

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Н. А. Елисеева

МАТЕМАТИКА
РАЗДЕЛ «АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ»

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины
для студентов по направлению подготовки
15.03.04 – Автоматизация технологических процессов и производств

Калининград
Издательство ФГБОУ ВО «КГТУ»
2023

Рецензент:

кандидат физико-математических наук, исполняющий обязанности заведующего кафедрой прикладной математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет»
Алексей Иванович Руденко.

Елисеева, Н. А. Математика раздел «Алгебра и геометрия»: учебно-методическое пособие по изучению дисциплины для студентов по направлению подготовки 15.03.04 – Автоматизация технологических процессов и производств / **Н. А. Елисеева.** – Калининград: Изд-во ФГБОУ ВО «КГТУ», 2023. – 26 с.

В учебно-методическом пособии приведен тематический план изучения дисциплины. Представлены методические указания по изучению дисциплины. Даны рекомендации по подготовке к промежуточной аттестации и по выполнению самостоятельной работы. Пособие подготовлено в соответствии с требованиями утвержденной рабочей программы физико-математического модуля по дисциплине Математика раздел «Алгебра и геометрия» направления подготовки 15.03.04 – Автоматизация технологических процессов и производств.

Табл. 2, список лит. – 11 наименований

Учебно-методическое пособие рассмотрено и одобрено в качестве локального электронного методического материала на заседании кафедры прикладной математики и информационных технологий Института цифровых технологий ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет» 02.12.2022, протокол № 12.

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины рекомендовано к использованию в учебном процессе в качестве локального электронного методического материала методической комиссией ИЦТ от 17.01.2023, протокол № 11.

© Федеральное государственное
бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Калининградский государственный
технический университет», 2023 г.
© Елисеева Н.А., 2023 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН.....	6
1.1. Тематический план для студентов очной формы обучения	6
1.2. Тематический план для студентов заочной формы обучения.....	7
2. СОДЕРЖАНИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ	7
Раздел 1. Элементы линейной алгебры.....	7
Раздел 2. Векторная алгебра.....	12
Раздел 3. Аналитическая геометрия на плоскости	16
Раздел 4. Аналитическая геометрия в пространстве	19
3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ	22
4. ТРЕБОВАНИЯ К АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ	24
4.1. Текущая аттестация.....	24
4.2. Условия получения положительной оценки	25
ЛИТЕРАТУРА	26

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов направления подготовки 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств, изучающих дисциплину Математика раздел «Алгебра и геометрия».

Целью освоения дисциплины Математика раздел «Алгебра и геометрия» является формирование у студентов знаний, умений и навыков анализа, моделирования и решения теоретических и практических задач с широким использованием основных законов и методов алгебры и геометрии; формирование и развитие у студентов способностей к логическому и алгоритмическому мышлению.

В результате освоения дисциплины студент должен:

- знать фундаментальные понятия и методы линейной алгебры, векторной алгебры и аналитической геометрии;

- уметь применять математические знания, необходимые для решения конкретных технических, прикладных, профессиональных задач; правильно формулировать проблему с математической точки зрения и выбирать из многообразия математических методов оптимальный способ решения данной проблемы;

- владеть математическим языком как универсальным языком науки, употреблять математическую символику для выражения количественных и качественных отношений объектов; владеть методами исследования и решения задач линейной, векторной алгебры, аналитической геометрии.

При изучении дисциплины Математика раздел «Алгебра и геометрия» используются знания, умения и навыки довузовской подготовки по математике (умение проводить алгебраические преобразования, решать уравнения и неравенства, знание основных тригонометрических формул, умение проводить тригонометрические преобразования и решать тригонометрические уравнения и неравенства, понимание функции, графика функции и основных ее свойств, знание графиков и свойств основных элементарных функций), а также знания, умения и навыки, получаемые студентами при параллельном освоении дисциплины Математика раздел «Математический анализ».

В предлагаемом пособии представлен тематический план, содержащий перечень изучаемых тем, обязательных практических занятий, мероприятий текущей аттестации и отводимое на них аудиторное время (занятия в соответствии с расписанием) и самостоятельную работу. При формировании личного образовательного плана на семестр обучающемуся следует оценивать рекомендуемое время на изучение дисциплины и возможность больших

временных затрат на выполнение отдельных заданий или проработку отдельных тем.

В разделе «Содержание дисциплины» приведены подробные сведения о вопросах, рассматриваемых в данном курсе. Представлены методические рекомендации преподавателя для самостоятельной работы студента. Каждая тема включает ссылку на литературу (или иной информационный ресурс), а также контрольные вопросы для самопроверки.

Раздел «Текущая аттестация» содержит описание обязательных мероприятий, контроля, самостоятельной работы и усвоения разделов или отдельных тем дисциплины. Изложены требования к промежуточной аттестации по дисциплине – экзамену.

Помимо данного пособия, студентам следует использовать материалы, размещенные в соответствующем данной дисциплине разделе ЭИОС [8], в которые более оперативно вносятся изменения для адаптации дисциплины под конкретную группу.

1. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

1.1. Тематический план для студентов очной формы обучения

Форма промежуточной аттестации по дисциплине для очной формы обучения – экзамен (1 семестр).

Таблица 1 – Трудоемкость освоения по очной форме обучения

№ п/п	Раздел (модуль) дисциплины	Контактная работа с преподавателем			СРС
		ЛК	ПЗ	ЭИОС	
1.	Элементы линейной алгебры	4	8	4	10
2.	Векторная алгебра	4	8	4	10
3.	Аналитическая геометрия на плоскости	4	6	4	9
4.	Аналитическая геометрия в пространстве	2	8	4	10
	Итого	14	30	16	39

ЛК – лекции, ПЗ – практические занятия, СРС – самостоятельная работа студентов.

1.2. Тематический план для студентов заочной формы обучения

Форма промежуточной аттестации по дисциплине для заочной формы обучения – контрольная работа, экзамен.

Таблица 2 – Трудоемкость освоения по заочной форме обучения

№ п/п	Раздел (модуль) дисциплины	Контактная работа с преподавателем			СРС
		ЛК	ПЗ	ЭИОС	
1.	Элементы линейной алгебры	2	4	1	28,25
2.	Векторная алгебра	2	1	1	20
3.	Аналитическая геометрия на плоскости	2		1	30
4.	Аналитическая геометрия в пространстве		1	1	40
	Итого	6	6	4	118,25

ЛК – лекции, ПЗ – практические занятия, СРС – самостоятельная работа студентов.

2. СОДЕРЖАНИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Структура дисциплины представлена четырьмя тематическими разделами.

Раздел 1. Элементы линейной алгебры

Тема 1.1. Матрицы и действия над ними. Определители

Перечень изучаемых вопросов:

Понятие матрицы. Виды матриц. Операции над матрицами: сложение, умножение на число, произведение матриц, транспонирование. Свойства операций. Понятие определителя 1-го, 2-го, 3-го порядков. Свойства определителей. Минор и алгебраическое дополнение элемента определителя. Теорема о разложении определителя по элементам строки (столбца).

Методические указания:

Матричный язык широко используется в различных областях современной математики и ее приложениях. Понятие матрицы тесно связано с

исследованием и решением систем линейных уравнений. Матрицы применяются в механике, теоретической электротехнике, теории вероятностей, квантовой механике, экономике и многих других областях. При изучении этой темы студент должен усвоить понятие матрицы и научиться выполнять действия над ними.

Для квадратных матриц вводится понятие определителя. Вычисление определителей применяется при решении систем линейных уравнений, нахождении обратной матрицы, вычислении векторного и смешанного произведения векторов, задании плоскости и т. д. Важно запомнить правила вычисления определителей 2-го и 3-го порядков, для наглядности приведены правила треугольников и Саррюса. Следует внимательно изучить и уметь применять свойства определителей, позволяющие упрощать вычисления. С помощью свойств и теоремы о разложении определителя по элементам строки (столбца) студент должен научиться вычислять определители четвертого порядка и понимать, что данный способ является универсальным для нахождения определителя любого порядка.

Изучение темы не требует предварительных знаний, достаточно уметь выполнять арифметические операции над действительными числами.

Контрольные вопросы:

1. Определение матрицы, краткая форма записи матрицы.
2. Определение равных матриц.
3. Определения единичной, нулевой матриц.
4. Определения треугольной, трапециевидной (ступенчатой) матриц.
5. Операция сложения матриц, ее свойства.
6. Операция умножения матрицы на число, ее свойства.
7. Операция умножения матриц, ее свойства.
8. Операция транспонирования, ее свойства.
9. Определения определителей 1-го, 2-го и 3-го порядков.
10. Правила треугольников и Саррюса вычисления определителя 3-го порядка.
11. Свойства определителей.
12. Определения минора и алгебраического дополнения элемента определителя.
13. Теорема о разложении определителя по элементам строки (столбца).

В предлагаемой литературе [1–4, 9] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

Материалы практического занятия и задания для самостоятельного решения изложены в разделе 1, параграфы 1.1 и 1.2 пособия [11].

Тема 1.2. Обратная матрица. Ранг матрицы

Перечень изучаемых вопросов:

Понятие обратной матрицы. Условие существования обратной матрицы.

Правило нахождения обратной матрицы. Свойства обратных матриц. Простейшие матричные уравнения и их решения. Минор матрицы. Ранг матрицы. Нахождение ранга матрицы методом окаймляющих миноров. Элементарные преобразования над строками матриц. Нахождение ранга матрицы при помощи элементарных преобразований.

Методические указания:

Для успешного изучения темы следует повторить материал предыдущего занятия, а именно: вычисление определителей, нахождение алгебраического дополнения элемента определителя, виды матриц, операции умножения матриц и ее свойства, транспонирования матриц.

Студент должен обратить внимание, что обратные матрицы можно находить только для невырожденных матриц. Следует выучить формулу нахождения обратной матрицы и уметь правильно ее применять. С помощью обратной матрицы обучающийся должен отработать методику решения простейших матричных уравнений.

Изучение темы ранга матрицы начинается с понятия минора матрицы, не следует путать с понятием минора элемента определителя матрицы. Нужно выучить определение ранга матрицы и понимать его свойства. Студент должен освоить два метода вычисления ранга матрицы: окаймляющих миноров и с помощью элементарных преобразований. Последний позволит в дальнейшем исследовать системы линейных уравнений.

Контрольные вопросы:

1. Определение невырожденной матрицы.
2. Определение обратной матрицы.
3. Условие существования обратной матрицы.
4. Формула для нахождения обратной матрицы.
5. Свойства обратных матриц.
6. Простейшие матричные уравнения и их решения.
7. Определение минора матрицы.

8. Определение ранга матрицы, свойства ранга матрицы.
9. Определение базисного минора матрицы.
10. Нахождение ранга матрицы методом окаймляющих миноров.
11. Определение элементарных преобразований над строками (столбцами) матрицы.
12. Нахождение ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.

В предлагаемой литературе [1–4, 9] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

Материалы практического занятия и задания для самостоятельного решения изложены в разделе 1, параграфы 1.3, 1.4 пособия [11].

Тема 1.3. Решение систем линейных уравнений

Перечень изучаемых вопросов:

Понятие системы линейных уравнений. Матричная форма записи. Совместная (несовместная), определенная (неопределенная), однородная системы линейных уравнений. Решение системы. Эквивалентные (равносильные) системы. Критерий совместности систем линейных уравнений. Теоремы о количестве решений совместной системы. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера. Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

Методические указания:

Решение систем линейных алгебраических уравнений – одна из классических задач линейной алгебры, во многом определившая ее объекты и методы. Кроме того, системы линейных уравнений и методы их решения играют важную роль во многих прикладных задачах.

При изучении этой темы обучающийся должен освоить перевод системы на матричный язык. Предварительно рекомендуется повторить понятия матрицы, обратной матрицы, действия над матрицами, определение ранга матрицы, способ нахождения ранга матрицы с помощью элементарных преобразований. Для исследования систем на совместность студент должен изучить критерий совместности (теорему Кронекера-Капелли).

Системы линейных уравнений, у которых количество уравнений совпадает с количеством неизвестных и определитель основной матрицы системы отличен от нуля, являются определенными. Студент должен научиться

решать их методами Крамера и обратной матрицы. Для решения системы методом Крамера обучающемуся следует повторить вычисление определителей. Для матричного метода нужно вспомнить изученный ранее алгоритм решения матричного уравнения.

Для практического решения систем с большим числом уравнений и неизвестных методы обратной матрицы и Крамера неудобны. В случае же, когда число уравнений в системе не совпадает с количеством неизвестных, эти методы применять нельзя. Универсальным способом решения систем линейных уравнений является метод Гаусса, в основе которого лежит принцип последовательного исключения неизвестных. Большинству первокурсников хорошо знаком этот метод для решения систем линейных уравнений 2-го порядка. Цель занятия заключается в освоении матричной реализации этого метода на примере систем произвольного числа уравнений с произвольным количеством неизвестных. Студенту следует обратить внимание, что алгоритм преобразования матрицы в трапециевидную совпадает с первым этапом алгоритма метода Гаусса. В рамках этого занятия обучающийся должен освоить вторую часть алгоритма метода Гаусса и уметь правильно записывать общее решение системы. В заключении рассматривается реализация метода Гаусса на примере однородных систем. Студент должен понимать особенности использования метода для однородных систем и уметь находить фундаментальный набор (систему) решений.

Контрольные вопросы:

1. Понятие системы линейных уравнений, краткая форма записи.
2. Основная, расширенная матрицы системы и столбец свободных членов.
3. Матричная форма записи системы линейных уравнений.
4. Определения совместной (несовместной), определенной (неопределенной), однородной системы линейных уравнений.
5. Решение системы. Эквивалентные (равносильные) системы.
6. Критерий совместности системы линейных уравнений.
7. Теоремы о количестве решений совместной системы.
8. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.
9. Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы.
10. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
11. Метод Гаусса решения однородных систем линейных уравнений.
12. Фундаментальный набор (система) решений.

В предлагаемой литературе [1–4, 9] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

Материалы практического занятия и задания для самостоятельного решения изложены в разделе 1, параграфы 1.5–1.7 пособия [11].

Раздел 2. Векторная алгебра

Тема 2.1. Векторы

Перечень изучаемых вопросов:

Векторы, основные понятия. Линейные операции над векторами и их свойства. Проекция вектора на ось, свойства. Декартовы координаты вектора на плоскости и в пространстве. Направляющие косинусы вектора. Линейные операции над векторами в координатах. Условия коллинеарности и компланарности векторов. Координаты точки. Задача о делении отрезка в данном соотношении.

Методические указания:

Векторная алгебра — это раздел, в котором изучаются векторы, линейные операции над векторами (сложение векторов и умножение вектора на число) и различные произведения векторов (скалярное, векторное, смешанное). Вектор является фундаментальным понятием курсов линейной алгебры, линейного программирования и многих других математических дисциплин; без него невозможно представить современное изложение механики, теории относительности, теоретической физики.

По итогам изучения этой темы обучающиеся должны знать: определение вектора (геометрического и свободного) и основные понятия, связанные с ним; линейные операции над векторами и их свойства. Следует обратить внимание, что такие операции уже встречались ранее, например в арифметике, теории матриц. В каждом конкретном случае они определялись по-своему, в соответствии со спецификой тех множеств, для которых они рассматриваются (числа, матрицы). Но свойства этих операций одинаковы. Именно эта общность и сближает их. При решении задач студенту следует учесть особенности применяемой терминологии.

Важной составляющей математического аппарата векторной алгебры является разложение вектора по базису, что позволяет сводить действия над векторами к соответствующим операциям над их координатами. Подобный подход оказывается весьма продуктивным и широко применяется для решения задач линейной алгебры, теории дифференциальных уравнений и математического анализа. В рамках этой темы студент должен научиться: вычислять длину вектора и направляющие косинусы; выполнять действия над

векторами, заданными координатами; проверять коллинеарность (сонаправленность) и компланарность векторов по их координатам; определять орт вектора; раскладывать вектор по базису, определять координаты точки, делящей отрезок в заданном отношении.

Перед изучением темы студенту нужно повторить вычисление определителей и методы решения систем линейных уравнений.

Контрольные вопросы:

1. Определение геометрического вектора.
2. Определения коллинеарных и компланарных векторов.
3. Определения сонаправленных и противоположно направленных векторов.
4. Определение орта вектора.
5. Определение равных векторов.
6. Определение свободного вектора.
7. Операция сложения векторов: правило треугольника и правило параллелограмма. Свойства операции сложения.
8. Правило сложения n векторов.
9. Операция умножения вектора на число, свойства.
10. Определение разности двух векторов.
11. Определение проекции вектора на ось.
12. Теорема о нахождении проекции вектора на ось по известной длине вектора и углу между вектором и осью.
13. Свойства проекций векторов на ось.
14. Прямоугольная декартова система координат на плоскости и в пространстве. Разложение вектора по координатному базису. Координаты вектора.
15. Направляющие косинусы вектора.
16. Действия над векторами в координатах.
17. Критерий коллинеарности векторов в координатах.
18. Критерий компланарности векторов в координатах.
19. Радиус-вектор точки. Связь координат вектора с координатами его начала и конца.
20. Задача о делении отрезка в данном соотношении.

В предлагаемой литературе [1–4, 10] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

Материалы практического занятия и задания для самостоятельного решения изложены в разделе 2, параграфы 2.1–2.3 пособия [11].

Тема 2.2. Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов

Перечень изучаемых вопросов:

Определение скалярного произведения векторов и его свойства. Координатное представление скалярного произведения. Геометрический и физический смысл скалярного произведения. Определение векторного произведения и его свойства. Координатное представление векторного произведения. Геометрический и физический смысл векторного произведения. Определение смешанного произведения векторов и его свойства. Координатное представление смешанного произведения. Геометрический смысл смешанного произведения.

Методические указания:

Тема «Скалярное произведение векторов» проходит в рамках школьной программы по геометрии, поэтому, как правило, не вызывает затруднений у обучающихся. Однако перед изучением векторного и смешанного произведения полезно повторить эту тему и разобрать ряд задач, которые ранее не встречались в школе. Студент должен уметь вычислять: скалярное произведение векторов по определению и применять его свойства; скалярное произведение векторов, заданных координатами; угол между векторами; проекцию вектора на вектор, используя скалярное произведение векторов; а также проверять перпендикулярность векторов; применять скалярное произведение при решении физических задач.

Перед изучением темы «Векторное и смешанное произведения векторов» студенту рекомендуется вспомнить правила вычисления определителей второго и третьего порядков, теорему о разложении определителя по элементам строки. На практических занятиях студент должен научиться: вычислять векторное и смешанное произведения векторов по определению и в случае, когда векторы заданы своими координатами с учетом свойств этих произведений; применять соответствующие произведения при решении геометрических и физических задач.

По итогам изучения этой темы студент должен освоить различные виды произведений векторов, понимать их свойства и различать их между собой.

Контрольные вопросы:

1. Определение скалярного произведения и его связь с проекциями векторов.
2. Свойства скалярного произведения.
3. Координатное представление скалярного произведения.

4. Вычисление угла между векторами через их скалярное произведение.
5. Вычисление проекции вектора на вектор и длины вектора через скалярное произведение.
6. Геометрический смысл скалярного произведения векторов.
7. Физический смысл скалярного произведения векторов.
8. Понятия правой и левой тройки векторов.
9. Определение векторного произведения.
10. Свойства векторного произведения.
11. Координатное представление векторного произведения.
12. Геометрический смысл векторного произведения.
13. Физический смысл векторного произведения.
14. Определение смешанного произведения векторов.
15. Свойства смешанного произведения векторов.
16. Критерий компланарности тройки векторов.
17. Координатное представление смешанного произведения.
18. Геометрический смысл смешанного произведения.

В предлагаемой литературе [1–4, 10] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

Материалы практического занятия и задания для самостоятельного решения изложены в разделе 2, параграфы 2.4, 2.5, 2.6 пособия [11].

Тема 2.3. Линейное пространство

Перечень изучаемых вопросов:

Линейное пространство, примеры. Определение линейно-зависимой и линейно-независимой системы векторов. Размерность и базис пространства. Линейные операторы. Собственные числа и векторы линейного оператора.

Методические указания:

В данной теме вектор вводится аксиоматически, как элемент векторного (линейного) пространства. Свойства векторов и операций над ними описываются системой аксиом векторного пространства. Линейное пространство обобщает понятие пространства векторов на плоскости или в трехмерном пространстве и действия над ними. Студент должен владеть понятиями: линейное пространство, подпространство; линейно-зависимая и линейно-независимая система векторов; базис пространства; евклидово пространство.

Контрольные вопросы:

1. Определение линейного пространства.
2. Примеры линейных пространств.
3. Линейное подпространство, примеры.
4. Понятия линейной зависимости и независимости системы векторов.
5. Свойства линейной зависимости и независимости.
6. Геометрический смысл линейной зависимости системы из двух и из трех векторов.
7. Базис пространства, его размерность.
8. Евклидово пространство.

В предлагаемой литературе [1–4, 10] студенту необходимо изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

Раздел 3. Аналитическая геометрия на плоскости

Тема 3.1. Система координат на плоскости: основные понятия. Декартова и полярная системы координат. Уравнение линии на плоскости. Прямая на плоскости

Перечень изучаемых вопросов:

Система координат на плоскости: основные понятия. Прямоугольная (декартова) система координат. Полярная система координат. Связь между полярными и декартовыми координатами точки на плоскости. Уравнение линии на плоскости. Основные виды уравнения прямой: общее уравнение, каноническое и параметрические уравнения, уравнение прямой по двум точкам, уравнение прямой «в отрезках», уравнения с угловым коэффициентом, нормальное уравнение прямой. Угол между прямыми на плоскости. Условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости. Расстояние от точки до прямой.

Методические указания:

Аналитическая геометрия – область математики, в которой геометрические объекты изучаются средствами алгебры (линейной и векторной). Важно научиться анализировать геометрические свойства линии на основе анализа их уравнений.

По итогам изучения данной темы студент должен

– *знать*: различные системы координат на плоскости, способы задания прямой на плоскости; формулы для вычисления угла между прямыми; формулу

расстояния между точкой и прямой;

– *уметь*: переходить от прямоугольных декартовых координат к полярным и наоборот; составлять уравнение геометрического места точек на плоскости; составлять уравнение линии в полярных координатах; узнавать прямую по ее общему, каноническому, параметрическому и т. д. уравнениям; записывать уравнение прямой для любого способа ее задания; исследовать взаимное расположение прямых на плоскости; определять угол между прямыми на плоскости, точку их пересечения; определять расстояние между точкой и прямой на плоскости; определять точку, симметричную относительно данной прямой.

Для успешного освоения этой темы следует повторить тему «Векторы».

Контрольные вопросы:

1. Понятие системы координат на плоскости. Прямоугольная (декартова) система координат.
2. Полярная система координат.
3. Связь между полярными и декартовыми координатами точки на плоскости.
4. Линия на плоскости: основные понятия.
5. Уравнение прямой по точке и нормальному вектору.
6. Общее уравнение прямой. Частные случаи.
7. Канонические уравнения прямой.
8. Параметрическое уравнение прямой.
9. Уравнение прямой «в отрезках».
10. Уравнения прямой с угловым коэффициентом.
11. Нормальное уравнение прямой.
12. Угол между двумя прямыми.
13. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
14. Формула для нахождения расстояния от точки до прямой.

В предлагаемой литературе [1–4] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

Материалы практического занятия и задания для самостоятельного решения изложены в разделе 3, параграфы 3.1, 3.2 пособия [11].

Тема 3.2 Кривые второго порядка

Перечень изучаемых вопросов:

Уравнение линии второго порядка в общем виде. Окружность: определение, каноническое уравнение. Эллипс: определение, каноническое уравнение, эксцентриситет, директрисы. Гипербола: определение, каноническое уравнение, асимптоты, эксцентриситет, директрисы, сопряженные гиперболы. Парабола: определение, каноническое уравнение.

Методические указания:

В данной теме кривые второго порядка определяются как геометрическое место точек, обладающих некоторым свойством. Изучение кривых второго порядка имеет весьма важное как теоретическое, так и прикладное значение. Знания, полученные по теме «Кривые второго порядка», применяются при изучении математического анализа, физики, теоретической механики.

По итогам изучения данной темы студент должен

– *знать*: определения окружности, эллипса, гиперболы, параболы; канонические уравнения этих кривых; геометрический смысл параметров, входящих в уравнение, и соотношения между ними;

– *уметь*: приводить уравнение линии второго порядка к каноническому виду; по уравнению кривой сделать чертеж, определив параметры, фокусы, директрисы, асимптоты; по чертежу записать каноническое уравнение кривой.

Контрольные вопросы:

1. Уравнение линии второго порядка в общем виде.
2. Окружность: определение, каноническое уравнение.
3. Эллипс: определение, каноническое уравнение.
4. Эллипс: эксцентриситет, директрисы.
5. Гипербола: определение, каноническое уравнение.
6. Гипербола: эксцентриситет, директрисы, асимптоты.
7. Парабола. Исследование формы параболы по ее уравнению.
8. Уравнения линий второго порядка с осями симметрии, параллельными координатным осям.

В предлагаемой литературе [1–4] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

Материалы практического занятия и задания для самостоятельного решения изложены в разделе 3, параграф 3.3 пособия [11].

Раздел 4. Аналитическая геометрия в пространстве

Тема 4.1. Плоскость

Перечень изучаемых вопросов:

Уравнения плоскости в пространстве: уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору; общее уравнение плоскости; частные случаи общего уравнения плоскости; уравнение плоскости, проходящей через три данные точки; уравнение плоскости в отрезках; нормальное уравнение плоскости. Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей. Расстояние от точки до плоскости.

Методические указания:

Обобщением уравнения прямой на плоскости является уравнение плоскости в пространстве. Студенту следует обратить внимание, что некоторые уравнения прямой на плоскости можно получить из соответствующих уравнений плоскости, полагая аппликату равной нулю.

По итогам работы над темой студент должен

– *знать*: различные виды уравнения плоскости в пространстве; формулу для нахождения угла между плоскостями; формулу для нахождения расстояния от точки до плоскости;

– *уметь*: составлять уравнение плоскости по исходным данным; определять расположение плоскости по ее уравнению; вычислять расстояние от точки до плоскости; вычислять угол между плоскостями; определять взаимное расположение плоскостей; решать основные задачи на плоскость.

Перед изучением темы студенту рекомендуется вспомнить правила вычисления определителей, теорему о разложении определителя по элементам строки, темы: «Векторы», «Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов».

Контрольные вопросы:

1. Уравнение плоскости, проходящей через точку перпендикулярно вектору.
2. Общее уравнение плоскости.
3. Частные случаи общего уравнения плоскости.
4. Уравнение плоскости, проходящей через три точки.
5. Уравнение плоскости «в отрезках».
6. Нормальное уравнение плоскости.

7. Формула для нахождения угла между плоскостями.
8. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.
9. Формула для нахождения расстояния от точки до плоскости.

В предлагаемой литературе [1–4] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

Материалы практического занятия и задания для самостоятельного решения изложены в разделе 3, параграф 3.3 пособия [11].

Тема 4.2. Прямая в пространстве

Перечень изучаемых вопросов:

Основные виды уравнения прямой в пространстве: канонические уравнения прямой; параметрическое уравнение прямой; общее уравнение прямой. Угол между прямыми в пространстве. Взаимное расположение прямых в пространстве.

Методические указания:

При переходе к трехмерному пространству с заданной декартовой прямоугольной системой координат происходит естественное обобщение уравнений прямой на плоскости на трехмерный случай. Студенту следует обратить внимание, что некоторые уравнения прямой на плоскости можно получить из соответствующих уравнений прямой в пространстве, полагая аппликату равной нулю.

По итогам работы над темой студент должен

– *знать*: различные виды уравнения прямой в пространстве; формулу для нахождения угла между прямыми;

– *уметь*: составлять уравнение прямой в пространстве по исходным данным; определять положение прямой в пространстве по ее уравнению; вычислять угол между прямыми в пространстве; определять взаимное расположение прямых в пространстве; вычислять расстояние от точки до прямой в пространстве.

Перед изучением темы студенту рекомендуется вспомнить правила вычисления определителей, теорему о разложении определителя по элементам строки, темы: «Векторы», «Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов».

Контрольные вопросы:

1. Каноническое уравнение прямой в пространстве.
2. Параметрическое уравнение прямой в пространстве.
3. Уравнение прямой, проходящей через две точки.
4. Прямая как линия пересечения двух непараллельных плоскостей.
5. Формула для нахождения угла между прямыми в пространстве.
6. Условия перпендикулярности двух прямых в пространстве.
7. Условия параллельности и совпадения двух прямых в пространстве.
8. Условия пересечения и скрещивания двух прямых в пространстве.
9. Формула для нахождения расстояния от точки до прямой.

В предлагаемой литературе [1–4] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

Материалы практического занятия и задания для самостоятельного решения изложены в разделе 3, параграф 3.3 пособия [11].

Тема 4.3. Прямая и плоскость в пространстве

Перечень изучаемых вопросов:

Угол между прямой и плоскостью. Взаимное расположение прямой и плоскости.

Методические указания:

Перед изучением темы студенту рекомендуется вспомнить правила вычисления определителей, теорему о разложении определителя по элементам строки, темы: «Векторы», «Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов».

После изучения этой темы студент должен уметь: вычислять угол между прямой и плоскостью; определять взаимное расположение прямой и плоскости; определять точку пересечения прямой и плоскости; определять проекцию точки на плоскость.

Контрольные вопросы:

1. Формула для нахождения угла между прямой и плоскостью.
2. Условия параллельности прямой и плоскости.
3. Условия перпендикулярности прямой и плоскости.
4. Пересечение прямой с плоскостью.
5. Условие принадлежности прямой плоскости.

В предлагаемой литературе [1–4] студенту необходимо для освоения темы изучить относящиеся к данной теме главы и разделы.

Материалы практического занятия и задания для самостоятельного решения изложены в разделе 4, параграф 4.3 пособия [11].

В качестве самостоятельной работы студента предлагается выполнение индивидуального практического задания по разделу 4. Задания приведены в пособии [11].

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

Внеаудиторная самостоятельная работа в рамках данной дисциплины включает в себя:

– подготовку к аудиторным занятиям (лекциям, практическим занятиям) и выполнение соответствующих заданий;

– самостоятельную работу над отдельными темами учебной дисциплины в соответствии с тематическим планом;

– выполнение контрольной работы для студента заочной формы обучения;

– подготовку к экзамену.

3.1. Подготовка к лекционным занятиям

При подготовке к лекции рекомендуется повторить ранее изученный материал. Рекомендуется вести конспект, главное требование к которому – быть систематическим, логически связанным, ясным и кратким. По окончании занятия обязательно в часы самостоятельной подготовки, по возможности в этот же день, повторить изучаемый материал и доработать конспект.

3.2. Подготовка к практическим занятиям

Подготовка к практическим занятиям предусматривает:

– изучение теоретических положений, лежащих в основе будущих расчетов или методики расчетов;

– детальную проработку учебного материала, рекомендованной литературы и методической разработки на предстоящее занятие.

3.3. Самостоятельная работа над отдельными темами учебной дисциплины

При организации самостоятельного изучения ряда тем лекционного курса обучаемый работает в соответствии с указаниями, выданными преподавателем.

Указания по изучению теоретического материала курса составляются дифференцированно по каждой теме и включают в себя следующие элементы: название темы; цели и задачи изучения темы; основные вопросы темы; характеристику основных понятий и определений, необходимых обучаемому для усвоения данной темы; список рекомендуемой литературы; наиболее важные фрагменты текстов рекомендуемых источников, в том числе таблицы, рисунки, схемы и т. п.; краткие выводы, ориентирующие обучаемого на определенную совокупность сведений, основных идей, ключевых положений, систему доказательств, которые необходимо усвоить; контрольные вопросы, предназначенные для самопроверки знаний.

3.4. Подготовка к экзамену

При подготовке к экзамену большую роль играют правильно подготовленные заранее записи и конспекты. В этом случае остается лишь повторить пройденный материал, учесть, что было пропущено, восполнить пробелы, закрепить ранее изученный материал.

В ходе самостоятельной подготовки к экзамену при анализе имеющегося теоретического и практического материала студенту также рекомендуется проводить постановку различного рода задач по изучаемой теме, что поможет в дальнейшем выявлять критерии принятия тех или иных решений, причины совершения определенного рода ошибок. При ответе на вопросы, поставленные в ходе самостоятельной подготовки, обучающийся вырабатывает в себе способность логически мыслить, искать в анализе событий причинно-следственные связи.

3.5. Методические указания по выполнению контрольных работ студентами заочной формы обучения

Учебным планом предусмотрено выполнение одной контрольной работы.

Формулировки и перечень задач выложены в ЭИОС.

В процессе изучения дисциплины выполняется одна расчетно-графическая работа.

Цель расчетно-графической работы – выявить у студентов знания методологических основ дисциплины, умение производить расчеты, привить обучающимся навыки самостоятельной работы с применением математических методов.

В ходе выполнения расчетно-графической работы обучающийся должен проявить умение самостоятельно работать с учебной и научной математической

литературой, применять математическую методологию в анализе конкретных данных.

Расчетно-графическая работа должна быть выполнена и представлена в срок, установленный графиком учебного процесса. Выполнение расчетно-графической работы включает следующие этапы: ознакомление с программой дисциплины, методическими рекомендациями по выполнению расчетно-графической работы; проработку соответствующих разделов дисциплины по рекомендованной учебной литературе, конспектам лекций; выполнение расчетов с применением освоенных методов.

Завершенная работа представляется для проверки преподавателю в установленные учебным графиком сроки. Преподаватель проверяет качество работы, отмечает положительные стороны, недостатки работы и оценивает ее. Обучающиеся, не подготовившие расчетно-графическую работу, к экзамену не допускаются.

Задания для расчетно-графических работ составляются преподавателем, который ведет данную дисциплину, и утверждаются кафедрой.

4. ТРЕБОВАНИЯ К АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

4.1. Текущая аттестация

В ходе изучения дисциплины студентам предстоит пройти следующие этапы текущей аттестации:

- выполнить задания по темам практических занятий;
- выполнить контрольную работу № 1 по теме «Матрицы и системы линейных уравнений»;
- выполнить контрольную работу № 2 по теме «Векторная алгебра»;
- выполнить контрольную работу № 3 по теме «Аналитическая геометрия на плоскости»;
- выполнить и защитить индивидуальное домашнее задание № 1 по теме «Элементы линейной алгебры»;
- выполнить и защитить индивидуальное домашнее задание № 2 по теме «Векторная алгебра»;
- выполнить и защитить индивидуальное домашнее задание № 3 по теме «Аналитическая геометрия на плоскости»;
- сдать коллоквиум по теме «Аналитическая геометрия в пространстве».

4.2. Условия получения положительной оценки

Промежуточная аттестация по дисциплине (первый семестр) проводится в форме экзамена.

Студенты очной формы обучения допускаются к экзамену при положительной аттестации по результатам текущего контроля, если:

- сдано более 60 % домашних заданий за семестр (по каждому разделу дисциплины);
- сданы все контрольные работы;
- сданы и защищены все индивидуальные типовые расчеты;
- сдан коллоквиум.

Студенты заочной формы обучения допускаются к экзамену при положительной аттестации по результатам текущего контроля и контрольной работы.

Образцы типовых тестов, индивидуальных заданий (для очной формы) и вариантов контрольных работ (для очной и заочной формы) приведены в ФОС по дисциплине.

Экзамен проводится следующим образом. Экзаменационные материалы для проведения экзамена компонуются в билеты (два вопроса и три практических задания), относящиеся к различным темам не менее чем двух разделов дисциплины. На усмотрение экзаменатора экзамен может быть проведен в письменной, устной или комбинированной форме. При наличии сомнений в отношении знаний и умений студента экзаменатор может (имеет право) задать дополнительные вопросы, а также дать дополнительное задание.

Шкала оценивания результатов освоения дисциплины на экзамене основана на четырехбалльной системе.

Оценка «отлично» выставляется в случае, если студент исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно излагает ответы на вопросы билета, умеет делать обобщения и выводы, владеет основными терминами и понятиями, умеет тесно увязывать теорию с практикой, свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний, использовал в ответе материал дополнительной литературы, дал правильные ответы на дополнительные вопросы.

Оценка «хорошо» выставляется в случае, если студент грамотно и по существу излагает ответ на вопросы билета, не допуская существенных неточностей, но при этом его ответы были недостаточно обоснованы, владеет

основными терминами и понятиями, правильно применяет теоретические положения при решении задач, использует в ответе материал только основной литературы; владеет основными умениями; при ответе на дополнительные вопросы допускал неточности и незначительные ошибки.

Оценка «удовлетворительно» выставляется в случае, если студент при ответе на вопросы продемонстрировал знания только основного материала, но допускал неточности, использовал недостаточно правильные формулировки, испытывает затруднения при решении задач; использовал при ответе только лекционный материал; при ответе на дополнительные вопросы допускал ошибки.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется в случае, если студент не смог объяснить смысл написанного им при подготовке к ответу текста; не ориентируется в терминологии дисциплины; не может ответить на дополнительные вопросы.

Компетенции в той части, в которой они должны быть сформированы в рамках изучения дисциплины, могут считаться сформированными в случае, если студент получил на экзамене положительную оценку.

ЛИТЕРАТУРА

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник / Д. В. Беклемишев. – 12-е изд., испр. – Москва: Физматлит, 2009. – 309 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=83040> (дата обращения: 04.07.2020). – ISBN 978-5-9221-0979-6. – Текст: электронный.

2. Ефимов, Н. В. Краткий курс аналитической геометрии: учебник / Н. В. Ефимов. – 13-е изд., стер. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 240 с. – ISBN 5-9221-0252-4.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

3. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учеб. / Д. В. Беклемишев. – 10-е изд., испр. – Москва: Физматлит, 2004. – 304 с. – ISBN 5-9221-0304-0.

4. Бугров, Я. С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: учебник / Я. С. Бугров; авт. Никольский, С. М. – 3-е изд., испр. и доп. – Москва: Наука, 1988. – 222 с.

5. Гусак, А. А. Пособие к решению задач по высшей математике / А. А. Гусак. – 3-е изд., стереотип. – Минск: БГУ, 1973. – 529 с.

6. Клетеник, Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии: учебное пособие / Д. В. Клетеник; ред.: Н. В. Ефимов. – 17-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Профессия, 2004. – 199 с – ISBN 5-93913-037-2.

7. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты. Учебное пособие / Л. А. Кузнецов. – Изд. 11-е, стер. – Санкт-Петербург [и др.]: Лань, 2008. – 238 с. – ISBN 978-5-8114-0574-9 (в пер.).

8. ЭИОС ФГБОУ ВО «КГТУ». 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств [Электронный ресурс] / АП Алгебра и геометрия. – URL: <https://eios.klgtu.ru/course/view.php?id=3001>.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ ПОСОБИЯ

9. Вялова, А. В. Матрицы и системы линейных уравнений: учеб. пособие для студ. вузов техн. спец. / А. В. Вялова. – Калининград: ФГОУ ВПО «КГТУ», 2009. – 63 с.

10. Вялова, А. В. Элементы векторной алгебры: учеб.-метод. пособие по дисциплине «Алгебра и аналитическая геометрия» для студ. вузов техн. спец. / А. В. Вялова; ФГОУ ВПО «КГТУ». – Калининград: ФГОУ ВПО «КГТУ», 2011. – 70 с.

11. Вялова, А. В. Алгебра и геометрия: учеб.-метод. пособие по практическим занятиям/ А. В. Вялова, Н. А. Елисеева, Т. В. Ермакова. – Калининград: Издательство ФГБОУ ВО «КГТУ», 2021. – 188 с.

Локальный электронный методический материал

Наталья Александровна Елисеева

МАТЕМАТИКА
РАЗДЕЛ «АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ»

Редактор М. А. Дмитриева

Уч.-изд. л. 1,1. Печ. л. 1,6

Издательство Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Калининградский государственный технический университет».
236022, Калининград, Советский проспект, 1.