Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Н. А. Елисеева

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ МАТРИЦ

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины
для студентов по направлению подготовки
09.03.01 – Информатика и вычислительная техника

Калининград
Издательство ФГБОУ ВО «КГТУ»
2023

Рецензент:
кандидат физико-математических наук, исполняющий обязанности заведующего кафедрой прикладной математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет»
Алексей Иванович Руденко

Елисеева, Н. А. Линейная алгебра и теория матриц : учебно-методическое пособие по изучению дисциплины для студентов по направлению подготовки 09.03.01 – Информатика и вычислительная техника / **Н. А. Елисеева**. – Калининград : Изд-во ФГБОУ ВО «КГТУ», 2023. – 17 с.

В учебно-методическом пособии приведен тематический план изучения дисциплины. Представлены методические указания по изучению дисциплины. Даны рекомендации по подготовке к промежуточной аттестации и по выполнению самостоятельной работы. Пособие подготовлено в соответствии с требованиями утвержденной рабочей программы физико-математического модуля по дисциплине «Линейная алгебра и теория матриц» направления подготовки 09.03.01 – Информатика и вычислительная техника.

Табл. 1, рис. 2, список лит. – 9 наименований.

Учебно-методическое пособие рассмотрено и одобрено в качестве локального электронного методического материала на заседании кафедры прикладной математики и информационных технологий Института цифровых технологий ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет» 26.01.2023, протокол № 13.

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины рекомендовано к использованию в учебном процессе в качестве локального электронного методического материала методической комиссией ИЦТ от 17.02.2023, протокол № 1.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов направления подготовки 09.03.01 – Информатика и вычислительная техника, изучающих дисциплину «Линейная алгебра и теория матриц».

Целью освоения дисциплины «Линейная алгебра и теория матриц» является формирование у студентов знаний, умений и навыков анализа, моделирования и решения теоретических и практических задач с широким использованием основных законов и методов алгебры и геометрии; формирование у студентов способности использования основ математики в части линейной алгебры и теории матриц в профессиональной деятельности.

В результате освоения дисциплины студент должен:

- знать основные понятия и теоремы теории матриц и определителей; методы решения систем линейных уравнений; методы векторной алгебры; простейшие приложения алгебры в профессиональных дисциплинах;

- уметь выполнять действия над матрицами (сумма, разность, произведение, транспонирование); вычислять ранг матрицы, определитель матрицы; находить матрицу, обратную заданной; применять методы теории матриц и определителей для решения экономических задач; решать системы линейных уравнений; применять методы линейной алгебры к решению прикладных задач; вычислять собственные значения и собственные векторы линейного оператора; переводить на математический язык простейшие проблемы, поставленные в терминах других предметных областей; приобретать новые математические знания, используя образовательные и информационные технологии;

- владеть навыками решения задач линейной алгебры; математической логикой, необходимой для формирования суждений по соответствующим профессиональным, социальным, научным и этическим проблемам; обладать математическим мышлением, математической культурой, как частью профессиональной и общечеловеческой культуры; умением читать и анализировать учебную и научную математическую литературу.

При изучении дисциплины «Линейная алгебра и теория матриц» используются знания, умения и навыки довузовской подготовки по математике (умение проводить алгебраические преобразования, решать уравнения и неравенства, знание основных тригонометрических формул, умение проводить тригонометрические преобразования и решать тригонометрические уравнения и неравенства, понимание функции, графика функции и основных ее свойств, знание графиков и свойств основных элементарных функций), а также знания, умения и навыки, получаемые студентами при параллельном освоении дисциплины «Математический анализ».

В предлагаемом пособии представлен тематический план, содержащий перечень изучаемых тем, обязательных практических занятий, мероприятий текущей аттестации и отводимое на них аудиторное время (занятия в соответствии с расписанием) и самостоятельную работу. При формировании личного образовательного плана на семестр обучающемуся следует оценивать рекомендуемое время на изучение дисциплины и возможность больших временных затрат на выполнение отдельных заданий или проработку отдельных тем.

В разделе «Содержание дисциплины» приведены подробные сведения о вопросах, рассматриваемых в данном курсе. Представлены методические рекомендации преподавателя для самостоятельной работы студента. Каждая тема включает ссылку на литературу (или иной информационный ресурс), а также контрольные вопросы для самопроверки.

Раздел «Текущая аттестация» содержит описание обязательных мероприятий, контроля, самостоятельной работы и усвоения разделов или отдельных тем дисциплины. Изложены требования к промежуточной аттестации по дисциплине – дифференцированному зачету.

Помимо данного пособия, студентам следует использовать материалы, размещенные в соответствующем данной дисциплине разделе ЭИОС [6], в которые более оперативно вносятся изменения для адаптации дисциплины под конкретную группу.

1. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

1.1. Тематический план для студентов очной формы обучения

Форма промежуточной аттестации по дисциплине для очной формы обучения – дифференцированный зачет (1 семестр).

Таблица 1. Тематический план для очной формы обучения

№	**Раздел дисциплины**	**Темы лекций и практических занятий**	**Объем аудиторной работы, ч**		**Объем самостоятельной работы, ч**
			Л	**ПЗ**	
1	2	3	4	5	6
1	Матричная алгебра и системы линейных уравнений	**Лекция 1.** Матрицы. Виды матриц. Операции над матрицами: сложение, умножение на число, произведение матриц, транспонирование. Свойства операций. Теоретический материал и примеры решения задач	2	-	4

Продолжение таблицы 1

1	2	3	4	5	6
		Практическое занятие 1. Понятие определителя 1-го, 2-го, 3-го порядков. Свойства определителей. Минор и алгебраическое дополнение элемента определителя. Теорема о разложении определителя по элементам строки (столбца). Краткий теоретический материал и решение задач	-	2	4
		Практическое занятие 2. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Крамера (поиск единственного решения). Краткий теоретический материал и решение задач	-	2	4
		Лекция 2. Обратная матрица. Условие существования обратной матрицы. Правило нахождения обратной матрицы. Свойства обратных матриц. Простейшие матричные уравнения и их решения. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом обратной матрицы (поиск единственного решения). Теоретический материал и примеры решения задач	2	-	4
		Практическое занятие 3. Ранг матрицы. Элементарные преобразования над строками матриц. Нахождение ранга матрицы при помощи элементарных преобразований. Совместная (несовместная), определенная (неопределенная), однородная системы линейных уравнений. Критерий совместности систем линейных уравнений. Теоремы о количестве решений совместной системы. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений. Краткий теоретический материал и решение задач	-	2	4
		Практическое занятие 4. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений. Решение однородных систем, фундаментальный набор решений. Краткий теоретический материал и решение задач	-	2	4
2	Векторная алгебра	**Лекция 3.** Векторные линейные пространства. Вектор в n-мерном пространстве. Линейная зависимость и независимость векторов. Теоретический материал и примеры решения задач	2	-	4

Продолжение таблицы 1

1	2	3	4	5	6
		Практическое занятие 5. *Контрольная работа по темам раздела 1*	-	2	4
		Практическое занятие 6. Размерность и базис векторного пространства. Переход к новому базису. Краткий теоретический материал и решение задач	-	2	4
		Лекция 4. Линейные операторы. Собственные числа и векторы линейного оператора. Теоретический материал и примеры решения задач	1	-	2
		Практическое занятие 7. Линейные операторы. Собственные числа и векторы линейного оператора. Решение задач	-	1	2
		Практическое занятие 8. *Коллоквиум по темам дисциплины*	-	2	7,4
		ИТОГО	**7**	**15**	**47,4**
		Рубежный (текущий) и итоговый контроль			
	Матричная алгебра и системы линейных уравнений	Контрольная работа	2		-
		Итоговый контроль (дифференцированный зачет)	2		-
		ИТОГО	4		-

1.2. Тематический план для студентов заочной формы обучения

Заочная форма обучения не предусмотрена.

2. СОДЕРЖАНИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Структура дисциплины представлена двумя тематическими разделами.

Раздел 1. Матричная алгебра и системы линейных уравнений

Тема 1.1. Матрицы и действия над ними. Определители

Перечень изучаемых вопросов:

Понятие матрицы. Виды матриц. Операции над матрицами: сложение, умножение на число, произведение матриц, транспонирование. Свойства операций. Понятие определителя 1-го, 2-го, 3-го порядков. Свойства определителей. Минор и алгебраическое дополнение элемента определителя. Теорема о разложении определителя по элементам строки (столбца).

Методические указания:

Матричный язык широко используется в различных областях современной математики и ее приложениях. Понятие матрицы тесно связано с исследованием и решением систем линейных уравнений. Матрицы применяются в программировании, 3D-моделировании, анализе данных, теории графов, теории вероятностей, статистике, экономике, механике, теоретической электротехнике и многих других областях.

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Например,

$A = \begin{pmatrix} 1 & 14 & 0 & 32 \\ 4 & 8 & 7 & 1 \\ 12 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ – прямоугольная матрица размера 3×4;

$B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 12 \\ 4 & 0 & 11 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ – квадратная матрица размера 3×3;

$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$ – матрица-столбец или вектор;

$D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ – матрица-строка или вектор.

Рассмотрим несколько примеров, где возникают матрицы и используется матричный аппарат для решения задач. Сразу оговоримся, что для облегчения понимания и изучения ограничимся лишь малыми размерами матриц. В реальных ситуациях размеры матриц большие.

1. Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} 12x_1 - 9x_2 + 15x_3 = 18, \\ 17x_1 + 18x_2 - 7x_3 = 28, \\ -5x_1 + 16x_2 + 18x_3 = 29. \end{cases}$$

В курсе будет показано, что данную систему можно записать в виде матричного уравнения $AX = B$, где A, X, B – это матрицы вида:

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -9 & 15 \\ 17 & 18 & -7 \\ -5 & 16 & 18 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 18 \\ 28 \\ 29 \end{pmatrix}.$$

Матрица A – это матрица из коэффициентов перед неизвестными, X – матрица-столбец из неизвестных, B – матрица-столбец из свободных членов системы.

В этом случае матричные методы будут использоваться для определения наличия решений у системы линейных уравнений, а также для нахождения этого решения.

2. Матрицы в разработке 3D-приложений. Рассмотрим простейший пример. Как выполнить последовательность преобразований над некоторым объектом, например: сдвиг, поворот, увеличение размера (рис.1)?

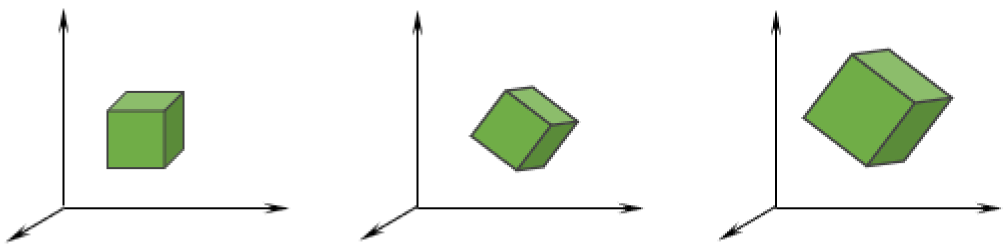

Рис. 1. Преобразования объекта

Для этого надо умножить матрицу, задающую соответствующее преобразование на однородные координаты точки объекта.

$$T(d_x, d_y, d_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ – матрица переноса (сдвига) в 3D.

$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ – матрица масштабирования (увеличения, уменьшения) в 3D.

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ – матрица поворота относительно оси Oz на угол θ в 3D. Необходимый поворот может быть представлен композицией трех поворотов относительно осей Ox, Oy, Oz, заданных соответствующими матрицами.

3. Одним из математических инструментов представления и анализа социальных сетей является ориентированный граф. Пусть в группе из четырех человек (Дима, Оля, Глеб, Настя) выявлена следующая структура общения: Дима выбирает Олю и Глеба, но не Настю; Оля выбирает Глеба, но не Диму и не Настю; Глеб общается со всеми; Настя выбирает только Глеба. Ориентированный граф в этом случае будет иметь вид (рис. 2).

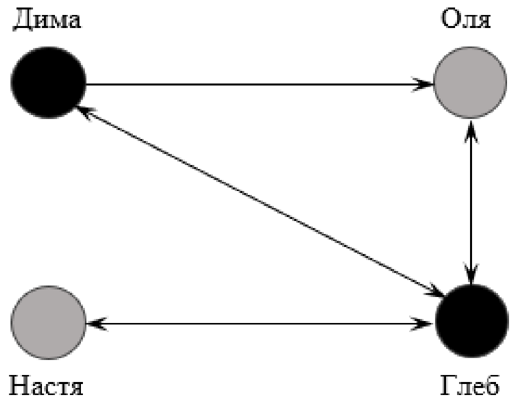

Рис. 2. Ориентированный граф структуры общения в группе

Для представления графа в компьютерных программах, в случае, когда он неразрежен и имеет большое число ребер, используют матрицу смежности. Матрица смежности является одной из структур данных, это программная единица, позволяющая хранить и обрабатывать однотипные данные.

Матрица смежности для графа на рис. 2 имеет вид:

	Дима	**Оля**	**Глеб**	**Настя**
Дима	0	1	1	0
Оля	0	0	1	0
Глеб	1	1	0	1
Настя	0	0	1	0

Здесь данные бинарного выбора представлены нулями и единицами, указывающими на наличие или отсутствие каждой логически возможной связи между парами субъектов.

С понятием матрицы тесно связано понятие определителя – числовой характеристики матрицы. Понятие определителя вводится для квадратных матриц. Определители применяются при решении систем линейных уравнений, нахождении обратной матрицы, вычислении векторного и смешанного произведения векторов, задании плоскости и т. д.

При изучении темы 1.1 студент должен усвоить понятие матрицы и научиться выполнять действия над ними. Важно запомнить правила вычисления определителей 2-го и 3-го порядков, для наглядности приведены правила треугольников и Саррюса. Следует внимательно изучить и уметь применять свойства определителей, позволяющие упрощать вычисления. С помощью свойств и теоремы о разложении определителя по элементам строки (столбца) студент должен научиться вычислять определители четвертого порядка и понимать, что данный способ является универсальным для нахождения определителя любого порядка.

Изучение темы не требует предварительных знаний, достаточно уметь выполнять арифметические операции над действительными числами.

Контрольные вопросы:

1. Что такое матрица? Как выглядит краткая форма записи матрицы? Какие виды матриц вы знаете?
2. Перечислите операции над матрицами.
3. Как найти сумму матриц? Какими свойствами обладает эта операция?
4. Как найти произведение матрицы на число? Какими свойствами обладает эта операция?
5. Как найти произведение матриц? Какие матрицы можно перемножить? Какими свойствами обладает операция умножения матриц?
6. Что такое транспонирование матрицы? Какими свойствами обладает эта операция?
7. Дайте понятие определителей 1-го, 2-го и 3-го порядков. Сформулируйте правила треугольников и Саррюса вычисления определителя 3-го порядка.
8. Перечислите основные свойства определителей.
9. Что такое минор и алгебраическое дополнение элемента определителя?
10. Сформулируйте теорему о разложении определителя по элементам строки (столбца).

Рекомендуемая литература по разделу

В предлагаемой литературе [1–3, 7] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу. Материалы практических занятий и задания для самостоятельного решения изложены в [9], раздел 1, параграфы 1.1 и 1.2.

Тема 1.2. Обратная матрица. Ранг матрицы

Перечень изучаемых вопросов:

Понятие обратной матрицы. Условие существования обратной матрицы. Правило нахождения обратной матрицы. Свойства обратных матриц. Простейшие матричные уравнения и их решения. Минор матрицы. Ранг матрицы. Элементарные преобразования над строками матриц. Нахождение ранга матрицы при помощи элементарных преобразований.

Методические указания:

Для успешного изучения темы следует повторить материал предыдущего занятия, а именно: вычисление определителей, нахождение алгебраического дополнения элемента определителя, виды матриц, операции умножения матриц и ее свойства, транспонирования матриц.

Студент должен обратить внимание, что обратные матрицы можно находить только для невырожденных матриц. Следует выучить формулу нахождения обратной матрицы и уметь правильно ее применять. С помощью обратной матрицы обучающийся должен отработать методику решения простейших матричных уравнений.

Изучение темы ранга матрицы начинается с понятия минора матрицы, не следует путать с понятием минора элемента определителя матрицы. Нужно выучить определение ранга матрицы и понимать его свойства. Студент должен освоить метод вычисления ранга матрицы с помощью элементарных преобразований. Это позволит в дальнейшем исследовать системы линейных уравнений.

Контрольные вопросы:

1. Определение невырожденной матрицы.
2. Определение обратной матрицы.
3. Условие существования обратной матрицы.
4. Формула для нахождения обратной матрицы.
5. Свойства обратных матриц.
6. Простейшие матричные уравнения и их решения.
7. Определение минора матрицы.
8. Определение ранга матрицы, свойства ранга матрицы.
9. Определение базисного минора матрицы.
10. Нахождение ранга матрицы методом окаймляющих миноров.
11. Определение элементарных преобразований над строками (столбцами) матрицы.
12. Нахождение ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.

Рекомендуемая литература по разделу

В предлагаемой литературе [1–3, 7] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу. Материалы практических занятий и задания для самостоятельного решения изложены в [9], раздел 1, параграфы 1.3 и 1.4.

Тема 1.3. Решение систем линейных уравнений

Перечень изучаемых вопросов:

Понятие системы линейных уравнений. Матричная форма записи. Совместная (несовместная), определенная (неопределенная), однородная системы линейных уравнений. Решение системы. Эквивалентные (равносильные) системы. Критерий совместности систем линейных уравнений. Теоремы о количестве решений совместной системы. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера. Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

Методические указания:

Решение систем линейных алгебраических уравнений – одна из классических задач линейной алгебры, во многом определившая ее объекты и методы. Кроме того, системы линейных уравнений и методы их решения играют важную роль во многих прикладных задачах.

При изучении этой темы обучающийся должен освоить перевод системы на матричный язык. Предварительно рекомендуется повторить понятия матрицы, обратной матрицы, действия над матрицами, определение ранга матрицы, способ нахождения ранга матрицы с помощью элементарных преобразований. Для исследования систем на совместность студент должен изучить критерий совместности (теорему Кронекера – Капелли).

Системы линейных уравнений, у которых количество уравнений совпадает с количеством неизвестных и определитель основной матрицы системы отличен от нуля, являются определенными. Студент должен научиться решать их методами Крамера и обратной матрицы. Для решения системы методом Крамера обучающемуся следует повторить вычисление определителей. Для матричного метода нужно вспомнить изученный ранее алгоритм решения матричного уравнения.

Для практического решения систем с большим числом уравнений и неизвестных методы обратной матрицы и Крамера неудобны. В случае же когда число уравнений в системе не совпадает с количеством неизвестных, эти методы применять нельзя. Универсальным способом решения систем линейных уравнений является метод Гаусса, в основе которого лежит принцип последовательного исключения неизвестных. Большинству первокурсников хорошо знаком этот метод для решения систем линейных уравнений 2-го порядка. Цель занятия заключается в освоении матричной реализации этого метода на примере систем произвольного числа уравнений с произвольным количеством неизвестных. Студенту следует обратить внимание, что алгоритм преобразования матрицы в трапециевидную совпадает с первым этапом алгоритма метода Гаусса. В рамках этого занятия обучающийся должен освоить вторую часть алгоритма метода Гаусса и уметь правильно записывать общее решение системы. В заключение рассматривается реализация метода Гаусса на примере однородных систем. Студент должен понимать особенности использования метода для однородных систем и уметь находить фундаментальный набор (систему) решений.

Контрольные вопросы:

1. Понятие системы линейных уравнений, краткая форма записи.
2. Основная, расширенная матрицы системы и столбец свободных членов.
3. Матричная форма записи системы линейных уравнений.
4. Определения совместной (несовместной), определенной (неопределенной), однородной системы линейных уравнений.
5. Решение системы. Эквивалентные (равносильные) системы.
6. Критерий совместности системы линейных уравнений.
7. Теоремы о количестве решений совместной системы.
8. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.
9. Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы.
10. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
11. Метод Гаусса решения однородных систем линейных уравнений.
12. Фундаментальный набор (система) решений.

Рекомендуемая литература по разделу:

В предлагаемой литературе [1–3, 7] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу. Материалы практических занятий и задания для самостоятельного решения изложены в [9], раздел 1, параграфы 1.5–1.7.

Раздел 2. Векторная алгебра

Тема 2. Линейные векторные пространства

Перечень изучаемых вопросов:

Понятие линейного векторного пространства, примеры. Вектор в n-мерном пространстве. Линейная зависимость и независимость векторов. Размерность и базис векторного пространства. Переход к новому базису. Линейные операторы. Собственные числа и векторы линейного оператора.

Методические указания:

В данной теме вектор вводится аксиоматически, как элемент векторного (линейного) пространства. Свойства векторов и операций над ними описываются системой аксиом векторного пространства. Линейное пространство обобщает понятие пространства векторов на плоскости или в трехмерном пространстве и действия над ними. Студент должен владеть понятиями: линейное пространство, подпространство; линейно-зависимая и линейно-независимая система векторов; базис пространства; евклидово пространство; линейный оператор, собственные числа и векторы линейного оператора.

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте определение линейного пространства.
2. Что такое n-мерный вектор? Перечислите линейные операции с n мерными векторами.
3. Что такое линейная комбинация векторов?
4. Сформулируйте определение линейной зависимости и независимости векторов.
5. Перечислите свойства линейно зависимых векторов.
6. Как на практике определить линейную зависимость (независимость) векторов? Сформулируйте соответствующие теоремы.
7. Что такое размерность векторного пространства?
8. Что такое базис векторного пространства?
9. Сформулируйте теорему о разложении вектора по базису. Что такое координаты вектора?
10. Сформулируйте понятие линейного оператора. Что такое матрица линейного оператора?
11. Что такое собственный вектор и собственное число линейного оператора?
12. Как найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора?

Рекомендуемая литература по разделу

В предлагаемой литературе [1–3, 7] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

3. ТРЕБОВАНИЯ К АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

3.1. Текущая аттестация

В ходе изучения дисциплины студентам предстоит пройти следующие этапы текущей аттестации:

– выполнить задания по темам практических занятий;

– выполнить контрольную работу по разделу «Матричная алгебра и системы линейных уравнений»;

– выполнить и защитить индивидуальное домашнее задание по теме «Матричная алгебра и системы линейных уравнений»;

– сдать коллоквиум по темам дисциплины.

3.2. Условия получения положительной оценки

Промежуточная аттестация по дисциплине (первый семестр) проводится в форме дифференцированного зачета, который выставляется по результатам прохождения всех видов текущего контроля успеваемости.

Для получения зачета по дисциплине студент должен:

- выполнить более 60 % задач из каждого домашнего задания (по всем разделам дисциплины);
- выполнить контрольную работу;
- выполнить и защитить индивидуальное домашнее задание;
- успешно сдать коллоквиум.

Образцы типовых тестов, индивидуальных заданий и вариантов контрольных работ приведены в ФОС по дисциплине.

ЛИТЕРАТУРА

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Электронный ресурс]: учебник / Д. В. Беклемишев. – 12-е изд., испр. – Москва: Физматлит, 2009. – 309 с. (ЭБС «Университетская библиотека онлайн»).

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

2. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учеб. / Д. В. Беклемишев. – 10-е изд., испр. – Москва: Физматлит, 2004. – 304 с.

3. Бугров, Я. С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: учеб. / Я. С. Бугров; авт. Никольский, С. М. - 3-е изд., испр. и доп. – Москва: Наука, 1988. – 222 с.

4. Гусак, А. А. Пособие к решению задач по высшей математике / А. А. Гусак. – 3-е изд., стереотип. – Минск: БГУ, 1973. – 529 с.

5. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике: Типовые расчеты: учеб. пособие / Л. А. Кузнецов. – Изд. 11-е, стер. – Санкт-Петербург

[и др.]: Лань, 2008. – 238 с.

6. ЭИОС ФГБОУ ВО «КГТУ». 09.03.01 Информатика и вычислительная техника / ВТ Линейная алгебра и теория матриц [Электронный ресурс]. – URL: https://eios.klgtu.ru/course/view.php?id=8013.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ ПОСОБИЯ

7. Вялова, А. В. Матрицы и системы линейных уравнений: учеб. пособие для студ. вузов техн. спец./ А. В. Вялова. – Калининград: ФГОУ ВПО «КГТУ», 2009. – 63 с.

8. Вялова, А. В. Элементы векторной алгебры: учеб. - метод. пособие по дисциплине «Алгебра и аналитическая геометрия» для студентов вузов техн. спец. / А. В. Вялова; ФГОУ ВПО «КГТУ». – Калининград: ФГОУ ВПО «КГТУ», 2011. – 70 с.

9. Вялова, А. В. Алгебра и геометрия: учеб.-метод. пособие по практическим занятиям / А. В. Вялова, Н. А. Елисеева, Т. В. Ермакова. – Калининград: Издательство ФГБОУ ВО «КГТУ», 2021. – 188 с.

Локальный электронный методический материал

Наталья Александровна Елисеева

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ МАТРИЦ

Редактор М. А. Дмитриева

Уч.-изд. л. 0,7. Печ. л. 1,1

Издательство федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Калининградский государственный технический университет».
236022, Калининград, Советский проспект, 1.