx + (xy - 1)dy = 0$, $y|_{x=1} = e$.

17.4. $2(4y^2 + 4y - x)y' = 1$, $y|_{x=0} = 0$.

17.5. $(\cos 2y \cos^2 y - x)\, y' = \sin y \cos y$, $y|_{x=1/4} = \pi/3$.

БГАРФ

17.6. $(x\cos^2 y - y^2)\,y' = y\cos^2 y,\quad y|_{x=\pi} = \pi/4.$

17.7. $e^{y^2}\,(dx - 2xy\,dy) = y\,dy,\ \ y|_{x=8} = 1.$

17.8. $(104y^3 - x)\,y' = 4y,\ \ y|_{x=8} = 1.$

17.9. $dx + (xy - y^3)\,dy = 0,\ \ y|_{x=-1} = 0.$

17.10. $(3y\cos 2y - 2y^2\sin 2y - 2x)\,y' = y,\ \ y|_{x=16} = \pi/4.$

17.11. $8\,(4y^3 + xy - y)\,y' = 1,\ y|_{x=0} = 0.$

17.12. $(2\ln y - \ln^2 y)\,dy = y\,dx - x\,dy,\quad y|_{x=4} = e^2.$

17.13. $2\,(x + y^4)\,y' = y,\ \ y|_{x=-2} = -1.$

17.14. $y^3\,(y - 1)\,dx + 3xy^2\,(y - 1)\,dy = (y + 2)\,dy,\ \ y|_{x=1/4} = 2.$

17.15. $2y^2dx + (x + e^{1/y})\,dy = 0,\ \ y|_{x=e} = 1.$

17.16. $(xy + \sqrt{y}\,)\,dy + y^2dx = 0,\ \ y|_{x=-1/2} = 4.$

17.17. $\sin 2y\,dx = (\sin^2 2y - 2\sin^2 y + 2x)\,dy,\ \ y|_{x=-1/2} = \pi/4.$

17.18. $(y^2 + 2y - x)\,y' = 1,\ \ y|_{x=2} = 0.$

17.19. $2y\sqrt{y}\,dx - (6x\sqrt{y} + 7)\,dy = 0,\ \ y|_{x=-4} = 1.$

17.20. $dx = (\sin y + 3\cos y + 3x)\,dy,\quad y|_{x=e^{\pi/2}} = \pi/2.$

17.21. $2(\cos^2 y\cdot\cos 2y - x)\,y' = \sin 2y,\ \ y|_{x=3/2} = 5\pi/4.$

17.22. $(13y^3 - x)\,y' = 4y,\ \ y|_{x=5} = 1.$

17.23. $y^2\,(y^2 + 4)\,dx + 2xy\,(y^2 + 4)\,dy = 2dy,\ \ y|_{x=\pi/8} = 2.$

17.24. $(x + \ln^2 y - \ln y)\,y' = y/2,\ \ y|_{x=2} = 1.$

17.25. $2(y^3 - y + xy)\,dy = dx,\ \ y|_{x=-2} = 0.$

Задача 18. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

18.1. $y' - y = e^x.$

18.2. $xy' - 2y = x^3 + x.$

18.3. $y' + y = x.$

18.4. $xy' - y = 2\sin x - x\cos x.$

18.5. $x\ln x\,y' - 4y = 1 - \ln x.$

БГАРФ

18.6. $xy' - y = 2\sin x - x\cos x.$

18.7. $y' - \frac{y}{x} = x^2.$

18.8. $xy' - \frac{y}{x} = x\sin x.$

18.9. $y' - \frac{y}{x} = \ln x.$

18.10. $xy' - y = e^x.$

18.11. $y' + xy = (1+x)e^{-x}y^2.$

18.12. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x}.$

18.13. $xy' + y = x2y^2\ln x.$

18.14. $y'\cos^2 x - y = \mathrm{tg}\,x.$

18.15. $2(xy' + y) = xy^2.$

18.16. $y' - \frac{y}{x\ln x} = x\ln x.$

18.17. $y' + 4x^2y = 4(x^2 + 1)e^{-4x}y.^2$

18.18. $y'\sin x - y\cos x = 1.$

18.19. $xy' - y = (\ln x + 2)\ln x\, y^2.$

18.20. $y' - y\,\mathrm{tg}x = \cos x.$

18.21. $xy' - y = -x^2y^2.$

18.22. $y' - 2xy = 3x^2 - 2x^4.$

18.23. $xy' + y = \ln x\, y^2.$

18.24. $xy' - 2y = 2x^4.$

18.25. $y' + y\cos x = e^{-\sin x}.$

Задача 19. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

19.1. $y''x\ln x = y'.$

19.2. $2xy'' = y'.$

19.3. $\mathrm{tg}x\, y'' - y' + \frac{1}{x} = 0.$

19.4. $y''\mathrm{ctg}2x + 2y' = 0.$

БГАРФ

19.5. $\mathrm{tg}x\, y'' = 2y'$.

19.6. $x^4y'' + x^2y' = 1$.

19.7. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3$.

19.8. $xy'' - y' + \frac{1}{x} = 0$.

19.9. $xy'' + y' = 1$.

19.10. $xy'' + y' = x + 1$.

19.11. $x^2y'' + xy' = 1$.

19.12. $y''\mathrm{ctg}x = 2y'$.

19.13. $xy'' + 2y' = 0$.

19.14. $x^3y'' + x^4y' = 1$.

19.15. $xy'' + y' + x = 0$.

19.16. $\mathrm{tg}x\, y'' = y'$.

19.17. $y''\mathrm{tg}x = y' + 1$.

19.18. $y''\mathrm{tg}7x = 7y'$.

19.19. $(1 + \sin x)y'' = \cos x \cdot y'$.

19.20. $-xy'' + 2y' = \frac{2}{x^2}$.

19.21. $x^4y'' + x^3y' = 4$.

19.22. $(1 + x^2)\, y'' + 2xy' = 12x^3$.

19.23. $xy'' + y' = \sqrt{x}$.

19.24. $y''\,\mathrm{tg}\, 5x = 5y'$.

19.25. $x^3y'' + x^2y' = \sqrt{x}$.

Задача 20. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

20.1. $y'' = y'e^y$.

20.2. $y''\mathrm{tg}y = 2(y')^2$.

20.3. $y \cdot y'' - (y')^2 = y^4$.

20.4. $y \cdot y'' - 2(y')^2 = 0$.

20.5. $xy'' - y' = 4x$.

20.6. $xy'' + y' = -x$.

20.7. $y'' - \frac{2y'}{x} = -\frac{3}{x^2}$.

20.8. $xy'' - y' - 5x = 0.$

20.9. $y''(1 + y) = 5(y')^2.$

20.10. $y'' + y\cdot(y')^3 = 0.$

20.11. $y''y^3 + 64 = 0.$

20.12. $y'' + 48\sin y \cos^3 y = 0.$

20.13. $y^3y'' = y^4 - 16.$

20.14. $y''\sqrt{y} - y' = 0.$

20.15. $y''(1 + y) = (y')^2 + y'.$

20.16. $y''(2y + 3) - 2(y')^2 = 0.$

20.17. $y'' + 50\sin y \cos^3 y = 0.$

20.18. $4y^3y'' + 16 = y^4.$

20.19. $y''\cos x + y'\sin x = 1.$

20.20. $y'' = y'^2.$

20.21. $x^2y'' - 2xy' = -3.$

20.22. $y'' = 1 + y'^2.$

20.23. $y''x + y' = -x.$

20.24. $y'' + 2y' + y'^2 + 1 = 0.$

20.25. $y'' - y' = e^x.$

Задача 20. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

20.1. $y'' + 3y' + 2y = 0.$

20.2. $y'' - y' = 0.$

20.3. $y'' + 3y' = 0.$

20.4. $y'' + 2y' + 2y = 0.$

20.5. $3y'' + y' = 0.$

20.6. $y'' + y'/3 = 0.$

20.7. $7y'' - y' = 0.$

20.8. $y'' - 2y + 3y = 0.$

20.9. $y'' + 3y' + 3y = 0.$

20.10. $y'' + 12y' = 0.$

20.11. $y''+ ey' = 0.$

БГАРФ

20.12. $y'' - 13y' = 0.$

20.13. $5y'' - 5y' = 0.$

20.14. $10y'' - y' + 10y = 0.$

20.15. $3/2\, y'' - 2y' = 0.$

20.16. $4y'' + 4y' + 1y = 0.$

20.17. $2y'' + 4y' + 2y = 0.$

20.18. $y'' - 14y' + 49y = 0.$

20.19. $2y'' - 9y = 0.$

20.20. $y'' + y' = 0.$

20.21. $5y'' + 4y' + 3 = 0.$

20.22. $y'' + 20y' = 0.$

20.23. $y'' - 4y' + 10 = 0.$

20.24. $y'' + 10y' + 12 = 0.$

20.25. $y'' - 1 = 0.$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баврин, И.И. Высшая математика [Текст]: учебник для студентов высших учебных заведений / И.И. Баврин, В.Л. Матросов. – М.: Владос, 2002. – 400 с.: рис., табл., чертеж. – (Учебник для вузов). – ISBN 5-691-00372-0. (77 экз.).

2. Сборник задач по математике для втузов [Текст] / ред.: А.В. Ефимов, Б.П. Демидович. – Ч.2: Специальные разделы математического анализа. – М.: Наука, 1986. – 368 с. (182 экз.).

3. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления [Текст]: учебное пособие / Н.С. Пискунов. – Т.1. – 12-е изд., стер. – М.: Наука, 1976. – 456 с. (32 экз.)

4. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. В 2 т. – Т.2 [Текст]: учеб. пособие для втузов / Н.С. Пискунов. – 11-е изд., стер. – М.: Наука, 1978. – 576 с. (70 экз.).

5. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. [Текст]: учебное пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – 6-е изд. – Ч.2. – М.: ОНИКС 21 век: Мир и образование, 2003. – 416 с.: ил. – Библиогр.: с. 416. – ISBN 5-329-00327-X. – ISBN 5-94666-009-8: 80. (46 экз.).

БГАРФ

978980002214

Елена Александровна Мажаева

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Часть 2

Учебное пособие
для курсантов направления подготовки
16.03.03 «Холодильная, криогенная техника
и системы жизнеобеспечения»

Ведущий редактор М.Б. Априянц
Младший редактор Г.В. Деркач

Компьютерное редактирование
О.В. Савина

Подписано в печать 06.03.2020 г.
Усл. печ. л. 4,9. Уч.-изд. л. 4,9.

Лицензия № 021350 от 28.06.99.

Печать офсетная.

Формат 60x90/16.

Заказ № 1567. Тираж 50 экз.

Доступ к архиву публикации и условия доступа к нему:
http://lib.bgarf.ru/

БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»

Издательство БГАРФ,
член Издательско-полиграфической ассоциации высших учебных заведений
236029, Калининград, ул. Молодежная, 6.

БГАРФ