

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»

Н. А. Елисеева

**МАТЕМАТИКА**  
**РАЗДЕЛ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»**

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины  
для студентов по направлению подготовки  
15.03.04 – Автоматизация технологических процессов и производств

Калининград  
Издательство ФГБОУ ВО «КГТУ»  
2023

Рецензент:

кандидат физико-математических наук, исполняющий обязанности  
заведующего кафедрой прикладной математики и информационных технологий  
ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет»  
Алексей Иванович Руденко

**Елисеева, Н. А.** Математика раздел «Математический анализ»: учебно-методическое пособие по изучению дисциплины для студентов по направлению подготовки 15.03.04 – Автоматизация технологических процессов и производств / **Н. А. Елисеева.** – Калининград : Изд-во ФГБОУ ВО «КГТУ», 2023. – 34 с.

В учебно-методическом пособии приведен тематический план изучения дисциплины. Представлены методические указания по изучению дисциплины. Даны рекомендации по подготовке к промежуточной аттестации и по выполнению самостоятельной работы. Пособие подготовлено в соответствии с требованиями утвержденной рабочей программы физико-математического модуля по дисциплине Математика раздел «Математический анализ» направления подготовки 15.03.04 – Автоматизация технологических процессов и производств.

Табл. 4, список лит. – 10 наименований

Учебно-методическое пособие рассмотрено и одобрено в качестве локального электронного методического материала на заседании кафедры прикладной математики и информационных технологий Института цифровых технологий ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет» 02.12.2022, протокол № 12.

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины рекомендовано к использованию в учебном процессе в качестве локального электронного методического материала методической комиссией ИЦТ от 17.01.2023, протокол № 11.

© Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Калининградский государственный технический  
университет», 2023 г.  
© Елисеева Н. А., 2023 г.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН.....	5
1.1 Тематический план для студентов очной формы обучения .....	5
1.2 Тематический план для студентов заочной формы обучения.....	10
2. СОДЕРЖАНИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ .....	14
Раздел 1. Введение в математический анализ .....	14
Раздел 2. Предел и непрерывность функций.....	16
Раздел 3. Дифференциальное исчисление функций одной действительной переменной.....	18
Раздел 4. Дифференциальное исчисление функций нескольких действительных переменных .....	21
Раздел 5. Неопределенный интеграл .....	23
Раздел 6. Определенный интеграл. Несобственные интегралы .....	24
Раздел 7. Дифференциальные уравнения .....	27
Раздел 8. Числовые и функциональные ряды .....	29
3. ТРЕБОВАНИЯ К АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ .....	31
3.1. Текущая аттестация.....	31
3.2. Условия получения положительной оценки .....	32
ЛИТЕРАТУРА .....	34

## ВВЕДЕНИЕ

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов направления подготовки 15.03.04 – Автоматизация технологических процессов и производств, изучающих дисциплину Математика раздел «Математический анализ».

Целью освоения дисциплины Математика раздел «Математический анализ» является формирование у студентов способности решать стандартные профессиональные задачи с применением методов математического анализа и моделирования.

В результате освоения дисциплины студент должен:

- знать: основные понятия и методы математического анализа, теории дифференциальных уравнений; простейшие приложения математического анализа в профессиональных дисциплинах;

- уметь: использовать методы математического анализа при решении типовых задач; использовать в познавательной профессиональной деятельности базовые знания дисциплины; переводить на математический язык простейшие проблемы, поставленные в терминах других предметных областей; приобретать новые математические знания, используя образовательные и информационные технологии;

- владеть: методами построения математических моделей типовых задач; математической логикой, необходимой для постановки и решения профессиональных задач.

При изучении дисциплины Математика раздел «Математический анализ» используются знания, умения и навыки довузовской подготовки по математике (умение проводить алгебраические преобразования, решать уравнения и неравенства, знание основных тригонометрических формул, умение проводить тригонометрические преобразования и решать тригонометрические уравнения и неравенства, понимание функции, графика функции и основных ее свойств, знание графиков и свойств основных элементарных функций), а также знания, умения и навыки, получаемые студентами при параллельном освоении дисциплины Математика раздел «Алгебра и геометрия».

В предлагаемом пособии представлен тематический план, содержащий перечень изучаемых тем, обязательных практических занятий, мероприятий текущей аттестации и отводимое на них аудиторное время (занятия в соответствии с расписанием) и самостоятельную работу. При формировании личного образовательного плана на семестр обучающемуся следует оценивать рекомендуемое время на изучение дисциплины и возможность больших временных затрат на выполнение отдельных заданий или проработку отдельных тем.

В разделе «Содержание дисциплины» приведены подробные сведения о вопросах, рассматриваемых в данном курсе. Представлены методические рекомендации преподавателя для самостоятельной работы студента. Каждая тема включает ссылку на литературу (или иной информационный ресурс), а также контрольные вопросы для самопроверки.

Раздел «Текущая аттестация» содержит описание обязательных мероприятий, контроля, самостоятельной работы и усвоения разделов или отдельных тем дисциплины. Изложены требования к промежуточной аттестации по дисциплине – зачету и экзамену.

Помимо данного пособия, студентам следует использовать материалы, размещенные в соответствующем данной дисциплине разделе ЭИОС [10], в которые более оперативно вносятся изменения для адаптации дисциплины под конкретную группу.

## 1. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

### 1.1 Тематический план для студентов очной формы обучения

Таблица 1. Тематический план первого семестра

№	Раздел (модуль) дисциплины	Тема	Объем аудиторной работы, ч	Объем самостоятельной работы, ч
1	2	3	4	5
<b>Лекции</b>				
1	Введение в математический анализ	<b>Тема 1.</b> Множество вещественных чисел. Комплексные числа (самостоятельное изучение). Функция. Способы задания функции. Числовые последовательности. Предел числовой последовательности. Свойства сходящихся последовательностей	2	6
2	Предел и непрерывность функций действительной переменной	<b>Тема 2.</b> Предел функции. Основные теоремы о пределах. Замечательные пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие функции	2	1
		<b>Тема 3.</b> Эквивалентные бесконечно малые функции. Непрерывность функции. Основные свойства непрерывных функций. Точки разрыва и их классификация	2	1

Продолжение таблицы 1

	2	3	4	5
3	Дифференциальное исчисление функций одной действительной переменной	<b>Тема 4.</b> Определение производной. Геометрический и механический смысл производной. Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции. Основные правила дифференцирования. Производные основных элементарных функций. Производная сложной и обратной функции. Понятие о производных высших порядков	2	1
		<b>Тема 5.</b> Дифференциал, его свойства. Дифференциалы высших порядков. Основные теоремы дифференциального исчисления. Правила Лопиталья	2	2
		<b>Тема 6.</b> Исследование функций при помощи производных и построение графиков	2	2
4	Дифференциальное исчисление функций нескольких действительных переменных	<b>Тема 7.</b> Функции нескольких переменных. Область определения, предел, непрерывность. Частные производные, полный дифференциал	2	2
		<b>Тема 8.</b> Производная по направлению, градиент. Частные производные высших порядков. Экстремум функции нескольких переменных	2	2
			<b>16</b>	<b>17</b>
<b>Практические занятия</b>				
1	Введение в математический анализ	<b>Практическое занятие 1.</b> Вычисление пределов числовых последовательностей	2	2
2	Предел и непрерывность функций действительной переменной	<b>Практическое занятие 2.</b> Вычисление пределов функций	2	2
		<b>Практическое занятие 3.</b> Вычисление пределов функций	2	6
3	Дифференциальное исчисление функций одной действительной переменной	<b>Практическое занятие 4.</b> Вычисление производной сложной функции (1 час). <i>Контрольная работа № 1 по теме «Предел и непрерывность функции одной переменной» (1 час)</i>	2	2
		<b>Практическое занятие 5.</b> Вычисление производных сложной функции, неявной функции, параметрически заданной функции. Логарифмическое дифференцирование. Вычисление дифференциала функции	2	6
		<b>Практическое занятие 6.</b> Вычисление производных высших порядков (1 час). <i>Контрольная работа № 2 по теме «Дифференциальное исчисление функции одной переменной» (1 час)</i>	2	1

Продолжение таблицы 1

1	2	3	4	5
4	Дифференциальное исчисление функций нескольких действительных переменных	<b>Практическое занятие 7.</b> Вычисление частных производных, полного дифференциала	2	4
<b>Рубежный (текущий) и итоговый контроль</b>			<b>14</b>	<b>23</b>
	Предел и непрерывность функций действительной переменной	Контрольная работа № 1	1	0
	Дифференциальное исчисление функций одной действительной переменной	Контрольная работа № 2	1	0
		Итоговый контроль (зачет)	<b>2</b>	<b>0</b>
		<b>Всего за первый семестр</b>	<b>32</b>	<b>40</b>

Таблица 2. Тематический план второго семестра

№	Раздел (модуль) дисциплины	Тема	Объем аудиторной работы, ч	Объем самостоятельной работы, ч
1	2	3	4	5
<b>Лекции</b>				
1	Неопределенный интеграл	<b>Тема 1.</b> Первообразная функция и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Интегралы от основных элементарных функций. Непосредственное интегрирование	2	1
		<b>Тема 2.</b> Основные методы интегрирования: метод замены переменной, метод интегрирования по частям, интегрирование рациональных функций	2	1
		<b>Тема 3.</b> Интегрирование рациональных (дробных), тригонометрических и иррациональных выражений. О функциях, интегралы от которых не выражаются через элементарные функции	2	1

Продолжение таблицы 2

1	2	3	4	5
2	Определенный интеграл. Несобственные интегралы	<b>Тема 4.</b> Определенный интеграл, его свойства. Формула Ньютона-Лейбница	2	1
		<b>Тема 5.</b> Методы вычисления определенных интегралов. Геометрические и физические приложения определенного интеграла	2	1
		<b>Тема 6.</b> Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций	2	1
3	Дифференциальные уравнения	<b>Тема 7.</b> Дифференциальные уравнения: основные понятия и определения. Дифференциальные уравнения первого порядка. Теорема существования и единственности решения задачи Коши	2	1
		<b>Тема 8.</b> Интегрирование простейших типов дифференциальных уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения, линейные уравнения	2	1
		<b>Тема 9.</b> Линейные дифференциальные уравнения первого порядка, уравнение Бернулли, уравнения в полных дифференциалах	2	1
		<b>Тема 10.</b> Дифференциальные уравнения высших порядков, основные понятия. Уравнения, допускающие понижение порядка	2	1
		<b>Тема 11.</b> Линейные однородные уравнения второго порядка. Структура общего решения однородного уравнения. Линейные неоднородные уравнения второго порядка. Структура общего решения неоднородного уравнения	2	1
		<b>Тема 12.</b> Метод Лагранжа (вариации постоянных) решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	2	1
4	Числовые и функциональные ряды	<b>Тема 13.</b> Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Свойства сходящихся рядов. Необходимое условие сходимости. Признаки сходимости рядов с положительными членами	2	1
		<b>Тема 14.</b> Знакопередающиеся и знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость рядов. Функциональные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов. Степенные ряды. Теорема Абеля	2	1
		<b>Тема 15.</b> Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды	2	2
			<b>30</b>	<b>16</b>



Продолжение таблицы 2

1	2	3	4	5
<b>Практические занятия</b>				
1	Неопределенный интеграл	<b>Практическое занятие 1.</b> Непосредственное интегрирование. Метод подведения переменной под знак дифференциала	2	3
		<b>Практическое занятие 2.</b> Метод замены переменной, метод интегрирования по частям	2	3
		<b>Практическое занятие 3.</b> Интегрирование рациональных и тригонометрических функций	2	3
2	Определенный интеграл. Несобственные интегралы	<b>Практическое занятие 4.</b> Вычисление определенного интеграла	2	3
		<b>Практическое занятие 5.</b> Решение задач на геометрические приложения определенного интеграла	2	6
		<b>Практическое занятие 6.</b> Вычисление несобственных интегралов 1-го и 2-го рода	2	2
3	Дифференциальные уравнения	<b>Практическое занятие 7.</b> <i>Контрольная работа № 3 и защита Индивидуального задания № 2</i>	2	0
		<b>Практическое занятие 8.</b> Решение уравнений с разделяющимися переменными, однородных уравнений	2	3
		<b>Практическое занятие 9.</b> Решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка, уравнение Бернулли	2	3
		<b>Практическое занятие 10.</b> Решение неполных дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка. Решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами	2	3
		<b>Практическое занятие 11.</b> Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида	2	3
		<b>Практическое занятие 12.</b> Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида	2	6
		<b>Практическое занятие 13.</b> <i>Контрольная работа № 4 и защита индивидуального задания № 3</i>	2	0
4	Числовые и функциональные ряды	<b>Практическое занятие 14.</b> Числовые ряды с положительными членами (определение сходимости). Знакопередающиеся ряды (определение абсолютной и условной сходимости)	2	4
		<b>Практическое занятие 15.</b> Степенные ряды (определение области сходимости). Разложение функций в степенные ряды (ряды Тейлора и Маклорена)	2	3
			<b>30</b>	<b>45</b>

Продолжение таблицы 2

1	2	3	4	5
<b>Рубежный (текущий) и итоговый контроль</b>				
	Определенный интеграл. Несобственные интегралы	<i>Контрольная работа № 3</i>	2	0
	Дифференциальные уравнения	<i>Контрольная работа № 4</i>	2	0
		Итоговый контроль (экзамен)	<b>42,2</b>	0
<b>Всего за второй семестр</b>			<b>102,2</b>	<b>61</b>

## 1.2 Тематический план для студентов заочной формы обучения

Таблица 3. Тематический план первого семестра для студентов заочной формы обучения

№	Раздел (модуль) дисциплины	Тема	Объем аудиторной работы, ч	Объем самостоятельной работы, ч
1	2	3	4	5
<b>Лекции</b>				
1	Введение в математический анализ	<b>Введение (установочная лекция)</b> <b>Тема 1.</b> Множество вещественных чисел. Комплексные числа (самостоятельное изучение). Функция. Способы задания функции. Числовые последовательности. Предел числовой последовательности. Свойства сходящихся последовательностей	2	9
2	Предел и непрерывность функций действительной переменной	<b>Тема 2.</b> Предел функции. Основные теоремы о пределах. Замечательные пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие функции	0	2
		<b>Тема 3.</b> Эквивалентные бесконечно малые функции. Непрерывность функции. Основные свойства непрерывных функций. Точки разрыва и их классификация	0	2
3	Дифференциальное исчисление функций одной действительной переменной	<b>Тема 4.</b> Определение производной. Геометрический и механический смысл производной. Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции. Основные правила дифференцирования. Производные основных элементарных функций. Производная сложной и обратной функции. Понятие о производных высших порядков	1	2
		<b>Тема 5.</b> Дифференциал, его свойства. Дифференциалы высших порядков. Основные теоремы дифференциального исчисления. Правила Лопитала	0	2
		<b>Тема 6.</b> Исследование функций при помощи производных и построение графиков	0	2

Продолжение таблицы 3

1	2	3	4	5
4	Дифференциальное исчисление функций нескольких действительных переменных	<b>Тема 7.</b> Функции нескольких переменных. Область определения, предел, непрерывность. Частные производные, полный дифференциал	1	2
		<b>Тема 8.</b> Производная по направлению, градиент. Частные производные высших порядков. Экстремум функции нескольких переменных	0	2
			<b>4</b>	<b>23</b>
<b>Практические занятия</b>				
1	Введение в математический анализ	<b>Практическое занятие 1.</b> Вычисление пределов числовых последовательностей	0	3
2	Предел и непрерывность функций действительной переменной	<b>Практическое занятие 2.</b> Вычисление пределов функций	1	3
		<b>Практическое занятие 3.</b> Вычисление пределов функций	0	3
3	Дифференциальное исчисление функций одной действительной переменной	<b>Практическое занятие 4.</b> Вычисление производной сложной функции	1	3
		<b>Практическое занятие 5.</b> Вычисление производных сложной функции, неявной функции, параметрически заданной функции. Логарифмическое дифференцирование. Вычисление дифференциала функции	1	3
		<b>Практическое занятие 6.</b> Вычисление производных высших порядков	0	3
4	Дифференциальное исчисление функций нескольких действительных переменных	<b>Практическое занятие 7.</b> Вычисление частных производных, полного дифференциала	1	3
				<b>21</b>
<b>Рубежный (текущий) и итоговый контроль</b>				
		Итоговый контроль (зачет)	<b>4</b>	<b>14</b>
		<b>Всего за первый семестр</b>	<b>12</b>	<b>58</b>

Таблица 4. Тематический план второго семестра для студентов заочной формы обучения

№	Раздел (модуль) дисциплины	Тема	Объем аудиторной работы, ч	Объем самостоятельной работы, ч
1	2	3	4	5
<b>Лекции</b>				
1	Неопределенный интеграл	<b>Тема 1.</b> Первообразная функция и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Интегралы от основных элементарных функций. Непосредственное интегрирование	0	2
		<b>Тема 2.</b> Основные методы интегрирования: метод замены переменной, метод интегрирования по частям, интегрирование рациональных функций	0	2

Продолжение таблицы 4

1	2	3	4	5
		<b>Тема 3.</b> Интегрирование рациональных (дробных), тригонометрических и иррациональных выражений. О функциях, интегралы от которых не выражаются через элементарные функции	0	2
2	Определенный интеграл. Несобственные интегралы	<b>Тема 4.</b> Определенный интеграл, его свойства. Формула Ньютона-Лейбница	0	2
		<b>Тема 5.</b> Методы вычисления определенных интегралов. Геометрические и физические приложения определенного интеграла	0	2
		<b>Тема 6.</b> Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций	0	2
3	Дифференциальные уравнения	<b>Тема 7.</b> Дифференциальные уравнения: основные понятия и определения. Дифференциальные уравнения первого порядка. Теорема существования и единственности решения задачи Коши	0	2
		<b>Тема 8.</b> Интегрирование простейших типов дифференциальных уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения, линейные уравнения	0	2
		<b>Тема 9.</b> Линейные дифференциальные уравнения первого порядка, уравнение Бернулли, уравнения в полных дифференциалах	0	2
		<b>Тема 10.</b> Дифференциальные уравнения высших порядков, основные понятия. Уравнения, допускающие понижение порядка	0	2
		<b>Тема 11.</b> Линейные однородные уравнения второго порядка. Структура общего решения однородного уравнения. Линейные неоднородные уравнения второго порядка. Структура общего решения неоднородного уравнения	0	2
		<b>Тема 12.</b> Метод Лагранжа (вариации постоянных) решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	0	2
4	Числовые и функциональные ряды	<b>Тема 13.</b> Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Свойства сходящихся рядов. Необходимое условие сходимости. Признаки сходимости рядов с положительными членами	0	2
		<b>Тема 14.</b> Знакопеременные и знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость рядов. Функциональные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов. Степенные ряды. Теорема Абеля	0	2
		<b>Тема 15.</b> Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды	0	2
			<b>0</b>	<b>30</b>

Практические занятия				
1	2	3	4	5
1	Неопределенный интеграл	<b>Практическое занятие 1.</b> Непосредственное интегрирование. Метод подведения переменной под знак дифференциала	1	4
		<b>Практическое занятие 2.</b> Метод замены переменной, метод интегрирования по частям	1	4
		<b>Практическое занятие 3.</b> Интегрирование рациональных и тригонометрических функций	0	4
2	Определенный интеграл. Несобственные интегралы	<b>Практическое занятие 4.</b> Вычисление определенного интеграла	0	4
		<b>Практическое занятие 5.</b> Решение задач на геометрические приложения определенного интеграла	0	4
		<b>Практическое занятие 6.</b> Вычисление несобственных интегралов 1-го и 2-го рода	0	4
3	Дифференциальные уравнения	<b>Практическое занятие 7.</b> Решение уравнений с разделяющимися переменными, однородных уравнений	1	4
		<b>Практическое занятие 8.</b> Решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка, уравнение Бернулли	1	4
		<b>Практическое занятие 9.</b> Решение дифференциальных уравнений первого порядка	0	4
		<b>Практическое занятие 10.</b> Решение неполных дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка. Решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами	0	4
		<b>Практическое занятие 11.</b> Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида	0	4
		<b>Практическое занятие 12.</b> Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида	0	4
		<b>Практическое занятие 13.</b> Решение дифференциальных уравнений второго порядка	0	4
4	Числовые и функциональные ряды	<b>Практическое занятие 14.</b> Числовые ряды с положительными членами (определение сходимости). Знакопеременные ряды (определение абсолютной и условной сходимости)	0	4
		<b>Практическое занятие 15.</b> Степенные ряды (определение области сходимости). Разложение функций в степенные ряды (ряды Тейлора и Маклорена)	0	4
			<b>4</b>	<b>60</b>
<b>Рубежный (текущий) и итоговый контроль</b>				
	Разделы первого семестра	<i>Контрольная работа № 1</i>	0	12
	Разделы второго семестра	<i>Контрольная работа № 2</i>	0	20
		Итоговый контроль (экзамен)	7	30
			<b>7</b>	<b>62</b>
<b>Всего за второй семестр</b>			<b>11</b>	<b>152</b>

## 2. СОДЕРЖАНИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Структура дисциплины представлена восемью тематическими разделами.

### Раздел 1. Введение в математический анализ

#### *Перечень изучаемых вопросов*

1. Множества, основные понятия. Числовые множества. Натуральные, целые, рациональные, иррациональные, действительные числа.
2. Комплексное число. Мнимая единица. Множество комплексных чисел и множество действительных чисел. Действительная часть и мнимая часть комплексного числа. Алгебраическая форма записи комплексного числа.
3. Действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме (сложение, вычитание, умножение, деление). Вычисление степеней мнимой единицы. Решение квадратные уравнения с отрицательным дискриминантом на множестве комплексных чисел.
4. Геометрическое изображение комплексных чисел. Комплексная плоскость. Модуль и аргумент комплексного числа. Переход от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической.
5. Тригонометрическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме (умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня).
6. Показательная форма комплексного числа. Действия над комплексными числами, заданными в показательной форме (умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня).
7. Переменная величина. Функция, основные понятия (аргумент, значение функции, область определения, множество значений, нули функции, возрастание, убывание, четность, нечетность, периодичность). Обратная функция. Способы задания функции.
8. Числовая последовательность, способы задания; ограниченная, монотонная последовательности. Понятие предела последовательности, его свойства.

#### *Методические указания*

При изучении дисциплины Математика раздел «Математический анализ» обязательно используются знания, умения и навыки довузовской подготовки по математике. А именно: умение проводить алгебраические преобразования, решать уравнения и неравенства, знание основных тригонометрических формул, умение проводить тригонометрические преобразования и решать тригонометрические уравнения и неравенства, понимание функции, графика

функции и основных ее свойств, знание графиков и свойств основных элементарных функций.

Самостоятельная работа студента при изучении раздела 1 включает: освоение теоретического учебного материала, подготовку к выполнению практических заданий, выполнение домашних заданий. Также тема «Комплексные числа» (см. вопросы 2–6) выносится на самостоятельное изучение. На усмотрение преподавателя изучение данной темы может быть перенесено на более поздний срок в первом семестре.

Изучение дисциплины Математика раздел «Математический анализ» целесообразно начать с основных понятий теории множеств и затем перейти к понятию числового множества. Множества, элементами которых являются числа, называются числовыми. Примерами числовых множеств являются: множество натуральных чисел, множество целых чисел, множество рациональных чисел, множество иррациональных чисел, множество действительных чисел. Совокупность всех рациональных и иррациональных чисел называется множеством действительных (вещественных) чисел. Действительные числа можно изображать точками на числовой прямой. Но множества действительных чисел недостаточно для того, чтобы решить любое квадратное уравнение с действительными коэффициентами. Например, уравнения:  $x^2 + 1 = 0$ ,  $x^2 + a = 0$  ( $a > 0$ ) не имеют действительных корней. Решение таких уравнений приводит к необходимости рассмотрения множества комплексных чисел, подмножеством которого является множество действительных чисел. Помимо математики комплексные числа имеют применение в ряде разделов физики и техники (электротехнике, электронике, механике, гидродинамике, аэродинамике и др.).

В математических предложениях (формулировках определений, теорем и т. д.) часто повторяются отдельные слова и целые выражения. Поэтому при их записи удобно использовать логические символы. Запомните наиболее простые и часто употребляемые логические символы (кванторы):  $\exists$  – «существует»,  $\nexists$  – не существует,  $\forall$  – «любой».

Особое внимание уделите теме «Числовая последовательность. Предел последовательности». Эта тема является основой для понимания и изучения следующего раздела данной дисциплины «Предел и непрерывность функции».

### *Контрольные вопросы*

1. Из каких чисел состоят множества натуральных, целых, рациональных, иррациональных и действительных чисел? Как эти множества связаны между собой?

2. Сформулируйте понятия комплексного числа, мнимой единицы, множества комплексных чисел. Что такое действительная часть и мнимая часть комплексного числа?
3. Как записать комплексное число в алгебраической форме?
4. Какие действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме, можно выполнять?
5. Как изобразить комплексное число на плоскости? Что такое модуль и аргумент комплексного числа?
6. Как перейти от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической?
7. Расскажите про действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме (умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня).
8. Как записать комплексное число в показательной форме?
9. Расскажите про действия над комплексными числами, заданными в показательной форме (умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня).
10. Что такое функция? Какие способы задания функции вы знаете?
11. Что такое числовая последовательность?
12. Сформулируйте определения ограниченной, возрастающей, убывающей последовательности.
13. Что такое бесконечно большая, бесконечно малая последовательности?
14. Сформулируйте определение предела последовательности, дайте геометрическое истолкование. Что такое сходящаяся последовательность?
15. Перечислите свойства пределов.

#### *Рекомендуемая литература по разделу*

В предлагаемой литературе [1, 2, 3] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

## **Раздел 2. Предел и непрерывность функций**

### *Перечень изучаемых вопросов*

1. Предел функции в точке: определения по Гейне и по Коши, геометрический смысл.
2. Односторонние пределы функции в точке.
3. Бесконечно большая функция и бесконечно малая функция, свойства и связь.



4. Основные теоремы о пределах.
5. Первый и второй замечательные пределы.
6. Вычисление пределов: виды неопределенностей и методы раскрытия основных неопределенностей.
7. Эквивалентные бесконечно малые функции.
8. Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация.

### *Методические указания*

Понятие функции является одним из основных математических понятий, при помощи которых моделируются многие естественные процессы и явления. Важнейшим является понятие предела функции, на нем основаны понятия непрерывности функции, производной, интеграла, сходимости ряда и т. д.

При изучении раздела 2 обязательно используются знания, умения и навыки, приобретенные при изучении предыдущего раздела дисциплины и довузовской подготовке по математике. Перед началом изучения данного раздела повторите понятие модуля, его свойства и решение неравенств с модулем.

Самостоятельная работа студента при изучении данного раздела включает: освоение теоретического учебного материала, подготовку к выполнению практических заданий, выполнение домашних заданий, а также подготовку к контрольной работе по теме «Предел и непрерывность функции одной переменной».

Изучение данного раздела целесообразно начать с понятия окрестности точки. Затем перейдите к определению предела функции в точке. Вводятся два эквивалентных между собой определения предела функции в точке: 1) определение «на языке последовательностей» (или по Гейне); 2) определение «на языке  $\varepsilon - \delta$ » (или по Коши). Разберите геометрический смысл предела функции в точке. Перейдите к понятию односторонних пределов, когда  $x$  стремится к  $x_0$ , оставаясь меньше (больше), чем  $x_0$ . Затем перейдите к понятию предела функции на бесконечности. При исследовании поведения функций и при вычислении их пределов огромную роль играют понятия бесконечно большой функции и бесконечно малой функции, их свойства и связь друг с другом. Выясните, как связаны функция, ее предел и бесконечно малая функция. Изучите основные теоремы о пределах, которые облегчают их вычисление, а также первый и второй замечательные пределы. При подготовке к практическим занятиям выясните методы раскрытия основных видов неопределенностей, возникающих при вычислении пределов. Изучите понятие непрерывности функции, точек разрыва и основные теоремы о непрерывных функциях.

### *Контрольные вопросы*

1. Сформулируйте определение предела функции в точке (по Гейне и по Коши), дайте геометрическую интерпретацию.
2. Что такое односторонние пределы?
3. Сформулируйте определение предела функции на бесконечности.
4. Что такое ограниченная, бесконечно большая, бесконечно малая функции?
5. Перечислите основные свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций.
6. Первый и второй замечательные пределы.
7. Что такое эквивалентные бесконечно малые функции? Запишите важнейшие эквивалентности, используемые при вычислении пределов.
8. Сформулируйте понятие непрерывной функции и основные теоремы о непрерывных функциях.
9. Запишите формулы приращения аргумента и приращения функции.
10. Дайте определение точек разрыва первого и второго рода.

### *Рекомендуемая литература по разделу*

В предлагаемой литературе [1, 2, 3] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

## **Раздел 3. Дифференциальное исчисление функций одной действительной переменной**

### *Перечень изучаемых вопросов*

1. Производная функции одной переменной: понятие, геометрический и физический смысл. Уравнения касательной и нормали к графику функции.
2. Правила дифференцирования.
3. Производная сложной функции.
4. Таблица производных основных элементарных функций.
5. Связь дифференцируемости и непрерывности функции.
6. Дифференцирование обратных, неявных и параметрически заданных функций.
7. Дифференциал: определение, свойства, геометрический смысл.
8. Правило Лопиталья (раскрытие неопределенности вида  $0/0$ ).
9. Правило Лопиталья (раскрытие неопределенности вида  $\infty/\infty$ ).
10. Монотонность функции на данном промежутке.
11. Экстремум функции.
12. Необходимое условие экстремума дифференцируемых функций.

13. Достаточное условие экстремума.
14. Наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке.
15. Выпуклость и вогнутость графика функции на заданном промежутке; точка перегиба.
16. Исследование функции на экстремум с помощью второй производной.
17. Асимптоты графика функции.
18. Общий план исследования функции и построения графика.

### *Методические указания*

Понятие производной является одним из фундаментальных понятий математического анализа. Производная широко используется при решении целого ряда задач математики, физики, экономики, других наук, в особенности при изучении скорости изменения функции, скорости протекания различных процессов. Так, например, скорость  $v$  прямолинейного движения есть производная от пути  $s$  по времени  $t$ ; скорость  $v$  химической реакции есть производная количества вещества  $m$  по времени  $t$ ; скорость роста популяции есть производная размера популяции  $p$  по времени  $t$ ; сила переменного тока  $I$  есть производная количества электричества  $q$  по времени  $t$  и т. д. При решении перечисленных задач возникала необходимость рассмотрения предела отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю. Такой предел и был назван производной данной функции в данной точке. Производная функции и некоторые ее приложения известны по школьному курсу математики. Теперь, ввиду огромной важности производной при изучении различных дисциплин, необходимо повторить и углубить имеющиеся знания, а также дополнить их новыми. Необходимо научиться вычислять производные сложной функции, обратной, неявно заданной функции, параметрической функции, применять логарифмическое дифференцирование, находить производные высших порядков (в том числе  $n$ -ю производную). Особое место в данной теме занимает понятие дифференциала функции, тесно связанное с понятием производной, а также его применение при приближенных вычислениях значений функции. Также необходимо научиться применять производную для вычисления пределов функций (правила Лопиталья) и для исследования поведения функций (монотонность, экстремумы, выпуклость, точки перегиба, наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке).

При изучении раздела 3 обязательно используются знания, умения и навыки, полученные при изучении предыдущих двух разделов дисциплины и довузовской подготовке по математике.

Самостоятельная работа студента при изучении раздела 3 включает: освоение теоретического учебного материала, подготовку к выполнению практических заданий, выполнение домашних заданий, а также выполнение индивидуального расчетного задания и контрольной работы по теме «Дифференциальное исчисление функции одной переменной».

### *Контрольные вопросы*

1. Сформулируйте определение производной функции. Какие задачи приводят к понятию производной? Что такое дифференцирование?
2. В чем состоит геометрический и физический смысл производной? Напишите уравнения касательной и нормали к кривой в заданной точке.
3. Напишите по памяти правила дифференцирования и таблицу производных.
4. По какому правилу находят производную сложной и обратной функции?
5. Сформулируйте правило дифференцирования неявных и параметрически заданных функций.
6. Что такое логарифмическое дифференцирование?
7. Что такое производные высших порядков? Сформулируйте механический смысл второй производной.
8. Дайте понятие дифференциала. Что такое главная часть приращения функции? В чем состоит геометрический смысл дифференциала функции?
9. Напишите правила вычисления дифференциала. В чем состоит инвариантность формы первого дифференциала?
10. Как применяется дифференциал к приближенным вычислениям? Сформулируйте понятие дифференциалов высших порядков.
11. Сформулируйте теоремы о дифференцируемых функциях.
12. В чем состоят правила Лопиталья раскрытия неопределенностей?
13. Сформулируйте определение возрастающей (убывающей) функции. Как определить промежутки возрастания (убывания) функции?
14. Что такое экстремум функции? Сформулируйте необходимое, достаточное условия экстремума. Сформулируйте правило нахождения экстремумов функции.
15. Что такое наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке? Сформулируйте правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.
16. Что такое точки перегиба? Сформулируйте правило нахождения промежутков выпуклости и точек перегиба функции.
17. Дайте понятие асимптоты графика функции. Как найти асимптоты?

### *Рекомендуемая литература по разделу*

В предлагаемой литературе [1, 2, 3] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

## **Раздел 4. Дифференциальное исчисление функций нескольких действительных переменных**

### *Перечень изучаемых вопросов*

1. Функция нескольких переменных: понятие, область определения, множество значений, линии и поверхности уровня.
2. Предел и непрерывность функции двух переменных.
3. Частные и полное приращения функции двух переменных. Частные производные функции двух переменных, геометрический смысл.
4. Частные и полный дифференциалы. Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях.
5. Градиент функции.
6. Производная по направлению.
7. Экстремум функции двух переменных.
8. Наибольшее и наименьшее значения функции в данной области.

### *Методические указания*

До сих пор мы рассматривали функции одной действительной переменной. Но это понятие не охватывает все зависимости, существующие в природе. Даже в самых простых задачах встречаются величины, значения которых определяются совокупностью значений нескольких величин. Так, например, температура тела  $T$  в данный момент времени  $t$  может меняться от точки к точке. Каждая точка тела определяется тремя координатами  $x, y, z$ , поэтому температура тела зависит от трех переменных  $x, y, z$ . Если еще учесть, что температура тела  $T$  изменяется в разные моменты времени  $t$ , то ее значения будут определяться уже четырьмя переменными, то есть  $T = T(t, x, y, z)$ . Другой пример. Площадь прямоугольника со сторонами  $x$  и  $y$  определяется значениями двух переменных  $x, y$ . Объем прямоугольного параллелепипеда с измерениями  $x, y, z$  определяется значениями переменных  $x, y$  и  $z$ . Таких примеров можно привести много. Данный раздел посвящен изучению такого рода зависимостей. Здесь будет введено понятие функции нескольких переменных и дан аппарат для изучения поведения таких функций: линии и поверхности уровня, предел и непрерывность функции двух переменных, частные и полное приращения функции двух переменных, частные производные функции двух переменных, частные и полный дифференциалы, градиент функции, производная по

направлению, экстремум функции двух переменных, наибольшее и наименьшее значения функции в данной области.

При изучении данного раздела обязательно используются знания, умения и навыки, приобретенные при изучении предыдущих разделов, а именно, предел, непрерывность, производная функции одной действительной переменной.

Самостоятельная работа студента при изучении раздела 4 включает: освоение теоретического учебного материала, подготовку к выполнению практических заданий, выполнение домашних заданий, подготовку к коллоквиуму по темам первого семестра.

#### *Контрольные вопросы*

1. Сформулируйте определения: функция двух переменных, область определения функции двух переменных, область изменения функции двух переменных, график функции двух переменных.

2. Сформулируйте определения: предел и непрерывность функции двух переменных.

3. Запишите следующие формулы: приращение аргументов  $x, y$ ; полное приращение функции двух переменных; частные приращения функции двух переменных.

4. Что такое частные производные функции двух переменных? В чем состоит их геометрический смысл?

5. Частные производные второго порядка (дайте понятие и запишите формулы).

6. Сформулируйте определения: полный дифференциал, частные дифференциалы функции двух переменных.

7. По какому правилу вычисляется производная сложной и неявной функции двух переменных?

8. Что такое экстремум функции двух переменных? Сформулируйте необходимое условие, достаточное условие.

9. Как определить наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой области?

10. Что такое производная по направлению, градиент?

#### *Рекомендуемая литература по разделу*

В предлагаемой литературе [1, 2, 3] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

## Раздел 5. Неопределенный интеграл

### *Перечень изучаемых вопросов*

1. Первообразная и неопределенный интеграл: понятие, свойства.
2. Таблица неопределенных интегралов.
3. Метод непосредственного интегрирования. Подведение переменной под знак дифференциала.
4. Замена переменной в неопределенном интеграле.
5. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле.
6. Интегрирование некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен.
7. Интегрирование дробно-рациональных функций.
8. Интегрирование тригонометрических функций.
9. Интегрирование простейших иррациональных функций.

### *Методические указания*

В данном разделе будет рассматриваться задача, обратная к задаче нахождения производной функции одной действительной переменной. Задача состоит в следующем: дана функция  $f(x)$ , являющаяся производной некоторой функции  $F(x)$ , требуется найти функцию  $F(x)$ . К такой математической задаче приводят многие физические, химические и другие задачи. Например, нахождение закона движения точки, если известна скорость прямолинейного движения точки  $v = v(t)$ . В этом случае искомой функцией  $s = s(t)$  будет такая, для которой  $s'(t) = v(t)$ . Нахождение функции по ее производной называется интегрированием. Интегрирование – это действие, обратное дифференцированию.

При изучении данного раздела используются знания, умения и навыки, приобретенные при изучении разделов 1–3, а именно предел и производная функции одной действительной переменной, а также школьные знания по математике.

Изучение данного раздела следует начать с понятия первообразной функции. Затем изучите понятия: неопределенный интеграл, интегрирование. Перейдите к свойствам неопределенного интеграла, которые непосредственно вытекают из его определения. Так как интегрирование – это действие, обратное дифференцированию, то можно получить таблицу основных интегралов, используя таблицу производных (или дифференциалов). Эти интегралы называются табличными, их следует выучить наизусть. Все методы вычисления неопределенных интегралов сводятся к указанию приемов, приводящих заданный интеграл к табличному. Поэтому табличные интегралы надо помнить и уметь их узнавать. Докажите свойства неопределенного интеграла, они также

используются при вычислении интегралов. Изучите, в чем состоят основные методы интегрирования: метод непосредственного интегрирования; подведение переменной под знак дифференциала; метод замены переменной; интегрирование по частям; интегрирование некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен; интегрирование дробно-рациональных функций; интегрирование тригонометрических функций, интегрирование простейших иррациональных функций. Отработайте навык вычисления неопределенных интегралов на практике. Это умение будет необходимо вам для изучения следующих разделов «Определенный интеграл» и «Дифференциальные уравнения».

Самостоятельная работа студента при изучении раздела 5 включает: освоение теоретического учебного материала, подготовку к выполнению практических заданий, выполнение домашних заданий, а также подготовку к контрольной работе по разделу «Неопределенный интеграл».

#### *Контрольные вопросы*

1. Что такое первообразная?
2. Сформулируйте определение неопределенного интеграла и перечислите его свойства.
3. Запишите по памяти таблицу основных интегралов.
4. В чем состоит метод занесения переменной под знак дифференциала?
5. В чем состоит метод замены переменной?
6. В чем состоит метод интегрирования по частям в неопределенном интеграле?
7. Как интегрировать рациональные функции (дроби)?
8. Расскажите основные методы интегрирования тригонометрических функций.
9. Какие есть подходы при интегрировании иррациональных функций?

#### *Рекомендуемая литература по разделу*

В предлагаемой литературе [1, 2, 3] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

### **Раздел 6. Определенный интеграл. Несобственные интегралы**

#### *Перечень изучаемых вопросов*

1. Определенный интеграл: определение, геометрический смысл.
2. Формула Ньютона – Лейбница.
3. Свойства определенного интеграла.
4. Замена переменной в определенном интеграле.



5. Интегрирование по частям в определенном интеграле.
6. Вычисление площадей плоских фигур.
7. Вычисление длин дуг плоских кривых.
8. Вычисление объемов тел.
9. Вычисление площадей поверхностей вращения.
10. Физические приложения определенного интеграла.
11. Несобственный интеграл 1-го рода: определение, признаки сходимости.
12. Несобственный интеграл 2-го рода: определение, признаки сходимости.

### *Методические указания*

При решении многих задач геометрии, физики и других дисциплин приходится суммировать бесконечно большое число бесконечно малых слагаемых, а затем вычислять предел этой суммы. Это приводит к одному из центральных понятий математического анализа, а именно к понятию определенного интеграла. Сюда относятся задачи вычисления площадей, ограниченных кривыми, длин дуг, объемов тел; работы, скорости, пути, массы, моментов инерции и т. д. Все эти задачи решаются по определенной схеме. Пусть требуется найти значение какой-либо геометрической или физической величины  $A$  (из перечисленных выше). Эта величина является непрерывной и аддитивной функцией  $A = f(x)$  переменной  $x \in [a; b]$ . Вид этой функции определяется из условия решаемой задачи. Точками  $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$  разбиваем отрезок  $[a; b]$  на  $n$  частей. При этом интересующая нас величина  $A$  разобьется на  $n$  «элементарных слагаемых»  $\Delta A_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ):  $A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \dots + \Delta A_n$ . Затем каждое «элементарное слагаемое» представляем в виде произведения значения функции  $f(x)$  в произвольной точке соответствующего частичного отрезка на его длину:  $\Delta A_i \approx f(c_i) \cdot \Delta x_i$ . Получаем приближенное значение величины  $A$  в виде суммы:  $A \approx f(c_1) \cdot \Delta x_1 + \dots + f(c_n) \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i$ . Искомая величина  $A$  будет равна пределу этой суммы  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$ . Указанный метод основан на представлении искомой величины  $A$  в виде суммы бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых. Если полученный предел существует и не зависит ни от способа разбиения отрезка  $[a; b]$  на частичные отрезки, ни от выбора точек  $c_i$  в них, то его называют определенным интегралом от функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$ , то есть  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$ .

При изучении данного раздела обязательно используются знания, умения и навыки, приобретенные при изучении предыдущих разделов, а именно: неопределенный интеграл, предел и производная функции одной переменной.

Изучение раздела 6 целесообразно начать с разбора задач, приводящих к понятию определенного интеграла. Затем ввести определение определенного интеграла, теорему о существовании определенного интеграла, геометрический и физический смысл определенного интеграла. Доказать формулу Ньютона – Лейбница, она дает удобный способ вычисления определенных интегралов. И рассмотреть основные свойства определенного интеграла. Далее необходимо на практике выработать навык вычисления определенных интегралов, применяя: формулу Ньютона – Лейбница, метод замены переменной в определенном интеграле, метод интегрирования по частям в определенном интеграле. Обратите внимание на интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах. Изучите понятия несобственных интегралов: интеграла с бесконечным промежутком интегрирования от непрерывной функции и интеграла с конечным промежутком интегрирования от функции, имеющей на нем бесконечный разрыв. Решите задачи на геометрические приложения определенного интеграла: вычисление площадей плоских фигур, вычисление объемов тел, вычисление длин дуг, вычисление площадей поверхностей вращения.

Самостоятельная работа студента при изучении раздела 6 включает: освоение теоретического учебного материала, подготовку к выполнению практических заданий, выполнение домашних заданий, а также выполнение индивидуального расчетного задания по теме «Определенный интеграл. Несобственный интеграл».

#### *Контрольные вопросы*

1. Сформулируйте понятие определенного интеграла, как предела интегральной суммы. Что такое интегральная сумма? Сформулируйте условие существования определенного интеграла.
2. В чем состоит геометрический и физический смысл определенного интеграла?
3. Запишите формулу Формула Ньютона – Лейбница.
4. Перечислите основные свойства определенного интеграла.
5. Как вычислить определенный интеграл?
6. Как выполнить замену переменной в определенном интеграле?
7. Как выполнить интегрирование по частям в определенном интеграле?
8. Что такое несобственный интеграл первого рода? Дайте геометрическую интерпретацию.
9. Что такое несобственный интеграл второго рода? Дайте геометрическую интерпретацию.

10. Как вычислить площадь плоской фигуры с помощью определенного интеграла (в декартовой системе координат и для случая параметрического задания кривой)?

11. Как вычислить длину дуги кривой (в декартовой системе координат и для случая параметрического задания кривой)?

12. Как вычислить объем тела по известной площади поперечного сечения, объем тела вращения?

13. Как вычисление площадь поверхности вращения?

*Рекомендуемая литература по разделу*

В предлагаемой литературе [1, 2, 3] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

## **Раздел 7. Дифференциальные уравнения**

*Перечень изучаемых вопросов*

1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка: понятие, интегральные кривые, общее и частное решения, начальное условие, задача Коши.

2. Условия существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка.

3. Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными.

4. Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка.

5. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Метод Бернулли.

6. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Метод Лагранжа.

7. Дифференциальные уравнения Бернулли.

8. Дифференциальные уравнения высших порядков: основные понятия.

9. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка: основные типы и методы интегрирования.

10. Однородные и неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Структура общего решения.

11. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

12. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида.

13. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод вариации произвольных постоянных.

### *Методические указания*

Дифференциальное уравнение – это уравнение, связывающее независимую переменную  $x$ , неизвестную функцию  $y$  и ее производные или дифференциалы. Дифференциальные уравнения обычно возникают, когда зависимость между переменными величинами  $x$  и  $y$  непосредственно установить не получается, но возможно найти связь между дифференциалами этих переменных. Например, рассмотрим такую задачу. Найти кривую, проходящую через точку  $M_0(0; 1)$  и обладающую тем свойством, что в каждой ее точке угловой коэффициент касательной равен удвоенной абсциссе точки касания. Для решения этой задачи обозначим искомую функцию  $y = f(x)$  и воспользуемся геометрическим смыслом производной, согласно которому производная функции в точке равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в этой точке. Согласно условию задачи можем записать, что  $y' = 2x$ . Мы получили дифференциальное уравнение, где неизвестная функция  $y$  стоит под знаком производной. Чтобы ее выразить, надо проинтегрировать это уравнение:  $y = x^2 + C$ , где  $C$  – произвольная постоянная. Получили бесконечное множество решений дифференциального уравнения – множество парабол, полученных параллельным сдвигом параболы  $y = x^2$  вдоль оси  $Ox$  на  $C$  единиц. Все эти параболы удовлетворяют условию задачи: угловой коэффициент касательной равен удвоенной абсциссе точки касания. Выберем одну из них, которая проходит через точку  $M_0(0; 1)$ . Подставляя координаты точки, найдем  $C$ :  $1 = 0^2 + C$ ,  $C = 1$ . Таким образом, искомой кривой будет парабола  $y = x^2 + 1$ .

При рассмотрении данного примера мы сталкивались с основными понятиями теории дифференциальных уравнений: порядок дифференциального уравнения, общее решение, интегральные кривые, начальное условие, частное решение дифференциального уравнения. После изучения этих понятий укажите их по тексту решения этого примера. Рассмотрите основные типы дифференциальных уравнений первого и второго порядка (вопросы 3–13) и методы их решения. Выработайте навык их решения на практике.

При изучении данного раздела обязательно используются знания, умения и навыки, приобретенные при изучении предыдущих разделов, а именно неопределенный интеграл и производная функции одной переменной.

Самостоятельная работа студента при изучении данного раздела включает: освоение теоретического учебного материала, подготовку к выполнению практических заданий, выполнение домашних заданий, а также выполнение индивидуального расчетного задания и контрольной работы по теме «Дифференциальные уравнения».

### *Контрольные вопросы*

1. Что такое дифференциальное уравнение, порядок дифференциального уравнения?

2. Что такое дифференциальное уравнение 1-го порядка, общее решение дифференциального уравнения 1-го порядка, интегральные кривые дифференциального уравнения 1-го порядка, частное решение дифференциального уравнения 1-го порядка, начальное условие 1-го порядка. Сформулируйте задачу существования и единственности задачи Коши.

3. Как записывается и как решается уравнение с разделяющимися переменными?

4. Запишите общий вид однородного дифференциального уравнения первого порядка. Каким методом оно решается?

5. Запишите общий вид линейного дифференциального уравнения первого порядка. В чем состоит Метод Бернулли? Запишите уравнение Бернулли.

6. В чем состоит метод вариации произвольной постоянной для решения линейного дифференциального уравнения первого порядка?

7. Запишите общий вид дифференциального уравнения второго порядка. Сформулируйте понятия общего и частного решений дифференциального уравнения второго порядка.

8. Простейшие дифференциальные уравнения второго порядка (случаи понижения порядка), способы решения.

9. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, общее решение.

10. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, частное и общее решение.

#### *Рекомендуемая литература по разделу*

В предлагаемой литературе [1, 2, 3] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

### **Раздел 8. Числовые и функциональные ряды**

#### *Перечень изучаемых вопросов*

1. Числовой ряд с положительными членами (определение, частичные суммы ряда, сходящиеся и расходящиеся ряды).

2. Необходимый признак сходимости.

3. Достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами: признак сравнения, предельный признак сравнения.

4. Достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами: признак Даламбера, радикальный признак Коши.

5. Интегральный признак сходимости числовых рядов с положительными членами.

6. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды: определения; признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда; условная и абсолютная сходимость.

7. Степенные ряды: определение; радиус и интервал сходимости. Теорема Абеля.

8. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение в ряд Маклорена некоторых элементарных функций.

9. Применения степенных рядов в приближенных вычислениях значений функций.

10. Применения степенных рядов в приближенных вычислениях определенных интегралов.

### *Методические указания*

При изучении многих вопросов естествознания и техники применяется метод поэтапного исследования объекта, где на каждом этапе исследования уточняются характеристики изучаемого объекта. Одним из математических понятий, при помощи которых моделируются такие ситуации, является понятие «суммы» бесконечного числа слагаемых, то есть ряд. Теория рядов широко используется в теоретических исследованиях различных дисциплин и в приближенных вычислениях. С помощью рядов можно вычислять приближенные значения функций, значения интегралов, решать дифференциальные уравнения и т. д.

При изучении данного раздела используются знания, умения и навыки, приобретенные при изучении предыдущих разделов, а именно предел и производная функции одной действительной переменной, интегралы.

Ряды с действительными членами можно разделить на две основные группы: числовые ряды и функциональные. Среди числовых рядов выделяют: ряды с положительными членами и знакопеременные ряды. Среди функциональных рядов особый интерес представляют степенные ряды и тригонометрические ряды.

Начать изучение данного раздела следует с числовых рядов. Выясните, что такое числовой ряд, частичные суммы ряда, сходящиеся и расходящиеся ряды, сумма ряда. Изучите свойства сходящихся рядов и необходимое условие сходимости ряда. Затем изучите признаки сходимости рядов с положительными членами (вопросы 3 – 5). После этого перейдите к изучению знакопеременных рядов, абсолютной и условной сходимости. Изучив числовые ряды, переходите к изучению функциональных рядов, а именно степенных рядов. Особое

внимание уделите определению области сходимости степенного ряда и разложению функций в ряды Тейлора и Маклорена. Решите задачи на практическое применение рядов для приближенного вычисления значений функций и вычисления определенных интегралов.

Самостоятельная работа студента при изучении данного раздела включает: освоение теоретического учебного материала, подготовку к выполнению практических заданий, выполнение домашних заданий, подготовку к экзамену по дисциплине.

#### *Контрольные вопросы*

1. Что такое числовой ряд, частичные суммы ряда, сходимость ряда?
2. Перечислите основные свойства рядов.
3. Сформулируйте необходимый признак сходимости ряда и следствие из него.
4. Сформулируйте признаки сходимости рядов с положительными членами: признаки сравнения рядов (назовите эталонные ряды), признак Даламбера, радикальный и интегральный признаки Коши.
5. Что такое знакочередующиеся и знакопеременные ряды? Сформулируйте признак Лейбница. Что такое абсолютная и условная сходимость?
6. Сформулируйте основные понятия для функциональных рядов (определение, точка сходимости, область сходимости, сумма, остаток).
7. Что такое степенной ряд? Сформулируйте теорему Абеля. Как определить интервал сходимости степенного ряда? Перечислите основные свойства степенных рядов.
8. Запишите общий вид ряда Тейлора и ряда Маклорена.
9. Запишите разложение в ряд Маклорена основных элементарных функций.

#### *Рекомендуемая литература по разделу*

В предлагаемой литературе [1, 2, 3] студенту необходимо изучить главы, относящиеся к данному разделу.

### **3. ТРЕБОВАНИЯ К АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

#### **3.1. Текущая аттестация**

В ходе изучения дисциплины студентам предстоит пройти следующие этапы текущей аттестации.

В первом семестре:

- выполнить задания по темам практических занятий первого семестра;
- выполнить контрольную работу № 1 по теме «Предел и непрерывность функции одной переменной»;
- выполнить контрольную работу № 2 по теме «Дифференциальное исчисление функции одной переменной»;
- выполнить и защитить индивидуальное домашнее задание № 1 по теме «Дифференциальное исчисление функции одной переменной»;
- сдать коллоквиум по темам первого семестра.

Во втором семестре:

- выполнить задания по темам практических занятий второго семестра;
- выполнить контрольную работу № 3 по теме «Неопределенный интеграл»;
- выполнить и защитить индивидуальное домашнее задание № 2 по теме «Определенный интеграл, несобственные интегралы»;
- выполнить контрольную работу № 4 по теме «Дифференциальные уравнения»;
- выполнить и защитить индивидуальное домашнее задание № 3 по теме «Дифференциальные уравнения».

### **3.2. Условия получения положительной оценки**

В первом семестре промежуточная аттестация в форме зачета проходит по результатам прохождения текущего контроля успеваемости.

Положительная оценка («зачтено») выставляется студенту очной формы обучения, успешно выполнившему и защитившему:

- более 60 % задач из каждого домашнего задания и заданий на практических занятиях;
- контрольные работы № 1 и № 2;
- индивидуальное домашнее задание № 1;
- коллоквиум по темам первого семестра.

Во втором семестре промежуточная аттестация по дисциплине проводится в форме экзамена.

Студенты допускаются к экзамену при положительной аттестации по результатам текущего контроля, если успешно выполнили и защитили:

- более 60 % задач из каждого домашнего задания и заданий на занятиях за второй семестр;
- контрольные работы № 3 и № 4;
- практические индивидуальные домашние задания № 2 и № 3.

Экзамен проводится следующим образом. Представленные вопросы для проведения экзамена komponуются в билеты по два вопроса, относящиеся к



различным темам дисциплины, и три практических задания. На усмотрение преподавателя экзамен может быть проведен в письменной, устной или комбинированной форме. При наличии сомнений в отношении знаний и умений студента экзаменатор может (имеет право) задать дополнительные вопросы, а также дать дополнительное задание.

Шкала оценивания результатов освоения дисциплины на экзамене, основана на четырехбалльной системе.

Оценка «отлично» выставляется в случае, если студент исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно излагает ответы на вопросы билета, умеет делать обобщения и выводы, владеет основными терминами и понятиями, умеет тесно увязывать теорию с практикой, свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний, использовал в ответе материал дополнительной литературы, дал правильные ответы на дополнительные вопросы.

Оценка «хорошо» выставляется в случае, если студент грамотно и по существу излагает ответ на вопросы билета, не допуская существенных неточностей, но при этом его ответы были недостаточно обоснованы, владеет основными терминами и понятиями, правильно применяет теоретические положения при решении задач, использует в ответе материал только основной литературы; владеет основными умениями; при ответе на дополнительные вопросы допускал неточности и незначительные ошибки.

Оценка «удовлетворительно» выставляется в случае, если студент при ответе на вопросы продемонстрировал знания только основного материала, но допускал неточности, использовал недостаточно правильные формулировки, испытывает затруднения при решении задач; использовал при ответе только лекционный материал; при ответе на дополнительные вопросы допускал ошибки.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется в случае, если студент не смог объяснить смысл написанного им при подготовке к ответу текста; не ориентируется в терминологии дисциплины; не может ответить на дополнительные вопросы.

Компетенции в той части, в которой они должны быть сформированы в рамках изучения дисциплины, могут считаться сформированными в случае, если студент получил на экзамене положительную оценку.

## ЛИТЕРАТУРА

### ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Шипачев, В. С. Основы высшей математики: учеб. пособие / В. С. Шипачев; ред. А. Н. Тихонов. – 6-е изд., стер. – Москва: Высшая школа, 2004. – 479 с. – ISBN 5-06-004161-1.

2. Гусак, А. А. Основы высшей математики: пособие для студентов вузов / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. – Минск: ТетраСистемс, 2012. – 205 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=111939> (дата обращения: 13.07.2020). – ISBN 978-985-536-274-7. – Текст: электронный.

### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

3. Бермант, А. Ф. Краткий курс математического анализа: учеб. / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – Москва: Наука, 1973. – 720 с.

4. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие / П. Е. Данко [и др.]. – 7-е изд., испр. – Москва: АСТ: Мир и Образование; Минск: Харвест, 2014. – 815 с. ISBN 978-5-17-083948-3 (АСТ) (в пер.). – ISBN 978-5-94666-735-7 (Мир и Образование). – ISBN 978-985-18-3012-7 (Харвест).

5. Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов: учеб. пособие / Б. П. Демидович [и др.]; под ред. Б. П. Демидовича. – Москва: Астрель: АСТ, 2004. – 495 с. – ISBN 5-17-002965-9. – ISBN 5-271-01118-6.

6. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике: Типовые расчеты: учеб. пособие / Л. А. Кузнецов. – Изд. 11-е, стер. – Санкт-Петербург [и др.]: Лань, 2008. – 238 с. – ISBN 978-5-8114-0574-9 (в пер.).

7. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. пособие: в 2 т. / Н. С. Пискунов. – изд-е стер. – Москва: Интеграл-Пресс, 2002. – Т. 1. – 415 с. – ISBN 5-89602-012-0.

8. Общероссийский математический портал [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.mathnet.ru/>.

9. Mathcad-справочник по высшей математике [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.exponenta.ru/soft/Mathcad/learn/learn.asp>.

10. ЭИОС ФГБОУ ВО «КГТУ». 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств / АП Математический анализ [Электронный ресурс]. – URL: <https://eios.klgtu.ru/course/view.php?id=3018>.

Локальный электронный методический материал

Наталья Александровна Елисеева

МАТЕМАТИКА  
РАЗДЕЛ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

*Редактор М. А. Дмитриева*

Уч.-изд. л. 1,6. Печ. л. 2,1

Издательство Федерального государственного бюджетного  
образовательного учреждения высшего образования  
«Калининградский государственный технический университет».  
236022, Калининград, Советский проспект, 1.