Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Калининградский государственный технический университет»

А. Б. Тристанов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины
для студентов, обучающихся по направлению подготовки
19.03.03 Продукты питания животного происхождения

Калининград
Издательство ФГБОУ ВО «КГТУ»
2023

УДК 519.6

Рецензент
кандидат физико-математических наук, исполняющий обязанности заведующего кафедрой прикладной математики и информационных технологий института цифровых технологий ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет» А. И. Руденко

Тристанов, А. Б.

Математическое моделирование: учебно-методическое пособие по изучению дисциплины для студентов, обучающихся по направлению подготовки специальности 19.03.03 Продукты питания животного происхождения / А. Б. Тристанов. – Калининград: Изд-во ФГБОУ ВО «КГТУ», 2023. – 28с.

В учебно-методическом пособии приведены цели и задачи изучения дисциплины, тематическое содержание дисциплины. Представлены методические указания по изучению дисциплины. Даны рекомендации по подготовке к промежуточной аттестации, приведены критерии оценивание текущей работы студентов. Пособие подготовлено в соответствии с требованиями утвержденной рабочей программы математического и естественно – научного модуля по дисциплине «Математическое моделирование» по направлению подготовки 19.03.03 Продукты питания животного происхождения.

Список лит. – 12 наименований

Учебно-методическое пособие рассмотрено и одобрено в качестве локального электронного методического материала на заседании кафедры прикладной математики и информационных технологий института цифровых технологий ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет» 24.05.2023 г., протокол № 5

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины рекомендовано к использованию в учебном процессе в качестве локального электронного методического материала методической комиссией ИЦТ от 01.06.2023 г., протокол № 6

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины рекомендовано к использованию в учебном процессе в качестве локального электронного методического материала методической комиссией ИАПС от 30.10.2023 г., протокол № 8.

УДК 519.6

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Калининградский государственный технический университет», 2023г.
© Тристанов. А. Б., 2023г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 4
1. Цели и задачи изучения дисциплины 4
2. Общие указания по изучению дисциплины 6
3. Тематическое содержание и методические указания по изучению дисциплины 8
Тема 1. Теория моделирования и основы системного анализа 8
Тема 2. Оптимальное распределение ресурсов 9
Тема 3. Теория вычислительного эксперимента 11
Тема 4. Основы стохастического моделирования 13
Тема 5. Имитационное моделирование систем массового обслуживания 14
4. Задание и методические указания по выполнению контрольной работы 17
5. Требования к аттестации по дисциплине 178
Список литературы 19
Приложение 21

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие предназначено для изучения студентами очной и заочной формы основ математического моделирования и соответствуют требованиям, предъявляемым к формируемым компетенциям, знаниям, умениям и навыкам в области применения математического аппарата в профессиональной области, определенными Федеральными государственными образовательными стандартами высшего образования.

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью изучения дисциплины «Математическое моделирование» является освоение основных принципов математического моделирования объектов, процессов и явлений в технических системах, а также решение профессиональных задач в соответствии с общими целями ООП ВО.

Задачами дисциплины является формирование отдельных элементов общепрофессиональных компетенций, среди них:

– способность грамотно использовать основные термины и понятия в сфере математического и компьютерного моделирования, постановки вычислительного эксперимента;

– способность применять естественнонаучные законы при построение математических моделей;

– способность формулировать технические задачи в виде, удобном для их решения математическими методами;

– способность выбирать наиболее эффективные пути построения адекватной математической модели исследуемого процесса

– способность к интерпретации математических моделей и результатов моделирования;

– понимание сущности и этапов математического моделирования;

– способность использовать пакеты математических программ для решения задач математического (компьютерного) моделирования.

В результате изучения дисциплины студент должен:

знать:

– базовые понятия математического (компьютерного) моделирование и постановки вычислительного эксперимента;

– классификацию, свойства, этапы построения математических моделей;

– основные пакеты прикладных программ для решения задач математического (компьютерного) моделирования;

уметь:

– применять естественнонаучные законы при построение математических моделей;

– планировать постановку вычислительного эксперимента;

– формулировать технические задачи в виде, удобном для их решения математическими методами;

– выбирать наиболее эффективные пути построения адекватной математической модели исследуемого процесса.

– интерпретировать результаты моделирования;

владеть:

– навыками составления моделей и алгоритмов их исследования;

– навыками использования математических методов и современной вычислительной техники в целях моделирования.

2. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Методические указания являются частью учебно-методического комплекса по дисциплине «Математическое моделирование» и включают основные сведения о содержании дисциплины, а также рекомендации по самостоятельному изучению дисциплины.

Дисциплина «Математическое моделирование» изучается на втором курсе обучения и носит фундаментальный характер. Знания, полученные при освоении данной дисциплины, будут использоваться как в дальнейшей учебной, так и в будущей профессиональной деятельности. В ходе занятий формируются отдельные части общепрофессиональных компетенций, указанных в рабочей программе математического и естественно-научного модуля.

При изучении дисциплины используются знания, аккумулированные при изучении других дисциплин математического и естественно-научного модуля, и закладываются основы для применения математического моделирования в профессиональной деятельности. Следует отметить, что в дисциплине не рассматриваются сложные узкоспециализированные модели, в первую очередь изучаются основы математического моделирования как связующего звена между математикой и ее инженерными приложениями.

Изучение некоторых разделов данной дисциплины может вызвать определенные трудности, так как изучение дисциплины проходит не в отрыве от других дисциплин. В данном случае следует обратиться к учебникам и пособиям по соответствующим разделам математики: линейная алгебра, математическая статистика.

Преподаватель на первой лекции по изучению дисциплины обращает внимание на обязательные и дополнительные разделы дисциплины. Изучение дополнительных разделов не является обязательным в том случае, если преподаватель не указал иное. Тем не менее, рассмотреть и освоить эти разделы можно самостоятельно.

При изучении теоретического материала студенту следует руководствоваться настоящими методическими указаниями, в которых изложено содержание каждой темы, с составлением подробного конспекта. Каждая тема содержит список контрольных вопросов, ответы на которые следует дать, проверив, достаточно ли хорошо изучена данная тема. Также для самоконтроля можно обратиться к списку перечисленных выше знаний и умений, подлежащих усвоению. Изучать разделы следует последовательно, как они приведены в методических указаниях.

В случае возникновения сложностей при изучении разделов студенту необходимо обязательно обращаться к преподавателю в дни консультаций.

Заочное обучение характеризуется большой долей самостоятельной работы студента с учебной литературой. Современные тенденции развития информационных технологий позволяют в широкой степени использовать в качестве

источника информации сеть Интернет. Использование данных источников при изучении дисциплины «Математическое моделирование» приветствуются, но следует иметь в виду, что не вся полученная таким образом информация является достоверной. В первую очередь следует обратить внимание на список литературы и интернет-источники, указанные в соответствующем разделе настоящих методических указаний. Данные рекомендации касаются и студентов очного обучения.

Рекомендуемую литературу можно найти в электронной библиотечной системе университета, в списке литературы указаны ссылки на конкретные издания, размещенные в ЭБС «Университетская библиотека online».

В ЭИОС университета студенты получают дополнительные материалы и рекомендации, а также фиксируют сдачу рубежного контроля, проходят тесты и пр. Использование ЭИОС во многих вопросах является обязательным, поэтому о доступе к системе студентам следует позаботиться заранее до начала курса, связавшись при необходимости со студенческим офисом своего института. Особенно это касается студентов заочной формы обучения.

Контроль самостоятельной работы для студентов очного обучения заключается в прохождении рубежного контроля в форме тестирования после изучения темы 2 и темы 4, для студентов заочного обучения – выполнения контрольной работы.

Контрольная работа является обязательной частью учебного плана и выполняется самостоятельно во внеаудиторное время (время, отводимое на самостоятельную работу).

Для освоения некоторых тем требуется использовать общее или специализированное программное обеспечение. При необходимости можно обратиться на кафедру, где предоставляется место в компьютерном классе для самостоятельной работы. Также на период обучения возможна установка пробных версий программных продуктов с ограниченным функционалом или сроком использования. Большинство предложенных к изучению программ имеют как платные, так и бесплатные версии. Обратитесь за консультацией к своему преподавателю.

Итоговая аттестация по дисциплине проводится в соответствии с действующим Положением о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации студентов. В случае возникновения непонимания между студентом и ведущим преподавателем, как в период обучения, так и в период зачётно-экзаменационной сессии следует незамедлительно обратиться к заведующему кафедрой прикладной математики и информационных технологий для разрешения спорных ситуаций.

3. ТЕМАТИЧЕСКОЕ СОДЕРЖАНИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Тема 1. Теория моделирования и основы системного анализа

Изучаемые вопросы

Цели и задачи дисциплины. Место дисциплины в структуре образовательной программы. Планируемые результаты освоения дисциплины.

Основные понятия системного подхода и анализ. Понятие системы. Свойства систем. Эволюцию понятия системы. Роль наблюдателя в понятии системы. Целеполагание. Классификация систем. Понятие анализа и синтеза. Общие понятия моделирования. Модель. Классификация моделей. «Модель-алгоритм-программа». Понятие математической и компьютерной модели. Этапы построения математических моделей. Примеры простейших моделей. Понятие интерпретации в математическом моделировании. Методы оценки адекватности модели исследуемой системе. Моделирование в науке и технике и т. д.

Методические указания

Изучение данного раздела закладывает понимание места математики в профессиональной деятельности. Математическое моделирование является ключевой методологией современной науки. Любой разработке нового продукта, нового технического объекта, нового технологического процесса предшествует моделирование. Замена исходного объекта исследования его абстрактным образом – математической моделью – представляет собой, цитируя А. А. Самарского, «третий метод познания»: «Работа не с самим объектом (явлением, процессом), а с его моделью дает возможность безболезненно, относительно быстро и без существенных затрат исследовать его свойства и поведение в любых мыслимых ситуациях».

Изучению принципов моделирования должно предшествовать изучение понятия системы и системного подхода. Дайте определение системы и перечислите свойства системы. Проследите эволюцию понятия системы. Каково назначение понятий «среда», «цель», «наблюдатель» в определении системы.

Рассмотрите простейшие модели, построенные на основе закона сохранения энергии, сохранения материи, сохранения импульса.

Литература [1, Введение, п.1–2]

Контрольные вопросы

1. В чем заключается триада «Модель-алгоритм-программа». Почему данный подход А. А. Самарским назван универсальным инструментом?
2. В чем заключается синтетическая функция математического моделирования? Как математическое моделирование связывает математику с прикладными дисциплинами?

3. Поясните понятие «моделирование из первых принципов»?

4. В чем отличие информационного подхода к моделированию от моделирования из первых принципов?

5. Приведите примеры моделей, получаемых из фундаментальных законов природы?

Тема 2. Оптимальное распределение ресурсов

Изучаемые вопросы

Понятие задачи математического программирования. Задачи оптимизации Задача линейного программирования (ЗЛП). Транспортная задача. Двойственная ЗЛП. Методы решения оптимизационных задач. Графический способ решения ЗЛП. Симплекс-метод. Метод градиентного спуска. Постановку задача оптимального распределения ресурсов.

Методические указания

Задача построения моделей оптимального распределения ресурсов заключается в создании такой математической модели, которая предполагает поиск такого распределения ресурсов, например, производства, которое обеспечивает наилучшее, оптимальное в некотором смысле, их использование. Очевидно, что для построения такой модели требуется некоторая функция, называемая целевой, которая описывает «оптимальность» использования ресурсов, а также набор ограничений, накладываемых на ресурсы, например, их количественную ограниченность, временную доступность и т. д. В рамках данной темы мы рассматриваем детерминированные модели, описываемые как задача математического программирования, а именно задача линейного программирования. Данная тема тесно связана с разделом математики методы оптимизации.

Для того чтобы получить представление в целом о задаче оптимального распределения ресурсов, рассмотрите формулировки задач нелинейного и динамического программирования, сетевого метода, принцип максимума Понтрягина. При необходимости данные темы вы изучите самостоятельно или в специальных дисциплинах. Мы остановимся на задаче линейного программирования, как относительно простом, но широко используемом и иллюстративном примере задачи оптимизации. Впервые задача линейного программирования была сформулирована (1936 г.) и решена нашим соотечественником академиком АН СССР Канторовичем Леонидом Витальевичем, который, совместно с американским ученым Т. Ч. Купмансом в 1975 году получил Нобелевскую премию за разработку метода оптимального распределения ресурсов (метода линейного программирования).

Рассмотрите математическую постановку задачи линейного программирования как задачу оптимизации. Уясните понятие линейности целевой функции и системы ограничений. Рассмотрите несколько примеров построениям модели линейного программирования для различных прикладных задач.

Рассмотрите задачу линейного программирования для 2-х оптимизируемых параметров, например,

$f(x_1, x_2) = x_1 - 4 \cdot x_2 \rightarrow \min$,

$x_1 - 3 \cdot x_2 \geq -9$,

$x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 8$.

По системе ограничений изобразите область допустимых решений. Не забудьте, про естественные ограничения задачи: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Обратите внимание, что область допустимых решений образует выпуклый многогранник. Приведите случаи, когда область допустимых решений открыта, либо не существует. Далее, вспомнив уравнение плоскости, отметьте, что множество точек, образуемых значениями целевой функции в пространстве (x_1, x_2, f) задает плоскость, положение которой определяется коэффициентами при x_1, x_2. Покажите, что решение задачи линейного программирования будет находиться в одной из вершин полученного многогранник области допустимых решений.

Вспомните понятие градиента функции. Изобразите на плоскости x_1Ox_2 градиент целевой функции. Построив перпендикуляр вектору-градиенту, мы получим линию уровня, вдоль которой целевая функция будет иметь одинаковые значения, передвигая ее по направлению градиента значения целевой функции будут увеличиваться, передвигая в противоположном – уменьшаться. Используя это свойство, найдите решение задачи для примера.

Обобщая случай на n большее, чем 2 оптимизируемыми параметра, можно заметить, что область допустимых значений образует все также выпуклый многогранник, и решение задачи линейного программирования все также будет находиться в одной из его вершин. Тогда поиск этого решения будет заключаться в оптимальном обходе вершин. Оригинальным широко известным подходом является симплекс-метод, представляющий собой пошаговый алгоритм, основными шагами которого являются:

1. Приведение задачи к стандартному виду.

2. Введение дополнительных свободных переменных, все ограничения в виде неравенств приводятся к равенствам.

3. Итерационно находится допустимое базисное решение с использованием симплекс-таблиц.

4. Находится максимум целевой функции для допустимого базисного решения.

Самым вычислительно сложным является пункт 3 алгоритма. Изучите симплекс-метод на простом примере, по рекомендуемой литературе. В настоящее время решение задачи линейного программирования автоматизировано во многих пакетах прикладных программ, изучить один из способов предлагается в рамках лабораторной работы.

В завершение данной темы рассмотрите постановку транспортной задачи.

Литература [9, гл. 1–9].

Контрольные вопросы

1. Какие основные шаги в решении задачи линейного программирования?
2. Каким образом можно интерпретировать оптимальное решение в задаче линейного программирования?
3. Приведите примеры не менее 3-х задач профессиональной области, сводимые к задаче линейного программирования.
4. Какие основные шаги и правила используются при применении симплекс-метода для нахождения оптимального решения задачи линейного программирования?
5. Приведите примеры формулировок задач математического программирования (квадратичного, динамического)
6. Сформулируйте двойственную задачу линейного программирования.

Тема 3. Теория вычислительного эксперимента

Изучаемые вопросы

Основные понятия вычислительного эксперимента. Модель «черный ящик». Реакция, фактор. Количественные и качественные факторы. Факторное пространство. Функция реакции. Полиномиальные модели планирования. Полный факторный эксперимент, дробный факторный эксперимент.

Методические указания

Под экспериментом понимают метод познания, при помощи которого в контролируемых и управляемых условиях исследуются явления действительности. Для многих наук эксперимент является основным способом подтверждения теоретических предположений. В рамках математического моделирования мы будем иметь дело с вычислительным экспериментом, т. е. выполнение некоторой компьютерной программы при разных параметрах и разных структурных допущениях.

Изучая данную тему, следует дать определения в терминах планирования экспериментов следующим понятиям: фактор, отклик, количественных и качественных фактор, управляемый и неуправляемый фактор, точка плана. Уяснить суть планирования эксперимента как способа выбора оптимальной конфигурации эксперимента. Одной из задач эксперимента является определение того, какие из параметров или структурных допущений при исследовании системы оказывают наибольшее влияние на показатели работы или какие параметры позволяют обеспечить оптимальные (лучшие в некотором смысле) параметры ее работы.

Основной задачей эксперимента является установление зависимости между реакцией и факторами, при этом эту зависимость желательно установить, проведя некоторое оптимальное число экспериментов. В связи с этим стоит задача планирования экспериментов: какие именно факторы и как следует изменять в ходе моделирования, чтобы получить нужную информацию при наименьшем объёме моделирования.

Изучите понятие факторного плана типа 2^k. Дайте определение понятиям: уровень фактора, главный эффект, эффекты взаимодействия факторов. Выпишите формулы для вычисления главного эффекта и эффектов взаимодействия на примере плана 2^3.

Если в эксперименте участвует большое количество факторов, то полный факторный план может включать существенное количество точек плана. В целях уменьшения числа прогонов применяют, например, дробные планы или факторные планы типа 2^{k-p} с дробными репликами. Уясните различие полного и дробного плана. Рассмотрите стратегию смешивания в дробных факторных планах. Дайте определение разрешающей способности плана.

Мы приняли в качестве представления нашей системы «черный ящик» и не вдавались в реальные детали ее функционирования, так скажем, в физику процессов. Тем не менее, этот «черный ящик» как-то связывает значение отклика со значениями факторов. Мы можем предположить, что существует некоторая функция, описывающая эту связь. Очевидно, что эта функции неизвестна, иначе мы могли бы не проводить эксперименты, а просто подставлять значения факторов в данную функцию и получать значение отклика. И если мы хотим такую функцию записать по результатам эксперимента, то должны сделать предположения о ее виде.

Изучите понятие уравнения регрессии. Рассмотрите метод наименьших квадратов как способ получения коэффициентов уравнения по имеющемуся плану и результатам эксперимента. Рассмотрите интерпретацию коэффициентов регрессии с позиции плана эксперимента. Рассматривая стохастический эксперимент, рассмотрите способ проверки значимости коэффициентов регрессии, а также способ проверки адекватности полученной модели эксперимента.

Литература [1, гл.1]; [10, гл. 3]; [12].

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте проблему планирования вычислительного эксперимента.
2. Дайте определение полного и дробного факторного экспериментов.
3. Каким образом определить оптимальное распределение факторов в вычислительном эксперименте для максимизации информации, получаемой из него?
4. Опишите алгоритм вычисления коэффициентов регрессии методом наименьших квадратов.

5. Дайте определение поверхности отклика.

6. Как определить значимость коэффициентов уравнения регрессии.

7. Как с использованием критерия Фишера установить адекватность модели эксперимента.

Тема 4. Основы стохастического моделирования

Изучаемые вопросы

Понятие стохастического моделирования. Генератор случайных чисел. Оценка качества генераторов случайных чисел. Генерирование непрерывных случайных величин. Генерирование дискретных случайных величин. Генерирование потоков событий. Метод Монте-Карло. Задача Бюффона. Вычисление площадей.

Методические указания

Стохастическое моделирование – мощный инструмент моделирования объектов, процессов и явлений, содержащих сложные взаимодействия, описываемые в терминах вероятностных событий (процессов). В рамках данной темы предлагается изучить основы данного подхода к моделированию. Прежде чем приступить к изучению, освежите основные понятия теории вероятностей и математической статистики. Важным элементом стохастического моделирования является умение создавать генераторы случайных чисел с заданными свойствами. Осветите проблемы создания таких генераторов. Рассмотрите алгоритмы генерации псевдослучайных чисел из равномерного распределения на интервале (0,1). Важность изучить именно эти генераторы вызвана тем, что случайные числа из других распределений, равно как реализация различных случайных процессов могут быть получены путем преобразования равномерно распределенных случайных чисел. Приведите примеры «ручных механических» и других физических методов генерации случайных чисел. Прорывным этапом стало появление первых вычислительных машин, когда генераторы из физических устройств превратились в численные алгоритмы. Данные программные генераторы строят новое случайное число на основе нескольких предшествующих чисел по специальным алгоритмам. Хороший генератор должен обладать рядом свойств:

1) генерируемые числа должны принадлежать заданному распределению и быть некоррелированными друг с другом;
2) возможность генерировать одну и ту же последовательность многократно;
3) возможность практического использования в ограниченных вычислительных ресурсах.

Рассмотрите алгоритм средних квадратов, предложенный фон Нейманом и Метрополисом в 1940 г. Укажите на основные проблемы данного алгоритма.

Далее рассмотрите предложенный Лемером в 1951 году линейный конгруэнтный генератор, в которых случайное число, где

$Z_i = (a \cdot Z_{i-1} + c) \bmod m$

m (модуль), a(множитель), c (приращение), Z0 (начальное значение (затравка)) целые неотрицательные числа. Рассчитайте вручную последовательность из 20-30 чисел при $Z_i = (5 \cdot Z_{i-1} + 3) \bmod 16$. Отметьте цикличность генерации и связанные с этим свойством достоинства и недостатки. Далее обзорно отметьте другие виды генераторов.

Рассмотрите способы преобразования равномерно распределенных случайных чисел U(0,1) к другим непрерывным распределениям: U(0,N), U(N,M), экспоненциальное распределение, распределение Эрланга, нормальное, логнормальное, гамма распределение, дискретным распределениям: Бернулли, дискретное равномерное, биномиальное, геометрическое распределение, распределение Пуассона.

Рассмотрите понятие потока событий, оно будет широко использоваться в следующем разделе дисциплины. Дайте определение простейшего потока, потока Пальма и Эрланга. Рассмотрите подробно генерацию пуассоновского процесса.

Литература [9, гл. 1], [1].

Контрольные вопросы

1. Приведите пример алгоритма генератора псевдослучайных чисел.
2. Перечислите свойства «хорошего» генератора псевдослучайных чисел.
3. Дайте определение простейшему потоку событий.
4. Приведите примеры задач, решаемых методом Монте-Карло. В чем преимущества и недостатки данного метода?
5. Сформулируйте и приведите алгоритм решения задачи вычисления числа π методом Монте-Карло.

Тема 5. Имитационное моделирование систем массового обслуживания

Изучаемые вопросы

Системы массового обслуживания. Имитационное моделирование. Компоненты дискретно-событийной имитационной модели. Постановка задачи моделирования СМО к одним устройством. Правила останова. Моделирование системы управления запасами. Критерии оценки работы СМО. Моделирование СМО с нескольким очередями, приоритетами обслуживания и пр. Моделирование сложных СМО. Аналитическое моделирование СМО. Уравнения Колмогорова. Предельные вероятности.

Модели систем «Хищник-жертва». Основы языка GPSS.

Данная тема предполагает выполнение 2-х лабораторных работ.

Методические указания

Завершающая тема курса посвящена основам имитационного моделирования. Вспомните первую тему, в которой рассматривалась классификация моделей и видов моделирования. Имитационное моделирование относится к математическому моделированию и используется в том случае, если получить аналитические решения затруднительно, либо сложность моделируемой системы не позволяет такое решение выписать. Дайте определение видам имитационных моделей: статической и динамической, детерминированной и стохастической, непрерывное и дискретной.

В качестве примера системы, для моделирования которой используется компьютерная имитация буде рассматривать системы массового обслуживания (СМО). СМО представляют системы, в основе которых лежит процесс обслуживания в широком смысле, например, автоматические телефонные станции, транспортные системы, производственные системы и пр. Рассмотрите структуру СМО и основные ее составляющие, дайте определение терминам: заявка (транзакт), устройство обслуживания, режим поступления заявок, режим обслуживания, очередь, одноканальные СМО, многоканальные СМО.

Чтобы четко понять отличия аналитического и имитационного моделирования, рассмотрите аналитические модели простейших СМО. Дайте определение марковского процесса и марковской цепи. Рассмотрите СМО, описываемую графом, приведенным на рисунке. Система дифференциальных уравнений, устанавливающая связь между вероятностями нахождения системы в момент времени t_{i-1} и моментом времени t_i называется системой Колмогорова. Изучите вывод уравнений Колмогорова и общие правила их составления. Для приведенного примера выпишите данную систему уравнений по графу состояний. Заметьте, что для решения систем дифференциальных уравнений, как правило, используют численные схему, например, метод Рунге-Кутта. Дайте определение предельным вероятностям состояний, сформулируйте теорему Маркова.

Рассмотрите аналитические модели следующих систем:

1) СМО с отказами;
2) многоканальная СМО с отказами;
3) одноканальная СМО с очередью;
4) многоканальная СМО с очередью.

Для пункта 1 получите уравнения Колмогорова и решите их аналитически, найдите предельные вероятности состояний, обратите внимание, к каким значениям сходятся аналитическое решение, дайте соответствующую интерпретацию результатам. Для остальных рассмотрите структуру и динамику системы.

Рассмотрите принципы дискретно-событийного моделирования, как вида имитационного моделирования.

Литература [10, гл. 2–4], [1].

Контрольные вопросы

1. Дайте классификацию систем массового обслуживания.
2. Сформулируйте правило записи системы уравнений Колмогорова по графу состояний.
3. Дайте определения марковскому случайному процессу.
4. Сформулируйте теорему Маркова о предельных вероятностях.
5. Перечислите основные блоки GPSS, позволяющие описать одноканальную систему массового обслуживания.
6. Перечислите основные характеристики качества системы массового обслуживания.

4. ЗАДАНИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Для студентов заочной формы обучения рабочей программой дисциплины предусмотрено выполнение контрольной работы. Контрольная работа включает 3 задания.

Контрольная работа должна быть оформлена в электронном виде с использованием текстового редактора (рекомендуется MS Word или аналогичное офисное приложение).

Для студентов заочной формы обучения бумажный вариант контрольной работы распечатывается и в сброшюрованном виде регистрируется на кафедре прикладной математики и информационных технологий. Бумажный вариант может быть заменен на электронный при отправке контрольной работы через ЭИОС только по специальному указанию преподавателя. В этом случае регистрация осуществляется в электронном журнале: файл с контрольной работой и вспомогательные файлы (при их наличии) загружаются в хранилище личных файлов студента в ЭИОС и отправляются в виде ссылки через отдельное задание курса на проверку преподавателю.

Контрольная работа, выполненная без грубых ошибок, допускается к защите. Защита контрольной работы состоит в выполнении в присутствии преподавателя любого задания, аналогичного заданию контрольной работы.

Шкала оценивания результатов выполнения заданий контрольной работы основана на системе зачет/незачет. Работа оценивается оценкой «зачет» в случае 100%-ной защиты всех заданий работы, «незачет» – во всех иных случаях.

Типовые задания контрольной работы приведены в приложении.

5. ТРЕБОВАНИЯ К АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Завершается изучение дисциплины выставлением оценки «зачтено/не зачтено», учитывающей все виды работ студента в течение семестра. Независимо от метода выставления, традиционного подхода или балльно-рейтингового, оценка соответствует следующим достижениям студента:

– оценка «зачтено» выставляется студенту, обнаружившему знание основного учебного материала в объеме, необходимом для дальнейшей учебы и предстоящей работы по специальности, справившемуся с выполнением заданий, предусмотренных программой, знакомому с основной литературой;

– оценка «не зачтено» выставляется студенту, обнаружившему пробелы в знаниях основного учебного материала, допустившему принципиальные ошибки при выполнении предусмотренных программой заданий.

5.1 Требования к аттестации очной формы обучения

Промежуточная аттестации студентов очной формы обучения по дисциплине «Математическое моделирование», проводимая в форме зачета, осуществляется по результатам прохождения всех видов текущего контроля успеваемости. К средствам текущего контроля успеваемости относятся задания и контрольные вопросы по лабораторным работам, тестовые задания.

5.2 Требования к аттестации заочной формы обучения

Промежуточная аттестации студентов заочной формы обучения по дисциплине «Математическое моделирование», проводимая в форме зачета, осуществляется по результатам прохождения всех видов текущего контроля успеваемости (задания и контрольные вопросы по лабораторным работам) и результатам выполнения контрольной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Советов, Б. Я. Моделирование систем: учебник / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев; ЛЭТИ им. В. И. Ульянова (Ленина). – 7-е изд. – Москва: Юрайт, 2015. – 343 с. – ISBN 978– 5-9916-3916-3.

2. Сидняев, Н. И. Теория планирования эксперимента и анализ статистических данных: учеб. пособие / Н. И. Сидняев. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: Юрайт, 2014. – 495 с. – ISBN 978-5-9916-2925-6.

Дополнительная литература

3. Наумов, В. А. Прикладная математика. Учебное пособие по решению профессиональных задач в среде Mathcad: учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся в магистратуре по направлению подгот. 111500.68 « Пром. рыболовство » / В. А. Наумов; Калинингр. гос. техн. ун-т. – Калининград: КГТУ, 2014. – 144 с. – ISBN 978-5-94826-381-6.

4. Белов, П. Г. Управление рисками, системный анализ и моделирование: учеб. и практикум: в 2 т. / П. Г. Белов; МАТИ – РГТУ им. К. Э. Циолковского. – 2-е изд. – Москва: Юрайт, 2015 – ISBN 978-5-9916-4703-8. Т. 1. – 2015. – 460 с. – ISBN 978-5-9916-4719-9 (т. 1).

5. Белов, П. Г. Управление рисками, системный анализ и моделирование: учеб. и практикум: в 2 т. / П. Г. Белов; МАТИ – РГТУ им. К. Э. Циолковского. – 2-е изд. – Москва: Юрайт, 2015 – ISBN 978-5-9916-4703-8. Т. 2. – 2015. – 272 с. – ISBN 978-5-9916-4720-5 (т. 2).

6. Советов, Б. Я. Моделирование систем: практикум / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев; ЛЭТИ им. В. И. Ульянова (Ленина). – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва: Юрайт, 2014. – 295 с. – ISBN 978-5-9916-2858-7.

7. Великанов, Н. Л. Математическое моделирование в задачах природообустройства и водопользования: монография / Н. Л. Великанов, В. А. Наумов; Калинингр. гос. техн. ун-т. – Калининград: КГТУ, 2014. – 201 с. – ISBN 978-5-94826-391-5.

8. Самарский, А. А. Математическое моделирование: идеи, методы, примеры / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. – 2-е изд., испр. – Москва: Физматлит, 2005. – 320 с.: ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68976

9. Ловянников, Д. Г. Исследование операций: учеб. пособие / Д. Г. Ловянников, И. Ю. Глазкова; Министерство образования РФ, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Северо-Кавказский федеральный университет». – Ставрополь: СКФУ, 2017. – 110 с.: ил. – Библиогр. в кн.; [Электронный ресурс]. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=467012.

10. Теория систем массового обслуживания: учеб. пособие / сост. А. В. Шапошников, В. В. Бережной, А. М. Лягин, А. А. Плетухина [и др.]. –

Ставрополь: СКФУ, 2017. – 134 с.: ил. – Библиогр. в кн.; То же [Электронный ресурс]. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=483842.

11. Советов, Б. Я. Моделирование систем: учебник для вузов. / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва: Высш. шк., 2001. – 343 с.

12. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – Изд. 3-е, перераб. и доп. – Москва: Высшая школа, 1979. – 400 с.: ил.; То же [Электронный ресурс]. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=458330.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Типовые задания для контрольной работы (заочная форма)

Задание 1

На четыре базы A_1 A_2 A_3 A_4поступил однородный груз в следующем количестве: α_1т – на базу A_1; α_2т – на базу A_2; α_3т – на базу A_3; α_4т – на базу A_4. Полученный груз требуется перевезти в пять пунктов: β_1т – в пункт B_1; β_2т – в пункт B_2; β_2т – в пункт B_3; β_4т – в пункт B_4; β_5т – в пункт B_5 .

Расстояние между пунктами указаны в таблице 1 (матрице расстояний).

Таблица 1 – Матрица расстояний

Пункты отправлений	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	$d11$	$d12$	$d13$	$d14$	$d15$	α_1
A_2	$d21$	$d22$	$d23$	$d24$	$d25$	α_2
A_3	$d31$	$d32$	$d33$	$d34$	$d35$	α_3
A_4	$d41$	$d42$	$d43$	$d44$	$d45$	α_4
Потребности	1	2	3	4	5	

Стоимость перевозок пропорциональна количеству груза и расстоянию, на которое этот груз перевозится. Начальный опорный планнайти тремя способами. Спланировать перевозки так, чтобы их общая стоимость была минимальной (таблица 2).

Таблица 2

Пункты отправлений	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	16	30	17	10	16	4
A_2	30	27	26	9	23	6
A_3	13	4	22	3	1	10
A_4	3	1	5	4	24	10
Потребности	7	7	7	7	2	
Пункты отправлений	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	15	1	22	19	1	20
A_2	21	18	11	4	3	20
A_3	26	29	23	26	24	20
A_4	21	20	3	19	27	20

Пункты отправлений	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
Потребности	19	19	19	19	4	
Пункты отправлений	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	17	20	29	26	25	15
A_2	3	4	5	15	24	15
A_3	19	2	22	4	13	15
A_4	20	27	1	17	19	15
Потребности	11	11	11	11	16	
Пункты отправлений	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	21	22	2	13	7	18
A_2	27	10	4	24	9	12
A_3	3	16	25	5	4	17
A_4	28	11	17	10	29	13
Потребности	8	8	8	8	28	
Пункты отправлений	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	30	24	11	12	25	21
A_2	26	4	29	20	24	19
A_3	27	14	14	10	18	15
A_4	6	14	28	8	2	25
Потребности	15	15	15	15	20	
Пункты отправлений	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	5	15	3	6	10	9
A_2	23	8	13	27	12	11
A_3	30	1	5	24	25	14
A_4	8	26	7	28	9	16
Потребности	8	9	13	8	12	
Пункты отправлений	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	9	17	29	28	8	22
A_2	13	21	27	16	29	13
A_3	20	30	24	7	26	17
A_4	11	19	30	6	2	18
Потребности	7	7	7	7	42	
Пункты отправлений	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	30	2	5	6	15	16

Пункты отправлений	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_2	5	29	9	5	7	15
A_3	16	24	14	6	26	14
A_4	13	28	4	25	8	15
Потребности	6	6	13	20	15	

Пункты отправлений	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	12	11	25	17	21	17
A_2	22	18	14	8	1	14
A_3	9	13	2	28	15	21
A_4	26	21	3	4	27	43
Потребности	19	22	23	17	14	

Пункты отправлений	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2	24	4	2	3	28
A_2	20	10	15	27	7	13
A_3	15	15	12	25	19	15
A_4	2	6	3	5	5	30
Потребности	27	16	25	11	7	

Пункты отправлений	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	6	11	20	17	8	12
A_2	1	25	3	18	17	17
A_3	9	39	16	30	31	18
A_4	23	15	4	3	28	13
Потребности	10	8	12	14	14	

Пункты отправлений	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	10	16	27	19	17
A_2	30	18	8	29	15	19
A_3	3	18	28	19	13	11
A_4	9	12	2	25	21	13
Потребности	5	15	11	9	20	

Пункты отправлений	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	4	21	12	8	1	21
A_2	20	8	25	15	23	21
A_3	17	1	11	5	3	23
A_4	23	10	24	6	5	23
Потребности	22	22	22	11	11	

Пункты отправлений	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
Пункты отправлений	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	5	3	24	10	25	24
A_2	30	2	22	16	7	15
A_3	30	24	27	29	10	16
A_4	15	17	21	2	3	24
Потребности	12	13	14	31	9	
Пункты отправлений	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	25	28	20	15	7	16
A_2	27	5	11	23	10	10
A_3	1	25	14	16	16	14
A_4	8	6	4	16	18	20
Потребности	7	8	4	11	30	

Задание 2

Для изготовления различных изделий A и B используются три вида сырья. На производство единицы изделия A его требуется затратить: первого вида – $_1$ кг, второго вида – $_2$ кг, третьего вида – $_3$ кг. На производство единицы изделия Bтребуется затратить: сырья первого вида – $_1$ кг, второго – $_2$ кг, третьего – $_3$ кг. Производство обеспечено сырьем первого вида в количестве $_1$кг, второго – $_2$кг, третьего – $_3$кг. Прибыль от реализации единицы готового изделия A составляет α руб., изделияB – руб. Составить план производства изделий A и B, обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации.

1. Решить задачу: а) симплексным методом;б) графическим методом.

Составить двойственную задачу. Используя решение исходной задачи, записать оптимальное решение двойственной задачи (таблица 3).

Таблица 3

1.	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	p_1	p_2	p_3	a	Q
2.	16	8	5	4	6	9	784	552	567	6	4
3.	12	10	3	3	5	6	684	650	558	6	2
4.	8	6	4	3	6	9	862	864	945	3	2
5.	11	8	3	5	4	5	671	588	423	3	4
6.	15	11	9	4	5	10	1095	865	1080	3	2
7.	4	6	2	5	3	0	600	540	120	3	7
8.	6	5	3	3	10	12	714	910	948	3	9

1.	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	p_1	p_2	p_3	a	Q
9.	9	6	3	4	7	8	801	807	768	3	2
10.	3	4	3	5	8	11	453	616	627	1	3
11.	10	5	4	9	11	15	1870	1455	1815	7	9
12.	5	3	2	2	3	3	505	393	348	7	4
13.	7	6	1	3	3	2	1365	1245	650	6	5
14.	6	4	3	2	3	4	600	510	600	6	3
15.	5	4	3	3	3	4	750	631	720	5	6
16.	8	6	3	2	3	2	840	870	540	6	2
17.	3	3	2	2	3	5	273	300	380	4	5
18.	9	6	4	5	8	16	1431	1224	1256	3	2
19.	4	3	2	3	4	6	480	444	546	2	4
20.	4	3	3	3	4	5	540	393	450	5	6
21.	2	3	2	3	6	8	438	672	372	3	8
22.	20	15	14	28	9	1	780	465	546	10	7
23.	2	4	6	3	1	7	180	240	426	16	12
24.	11	13	12	21	15	3	735	741	822	3	5
25.	2	4	5	3	2	4	36	50	55	40	50
26.	9	15	15	27	15	3	603	705	840	6	11
27.	14	15	20	40	27	4	1200	1032	1096	5	13
28.	19	16	19	23	12	8	884	656	855	5	4
29.	13	13	11	23	15	1	598	494	572	2	3
30.	8	14	14	7	8	1413	574	577	6	5	
31.	12	4	3	4	4	12	300	120	252	3	4

Задание 3

Найти максимум целевой функции при заданной системе ограничений. Во всех задачах $x_i \geq 0$ и x_i – целые числа (i =1,2,…). Решить задачу одним из методов Гомори и ветвей, и границ. Сравнить полученные результаты. Решить задачу «коммивояжера» методом ветвей и границ (таблица 4)

Таблица 4

1. $$\begin{bmatrix} \infty & 31 & 15 & 19 & 8 & 55 \\ 19 & \infty & 22 & 31 & 7 & 35 \\ 25 & 43 & \infty & 53 & 57 & 16 \\ 5 & 50 & 49 & \infty & 39 & 9 \\ 24 & 24 & 33 & 5 & \infty & 14 \\ 34 & 26 & 6 & 3 & 36 & \infty \end{bmatrix}$$

2. $$\begin{bmatrix} \infty & 31 & 15 & 19 & 8 & 55 \\ 19 & \infty & 22 & 31 & 7 & 35 \\ 25 & 43 & \infty & 53 & 57 & 16 \\ 5 & 50 & 49 & \infty & 39 & 9 \\ 24 & 24 & 33 & 5 & \infty & 14 \\ 34 & 26 & 6 & 3 & 36 & \infty \end{bmatrix}$$

3. $$\begin{bmatrix} \infty & 16 & 13 & 35 & 41 & 52 \\ 19 & \infty & 29 & 31 & 26 & 18 \\ 57 & 51 & \infty & 44 & 51 & 7 \\ 5 & 40 & 32 & \infty & 14 & 16 \\ 33 & 41 & 28 & 3 & \infty & 53 \\ 19 & 54 & 24 & 10 & 41 & \infty \end{bmatrix}$$

4. $$\begin{bmatrix} \infty & 39 & 45 & 2 & 51 & 33 \\ 30 & \infty & 20 & 33 & 40 & 35 \\ 54 & 16 & \infty & 55 & 22 & 56 \\ 19 & 36 & 25 & \infty & 18 & 43 \\ 29 & 8 & 8 & 12 & \infty & 25 \\ 16 & 47 & 31 & 14 & 8 & \infty \end{bmatrix}$$

5. $$\begin{bmatrix} \infty & 41 & 27 & 54 & 46 & 5 \\ 42 & \infty & 11 & 32 & 58 & 21 \\ 36 & 5 & \infty & 33 & 22 & 33 \\ 46 & 24 & 59 & \infty & 49 & 59 \\ 48 & 58 & 11 & 44 & \infty & 47 \\ 26 & 50 & 35 & 19 & 27 & \infty \end{bmatrix}$$

6. $$\begin{bmatrix} \infty & 21 & 40 & 28 & 60 & 52 \\ 58 & \infty & 11 & 39 & 22 & 56 \\ 22 & 12 & \infty & 23 & 14 & 19 \\ 25 & 47 & 51 & \infty & 20 & 54 \\ 47 & 43 & 18 & 42 & \infty & 52 \\ 44 & 49 & 50 & 52 & 29 & \infty \end{bmatrix}$$

7. $$\begin{bmatrix} \infty & 6 & 56 & 35 & 48 & 29 \\ 34 & \infty & 46 & 46 & 55 & 26 \\ 29 & 31 & \infty & 32 & 13 & 42 \\ 26 & 34 & 12 & \infty & 17 & 7 \\ 38 & 35 & 40 & 13 & \infty & 47 \\ 60 & 25 & 59 & 36 & 31 & \infty \end{bmatrix}$$

8. $$\begin{bmatrix} \infty & 22 & 26 & 56 & 38 & 60 \\ 34 & \infty & 12 & 51 & 37 & 27 \\ 45 & 33 & \infty & 44 & 47 & 37 \\ 39 & 7 & 16 & \infty & 57 & 8 \\ 35 & 56 & 40 & 58 & \infty & 27 \\ 9 & 20 & 36 & 31 & 18 & \infty \end{bmatrix}$$

9. $$\begin{bmatrix} \infty & 14 & 40 & 33 & 16 & 51 \\ 48 & \infty & 34 & 4 & 11 & 24 \\ 57 & 35 & \infty & 24 & 38 & 52 \\ 30 & 50 & 44 & \infty & 9 & 31 \\ 18 & 42 & 24 & 31 & \infty & 30 \\ 1 & 38 & 31 & 19 & 32 & \infty \end{bmatrix}$$

10. $$\begin{bmatrix} \infty & 4 & 39 & 22 & 10 & 47 \\ 58 & \infty & 56 & 18 & 4 & 35 \\ 34 & 29 & \infty & 17 & 27 & 18 \\ 52 & 4 & 22 & \infty & 15 & 37 \\ 41 & 44 & 25 & 11 & \infty & 32 \\ 11 & 6 & 19 & 2 & 58 & \infty \end{bmatrix}$$

11. $$\begin{bmatrix} \infty & 56 & 48 & 39 & 3 & 40 \\ 47 & \infty & 50 & 4 & 10 & 49 \\ 48 & 50 & \infty & 42 & 19 & 16 \\ 24 & 44 & 47 & \infty & 23 & 33 \\ 38 & 17 & 6 & 51 & \infty & 26 \\ 29 & 59 & 55 & 34 & 18 & \infty \end{bmatrix}$$

12. $$\begin{bmatrix} \infty & 41 & 60 & 39 & 46 & 10 \\ 31 & \infty & 59 & 16 & 1 & 51 \\ 29 & 51 & \infty & 14 & 42 & 50 \\ 35 & 12 & 52 & \infty & 16 & 26 \\ 16 & 39 & 15 & 60 & \infty & 57 \\ 15 & 30 & 38 & 47 & 36 & \infty \end{bmatrix}$$

13. $\begin{bmatrix} \infty & 58 & 28 & 18 & 2 & 50 \\ 11 & \infty & 18 & 47 & 14 & 49 \\ 49 & 3 & \infty & 24 & 35 & 51 \\ 1 & 46 & 50 & \infty & 45 & 15 \\ 54 & 40 & 14 & 12 & \infty & 6 \\ 8 & 58 & 34 & 27 & 47 & \infty \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} \infty & 14 & 17 & 25 & 54 & 37 \\ 57 & \infty & 43 & 2 & 13 & 34 \\ 7 & 24 & \infty & 8 & 9 & 7 \\ 13 & 28 & 30 & \infty & 56 & 18 \\ 26 & 44 & 4 & 52 & \infty & 52 \\ 18 & 5 & 49 & 14 & 12 & \infty \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} \infty & 44 & 60 & 54 & 29 & 39 \\ 53 & \infty & 46 & 19 & 42 & 6 \\ 36 & 7 & \infty & 37 & 44 & 3 \\ 21 & 4 & 49 & \infty & 14 & 26 \\ 15 & 12 & 38 & 46 & \infty & 24 \\ 19 & 6 & 45 & 57 & 11 & \infty \end{bmatrix}.$

16. $\begin{bmatrix} \infty & 15 & 43 & 38 & 10 & 45 \\ 44 & \infty & 18 & 6 & 49 & 40 \\ 41 & 42 & \infty & 19 & 1 & 48 \\ 33 & 44 & 20 & \infty & 20 & 21 \\ 40 & 17 & 16 & 26 & \infty & 15 \\ 3 & 4 & 37 & 54 & 36 & \infty \end{bmatrix}.$

17. $\begin{bmatrix} \infty & 58 & 56 & 13 & 21 & 54 \\ 21 & \infty & 58 & 43 & 56 & 14 \\ 4 & 46 & \infty & 38 & 7 & 22 \\ 44 & 56 & 42 & \infty & 6 & 60 \\ 3 & 34 & 36 & 11 & \infty & 17 \\ 59 & 47 & 40 & 60 & 13 & \infty \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} \infty & 50 & 33 & 18 & 5 & 44 \\ 51 & \infty & 19 & 24 & 20 & 32 \\ 19 & 23 & \infty & 42 & 14 & 25 \\ 42 & 53 & 2 & \infty & 48 & 5 \\ 27 & 28 & 31 & 33 & \infty & 1 \\ 12 & 37 & 60 & 21 & 21 & \infty \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} \infty & 21 & 34 & 48 & 58 & 35 \\ 9 & \infty & 14 & 30 & 4 & 12 \\ 6 & 7 & \infty & 35 & 11 & 34 \\ 26 & 37 & 17 & \infty & 36 & 52 \\ 59 & 15 & 7 & 32 & \infty & 47 \\ 3 & 17 & 6 & 44 & 59 & \infty \end{bmatrix}.$

20. $\begin{bmatrix} \infty & 23 & 38 & 44 & 18 & 32 \\ 51 & \infty & 17 & 35 & 56 & 47 \\ 28 & 37 & \infty & 24 & 16 & 21 \\ 26 & 49 & 60 & \infty & 7 & 46 \\ 56 & 6 & 40 & 34 & \infty & 31 \\ 33 & 20 & 50 & 51 & 30 & \infty \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} \infty & 20 & 28 & 12 & 39 & 32 \\ 21 & \infty & 15 & 9 & 17 & 27 \\ 30 & 25 & \infty & 45 & 29 & 47 \\ 7 & 52 & 40 & \infty & 15 & 1 \\ 60 & 46 & 11 & 5 & \infty & 34 \\ 11 & 45 & 14 & 21 & 30 & \infty \end{bmatrix}.$

22. $\begin{bmatrix} \infty & 36 & 51 & 24 & 11 & 46 \\ 28 & \infty & 17 & 46 & 10 & 20 \\ 7 & 41 & \infty & 58 & 2 & 35 \\ 25 & 60 & 45 & \infty & 55 & 59 \\ 48 & 20 & 33 & 26 & \infty & 38 \\ 50 & 27 & 19 & 14 & 52 & \infty \end{bmatrix}.$

23. $\begin{bmatrix} \infty & 16 & 15 & 32 & 53 & 55 \\ 27 & \infty & 34 & 50 & 2 & 31 \\ 33 & 39 & \infty & 42 & 36 & 39 \\ 45 & 22 & 59 & \infty & 28 & 26 \\ 55 & 49 & 14 & 18 & \infty & 12 \\ 28 & 14 & 8 & 48 & 35 & \infty \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} \infty & 9 & 37 & 28 & 52 & 53 \\ 24 & \infty & 25 & 48 & 27 & 48 \\ 27 & 45 & \infty & 23 & 47 & 58 \\ 2 & 30 & 16 & \infty & 8 & 60 \\ 53 & 54 & 4 & 1 & \infty & 46 \\ 60 & 12 & 5 & 50 & 35 & \infty \end{bmatrix}.$

25. $\begin{bmatrix} \infty & 11 & 14 & 22 & 17 & 30 \\ 20 & \infty & 10 & 54 & 31 & 4 \\ 5 & 18 & \infty & 29 & 20 & 40 \\ 31 & 3 & 23 & \infty & 42 & 33 \\ 34 & 13 & 33 & 5 & \infty & 32 \\ 39 & 44 & 28 & 42 & 2 & \infty \end{bmatrix}.$

26. $\begin{bmatrix} \infty & 14 & 32 & 53 & 8 & 44 \\ 53 & \infty & 2 & 14 & 30 & 39 \\ 50 & 53 & \infty & 52 & 2 & 17 \\ 1 & 58 & 54 & \infty & 52 & 51 \\ 18 & 13 & 4 & 58 & \infty & 15 \\ 39 & 48 & 46 & 9 & 2 & \infty \end{bmatrix}.$

27. $\begin{bmatrix} \infty & 30 & 57 & 34 & 24 & 44 \\ 14 & \infty & 9 & 14 & 30 & 17 \\ 32 & 21 & \infty & 53 & 21 & 23 \\ 25 & 39 & 28 & \infty & 48 & 21 \\ 42 & 5 & 29 & 56 & \infty & 55 \\ 16 & 17 & 37 & 5 & 30 & \infty \end{bmatrix}.$

28. $\begin{bmatrix} \infty & 13 & 55 & 19 & 16 & 19 \\ 58 & \infty & 23 & 54 & 48 & 45 \\ 25 & 53 & \infty & 38 & 59 & 24 \\ 17 & 11 & 16 & \infty & 60 & 53 \\ 1 & 38 & 18 & 36 & \infty & 1 \\ 19 & 11 & 32 & 44 & 3 & \infty \end{bmatrix}.$

29. $\begin{bmatrix} \infty & 60 & 39 & 40 & 24 & 34 \\ 3 & \infty & 57 & 55 & 41 & 51 \\ 7 & 49 & \infty & 46 & 7 & 4 \\ 57 & 47 & 22 & \infty & 5 & 59 \\ 59 & 29 & 8 & 36 & \infty & 6 \\ 21 & 55 & 26 & 45 & 60 & \infty \end{bmatrix}.$

30. $\begin{bmatrix} \infty & 33 & 41 & 46 & 11 & 21 \\ 10 & \infty & 26 & 28 & 39 & 43 \\ 1 & 57 & \infty & 20 & 60 & 28 \\ 50 & 25 & 35 & \infty & 42 & 7 \\ 43 & 44 & 51 & 19 & \infty & 34 \\ 55 & 22 & 30 & 50 & 53 & \infty \end{bmatrix}.$

Локальный электронный методический материал

Александр Борисович Тристанов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Редактор С. Кондрашова

Уч.-изд. л. 2,2. Печ. л. 1,8.

Издательство федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Калининградский государственный технический университет»
236022, Калининград, Советский проспект, 1