

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Ж. Г. КОНЦЕДАЕВА

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

учебно-методическое пособие по изучению дисциплины
для студентов, обучающихся в бакалавриате по направлению подготовки
08.03.01 Строительство
(профиль «Промышленное и гражданское строительство»)

Калининград
Издательство КГТУ
2023

Рецензент

кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры строительства
ФГБОУ ВО «КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ» Л. В. Узунова

Концедаева, Ж. Г.

Строительная механика: учеб.-метод. пособие по изучению дисциплины для студ. бакалавриата по направлению подгот. 08.03.01 Строительство, профиль «Промышленное и гражданское строительство» / **Ж. Г. Концедаева.** – Калининград: Изд-во ФГБОУ ВО «КГТУ», 2023. – 101 с.

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины «Строительная механика» предназначено для обучающихся по направлению подготовки 08.03.01 Строительство и содержит теоретический материал по основным темам, рекомендации по изучению теоретического материала и подготовке к практическим занятиям при самостоятельной работе. Изложенный материал направлен на выработку умения определять напряженное состояние строительных конструкций при действии внешних нагрузок; освоить навыки конструирования зданий и сооружений промышленного и гражданского назначения; умения пользоваться отраслевыми нормативными документами, а также справочной и иной технической литературой. Дано описание видов текущего контроля, критерии оценок и условия допуска к текущей и промежуточной аттестации.

Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины рекомендовано к изданию для использования в учебном процессе методической комиссией Института морских технологий, энергетики и строительства 25 октября 2023 г., протокол № 12

УДК 69.04

© Федеральное государственное
бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Калининградский государственный
технический университет», 2023 г.
©Концедаева Ж.Г., 2023 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ЗАНЯТИЯМ.....	8
ПЛАН ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ	10
Тема 1. Основные понятия строительной механики.....	10
1.1 Понятия строительной конструкции, ее элементов	11
1.2 Классификация нагрузок согласно Своду Правил	12
1.3 Стержневые строительные конструкции и их элементы, узлы соединения. Выбор методов расчета	15
Тема 2. Принципы конструирования стержневых систем. Кинематический анализ сооружений ...	17
2.1 Конструирование стержневых систем.....	18
2.2 Принципы преобразования геометрически неизменяемых систем	22
2.3 Кинематический анализ сооружений	22
2.4 Основные формулы кинематического анализа стержневых систем	26
2.5 Качественная оценка кинематического анализа.....	27
Тема 3. Расчет статически определимых многопролетных балок	28
3.1 Проектирование и расчет статически определимых многопролетных балок.....	29
3.2 Кинематический анализ многопролетной балки	31
3.3 Линии влияния и их применение для расчета статически определимых балок	33
3.4 Расчет сооружений на подвижную нагрузку	33
3.5 Вычисление усилий по линиям влияния от нагрузки	36
3.6 Матричная форма расчета усилий	38
Тема 4. Расчет фермы на постоянную и временную нагрузки.....	40
4.1 Конструкция фермы	40
4.2 Методы расчета статически определимых ферм.....	41
4.3 Линии влияния усилий в фермах	44
4.4 Пример построения линии влияния в шпренгельной ферме.....	47
Тема 5. Расчет трехшарнирных арок и рам.....	49
5.1 Аналитический расчет трехшарнирных статически определимых арок.....	49
5.2 Линии влияния опорных реакций и усилий способом наложения	52
5.3 Построение линий влияния способом нулевой точки.....	53
Тема 6. Расчет статически неопределимых стержневых систем. Метод сил.	58
6.1 Статически неопределимые системы. Степень статической неопределимости.....	59
6.2 Методы расчета статически неопределимых систем	61
6.3 Метод сил.....	65
6.4 Канонические уравнения метода сил	68

6.5 Вычисление коэффициентов и свободных членов канонических уравнений. Метод Мора. Правило Верещагина. Формула Симпсона	70
6.6 Универсальная проверка коэффициентов и свободных членов канонических уравнений	71
6.7 Построение окончательных эпюр внутренних силовых факторов	73
Тема 7. Метод перемещений. Степень кинематической неопределимости рам	74
7.1 Выбор основной системы	74
7.2 Основная система. Канонические уравнения метода перемещений	76
7.3 Определение реакций в однопролетных статически неопределимых стержневых элементах	79
Тема 8. Устойчивость сооружений	82
8.1. Предмет и задачи устойчивости	83
8.2 Критерии определения устойчивости упругих систем	84
8.3 Задача Эйлера	85
8.4. Устойчивость стержней с различными концевыми условиями их закрепления	87
8.5 Выражения изгибающих моментов и поперечных сил в концевых сечениях стержней	92
8.6 Устойчивость рам при действии узловых нагрузок. Метод перемещений	97
Заключение	98
Список использованных источников	99

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Строительная механика» входит в состав «Профессионального модуля» основной образовательной программы бакалавриата по направлению подготовки 08.03.01 Строительство (профиль *Промышленное и гражданское строительство*).

Целью изучения дисциплины «**Строительная механика**» является формирование знаний и практических навыков в области проектирования объектов промышленного и гражданского строительства на основе необходимых расчетов с использованием основ строительной механики.

В результате освоения дисциплины студент должен:

Знать: теоретические основы в области строительной механики для работы в сфере своей профессиональной деятельности

Уметь: проводить все необходимые расчеты на участке работ с использованием основ строительной механики.

Владеть: практическими навыками проводить расчетное обоснование и конструирование строительных конструкций зданий и сооружений промышленного и гражданского назначения.

Текущая и промежуточная аттестация студентов

Для оценки результатов освоения дисциплины используются:

- оценочные средства текущего контроля успеваемости;
- оценочные средства для промежуточной аттестации по дисциплине.

К оценочным средствам текущего контроля успеваемости относятся:

- задания для расчетно-графических работ;
- тестовые задания по дисциплине.

Тестовые задания текущей аттестации используются для оценки освоения тем дисциплины. Оценивание осуществляется по следующим критериям: «зачтено» – 50-100 % правильных ответов на заданные вопросы; «не зачтено» – менее 50 % правильных ответов.

Задания для выполнения расчетно-графических работ размещаются в ЭИОС (электронно-информационная образовательная среда) университета. Выполненная и оформленная расчетно-графическая работа сдается преподавателю на проверку до начала проведения промежуточной аттестации.

Промежуточная аттестация проводится в форме экзамена. Экзаменационный билет содержит два теоретических вопроса и задачу, варианты которых приведены в Фонде оценочных средств (ФОС), размещенного в ЭИОС.

Оценка выставляется с учетом результата текущего контроля при условии выполнения и успешной защиты расчетно-графических работ, а также в зависимости от уровня освоения студентом тем дисциплины в соответствии с критериями, указанными в таблице 1.

Таблица 1 - Система и критерии выставления оценки промежуточной аттестации

Система оценок	2	3	4	5
Критерий	0-40 %	41-60 %	61-80 %	81-100 %
	«неудовлетворительно»	«удовлетворительно»	«хорошо»	«отлично»
	«не зачтено»	«зачтено»		
<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>
Системность и полнота знаний в отношении изучаемых объектов	Обладает частичными и разрозненными знаниями, которые не может научно-корректно связывать между собой (только некоторые из них может связывать между собой)	Обладает минимальным набором знаний, необходимым для системного взгляда на изучаемый объект	Обладает набором знаний, достаточным для системного взгляда на изучаемый объект	Обладает полнотой знаний и системным взглядом на изучаемый объект
Работа с информацией	Не в состоянии находить необходимую информацию, либо в состоянии находить отдельные фрагменты информации в рамках поставленной задачи	Может найти необходимую информацию в рамках поставленной задачи	Может найти, интерпретировать и систематизировать необходимую информацию в рамках поставленной задачи	Может найти, систематизировать необходимую информацию, а также выявить новые, дополнительные источники информации в рамках поставленной задачи
Научное осмысление изучаемого явления, процесса, объекта	Не может делать научно корректных выводов из имеющихся у него сведений, в состоянии проанализировать только некоторые	В состоянии осуществлять научно корректный анализ предоставленной информации	В состоянии осуществлять систематический и научно корректный анализ предоставленной информации,	В состоянии осуществлять систематический и научно корректный анализ предоставленной

Система оценок	2	3	4	5
	0-40 %	41-60 %	61-80 %	81-100 %
Критерий	«неудовлетворительно»	«удовлетворительно»	«хорошо»	«отлично»
	«не зачтено»	«зачтено»		
	из имеющихся у него сведений		вовлекает в исследование новые релевантные задачи данные	информации, вовлекает в исследование новые релевантные поставленной задаче данные, предлагает новые ракурсы поставленной задачи
Освоение стандартных алгоритмов решения профессиональных задач	В состоянии решать только фрагменты поставленной задачи в соответствии с заданным алгоритмом, не освоил предложенный алгоритм, допускает ошибки	В состоянии решать поставленные задачи в соответствии с заданным алгоритмом	В состоянии решать поставленные задачи в соответствии с заданным алгоритмом, понимает основы предложенного алгоритма	Не только владеет алгоритмом и понимает его основы, но и предлагает новые решения в рамках поставленной задачи

Структура учебно-методического пособия представлена тематическим планом изучаемой дисциплины, содержащим: план теоретических занятий; методическими рекомендациями для самостоятельной работы студентов по изучению дисциплины; списком рекомендованной литературы.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ЗАНЯТИЯМ

Самостоятельная работа студентов – это планируемая работа, выполняемая по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия, является одним из основных видов деятельности обучающихся. *Самостоятельная работа* студентов включает в себя изучение лекционного материала и первоисточников, подготовку к практическим занятиям и тестированию. Целью самостоятельных занятий является более глубокое изучение студентами отдельных вопросов курса с использованием рекомендуемой дополнительной литературы и других информационных источников.

Задачами самостоятельной работы обучающихся являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умения использовать нормативную и справочную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов, творческой инициативы, ответственности и организованности.

Основными формами внеаудиторной самостоятельной работы, используемыми при изучении дисциплины являются:

- изучение программного материала дисциплины (работа с учебником и конспектом лекций);
- изучение и конспектирование рекомендуемых источников;
- просмотр рекомендуемых обучающих видеофильмов и роликов по ссылкам в сети Internet;
- работа с электронными информационными ресурсами (ЭИОС КГТУ) и ресурсами Internet;
- выполнение тестовых заданий и решение задач на практических занятиях;
- выполнение двух расчетно-графических работ;
- поиск (подбор) литературы (в том числе электронных источников информации) по заданной теме;
- подготовка к тестированию.
- участие в интернет-конференциях.

Университет обеспечивает учебно-методическую и материально-техническую базу для организации самостоятельной работы студентов. Библиотека университета обеспечивает:

- учебный процесс необходимой литературой и информацией (комплектует библиотечный фонд учебной, методической, научной,

периодической и справочной литературой в соответствии с учебными планами и программами, в том числе на электронных носителях);

- доступ к основным информационным образовательным ресурсам, информационной базе данных, в том числе библиографической, возможность выхода в Интернет.

Для подготовки к занятиям, текущему контролю и промежуточной аттестации обучающиеся могут воспользоваться электронной библиотекой Университета, где имеется возможность получить доступ к учебно-методическим материалам, как этой библиотеки, так и иных электронных библиотечных систем. Также студенты могут взять на дом необходимую литературу на абонементе или воспользоваться читальным залом. Ответы на вопросы, выносимые для самостоятельного изучения (повторения), должны быть кратко законспектированы в тетради для лекций.

При подготовке к практическим занятиям студентам рекомендуется изучить лекционный материал, а также вопросы, выносимые для самостоятельного изучения. При выполнении практических заданий необходимо обратить внимание на использование актуальных нормативных документов, справочной и другой литературы, применяемой размерности в расчетах, обоснования применяемого алгоритма расчетов и формулирование выводов. Выполненная практическая работа должна быть соответствующим образом оформлена в отдельной тетради для практических работ или на отдельных листах формата А4 в текстовом редакторе Word, с использованием графических программ и собранных в отдельную папку.

В начале практического занятия может проводиться тестирование по изучаемой теме продолжительностью до 10 мин.

ПЛАН ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Тема 1. Основные понятия строительной механики

Цель: знать теоретические основы в области строительной механики для работы в сфере своей профессиональной деятельности.

Ключевые вопросы:

- 1.1. Основные термины, используемые в строительной механике.
- 1.2. Классификация сооружений.
- 1.3. Классификация нагрузок
- 1.4. Типы узлов соединений элементов строительных конструкций
- 1.5. Выбор методов расчета

Методические указания

Для студентов строительных специальностей строительная механика является одной из базовых дисциплин. Задача строительной механики заключается в переходе от общих разделов физики, теоретической механики, теории упругости к непосредственному проектированию сооружений.

Многообразие и сложность задач, стоящих перед строительной механикой, приводят к невозможности её изучения в рамках одного курса и вызывают деление его на ряд связанных между собой дисциплин: сопротивление материалов, прикладная теория упругости и пластичности, строительная механика стержневых систем и др.

Цель строительной механики стержневых систем, называемой обычно просто строительной механикой, но уже в узком смысле слова, – вооружить будущего специалиста знаниями, необходимыми для проектирования сооружений промышленного и гражданского строительства.

"Механика стержневых систем" содержит много терминов, теоретическая часть дисциплины является очень разнообразной, сложной для восприятия. Кроме того, по мере приобретения новых знаний формулировки основных законов и уже известных понятий, изученных в рамках предшествующих дисциплин, усложняются, поэтому нужно усвоить и привести терминологию в соответствие с требованиями нормативных документов, уточнить основные понятия, используемые в строительной механике, с учетом приобретенных знаний. Лаконичность приведенных определений дополнена иллюстрациями, обеспечивающими ясность представления, и удобными для запоминания. Данная вводная тема позволит также подготовиться к прохождению

контрольных тестов по дисциплине, поскольку для каждой темы обозначен минимальный набор понятий, подлежащих тестированию. Также приводятся сведения из Сводов Правил (СП), так как, согласно профессиональным компетенциям, обучающиеся должны знать нормативную базу и уметь использовать нормативные отраслевые документы в своей деятельности.

Строительная механика - наука о прочности, жесткости и устойчивости сооружений.

1.1 Понятия строительной конструкции, ее элементов

Сооружение – объект, построенный человеком, который с точки зрения строительной механики представляет собой конструкцию, которая воспринимает внешние нагрузки и передает их на фундамент, сохраняет работоспособность в течение всего срока эксплуатации, сохраняя прочность, жесткость и устойчивость.

Строительная конструкция - часть здания или сооружения, выполняющая определенные несущие, ограждающие или эстетические функции.

Расчетная схема сооружения (система) - упрощенное изображение сооружения, в котором отражены только основные свойства сооружения, рисунок 1.1.

Конструкция -

- 1) сооружение предварительно изготовленное и перевозимое к месту постройки, которое входит в состав более сложного целого;
- 2) неисследованная расчетная схема сооружения.

Опора - устройство, соединяющее сооружение с фундаментом и налагающее связи (ограничения) на перемещения сооружения.

Пролет - расстояние между опорами.

Ригель - горизонтальный элемент сооружения любой конструкции, служащий для перекрытия пролетов.

Колонна - вертикальный элемент, поддерживающий верхнюю часть сооружения. Моделируется стержнем, работающим на сжатие.

Консоль - 1) часть сооружения, выступающая за опоры; 2) консольная балка - балка с одним закреплённым и другим свободным концом.

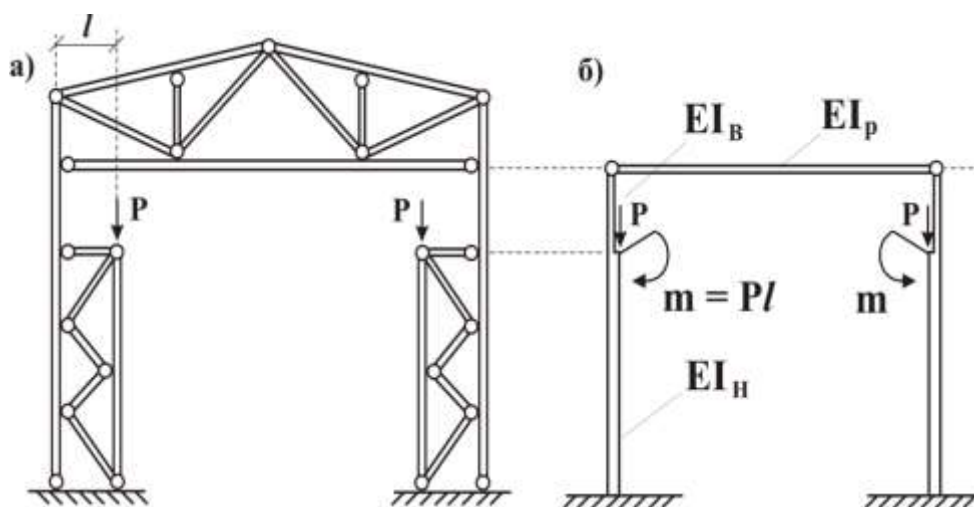


Рисунок 1.1 - Варианты расчетных схем поперечной рамы каркаса здания.

1.2 Классификация нагрузок согласно Своду Правил

В Своде Правил (СП) "Нагрузки и воздействия" внешние нагрузки классифицируются следующим образом:

Статическая нагрузка - нагрузка, при воздействии которой не учитываются силы инерции сооружения (постоянные, длительные и кратковременные).

Динамическая нагрузка - нагрузка, при воздействии которой учитываются силы инерции сооружения. К динамическим нагрузкам относятся особые и прочие нагрузки [6].

Постоянная нагрузка - статическая нагрузка, не меняющаяся в течение всего времени эксплуатации сооружения (постоянные и длительные).

Временная нагрузка - статическая нагрузка, меняющаяся в течение всего времени эксплуатации сооружения. К временным относятся кратковременные нагрузки [6].

Подвижная нагрузка - статическая нагрузка, меняющая координату её приложения. Например, движение транспорта по мосту или груза по стреле крана.

Расчетная нагрузка (невыгоднейшая) - совокупность постоянной и временных нагрузок, соответствующих максимальному положительному или

отрицательному значению усилий или перемещений, которые могут возникнуть при его эксплуатации и возведении.

Нагрузки по месту приложения делятся:

Сосредоточенная нагрузка - это нагрузка, площадь приложения которой мала по сравнению с площадью конструкции, характеризуется силой P [Н].

Погонная нагрузка - нагрузка, распределенная по единичной длине бруса. Характеризуется интенсивностью q [Н/м].

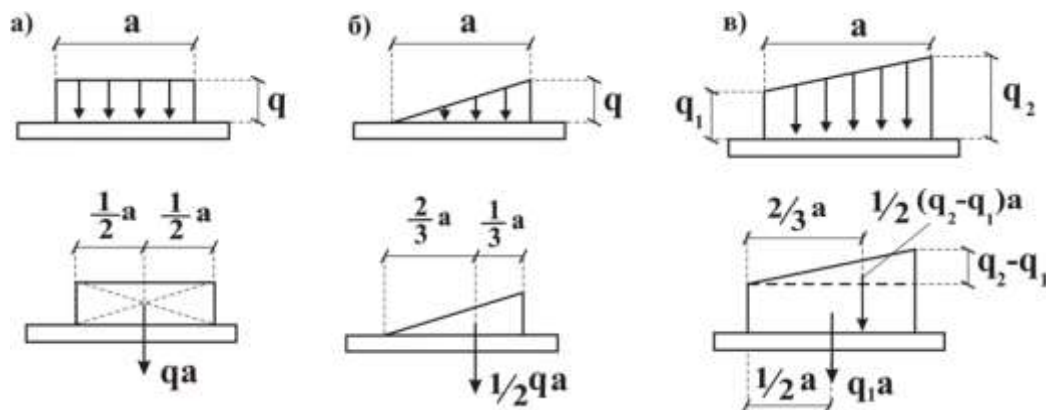


Рисунок 1.2 – Приведение погонной нагрузки к сосредоточенной силе.

а - равномерно распределенная нагрузка (собственный вес, полезная, снеговая, ветровая нагрузки);

б - нагрузка распределенная по треугольному закону (давление воды на плотину, ригеля на колонну);

в - трапецевидная распределенная нагрузка (снеговая нагрузка на сводчатые покрытия, на покрытия с перепадами высоты [6]).

Объемная нагрузка - нагрузка, приложенная к единичному объёму тела. Характеризуется интенсивностью q [Н/м³].

Поверхностная нагрузка - нагрузка, приложенная к единичной поверхности тела. Характеризуется интенсивностью q [Н/м²].

Пара сил - две параллельные силы, равные по модулю, направленные в противоположные стороны, не лежащие на одной прямой, рисунок 1.3.

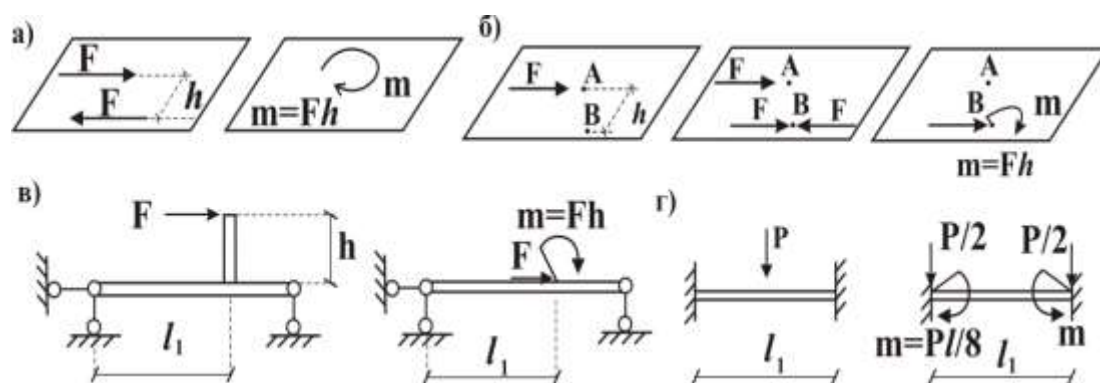


Рисунок 1.3 - Пара сил при статически эквивалентных преобразованиях.

а - пара сил в плоскости; б, в - перенос силы из точки А в точку В;
г - преобразование нагрузки в узлы.

Типовые элементы строительных конструкций приведены на рисунке 1.4.

Брус - элемент, поперечные размеры которого много меньше длины.

Стержень - прямолинейный брус.

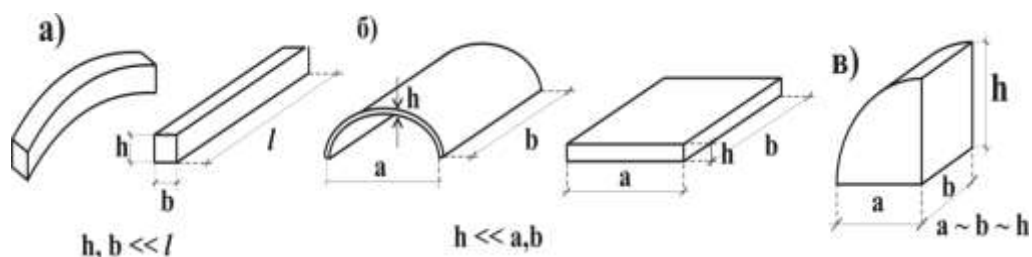


Рисунок 1.4 - Классификация элементов расчетных схем по размерности
а - брус и стержень - одномерный элемент; б - пластина, оболочка и плита -
двумерный элемент; в - массивное тело - трехмерный элемент.

Пластина - тело, толщина которых много меньше двух других размеров.

Плита - пластина, работающая на изгиб.

Оболочка - криволинейная пластина.

Массивные тела - элементы, габариты которых сопоставимы.

1.3 Стержневые строительные конструкции и их элементы, узлы соединения. Выбор методов расчета

Стержневая система - расчетная схема, моделирующая работу сооружения стержнями, классификация стержневых систем представлена на рисунке 1.6

Балка - стержень, работающий на изгиб.

Рама - вид системы с жесткими узлами, элементы которой испытывают все виды плоской деформации: растяжение или сжатие, сдвиг и изгиб.

Ферма - вид системы с шарнирными узлами, элементы которой работают на растяжение или сжатие.

Арка - криволинейный брус с выпуклостью противоположной направлению действия нагрузки. Арка работает на осевое сжатие и изгиб.

Вантовое сооружение - система с гибкими связями (вантами), работающими на растяжение.

Комбинированное сооружение - сооружение, в котором элементы различаются по характеру работы. Например, балка работает на изгиб, а стержни фермы - на растяжение или сжатие (рисунок 1.5 е).

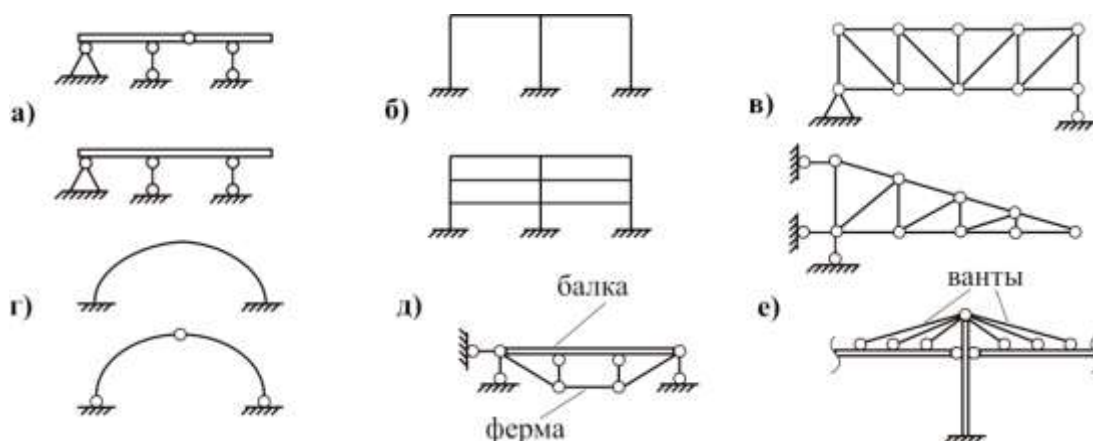


Рисунок 1.5 - Классификация сооружений по характеру работы элементов.

а - балка; б - рама; в - ферма; г - арка; д - комбинированное сооружение (для пролетов ($6 < l < 15$ м), где использовании балки не экономично из-за большого веса, а фермы - из-за трудоемкости изготовления); е - вантовое сооружение (как правило, является одновременно комбинированным сооружением).

Классификация сооружений по наличию распора (рисунок 1.5 б):

Безраспорная система - система, у которой вертикальная нагрузка вызывает вертикальные опорные реакции.

Распорная система - система, у которой вертикальная нагрузка вызывает наклонные опорные реакции.

Распор - горизонтальная составляющая опорной реакции.

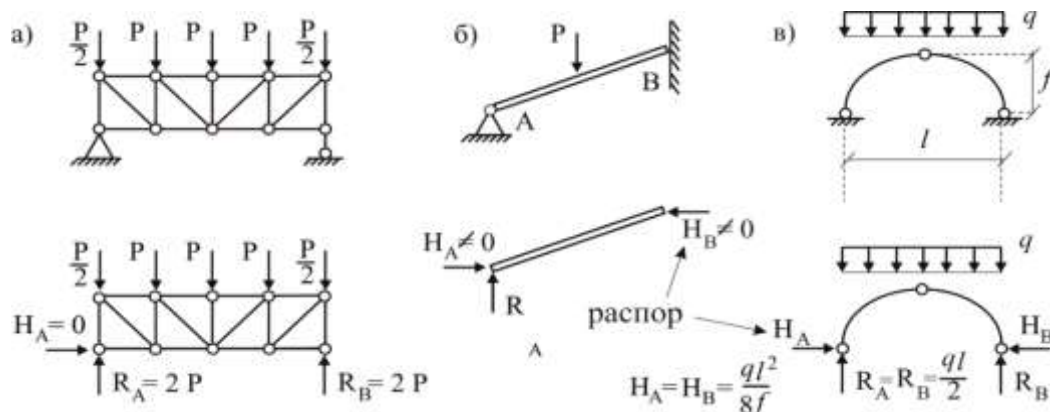


Рисунок 1.6 - Распорные и безраспорные стержневые системы.

Безраспорные: а – балочные фермы или балки; распорные: б - наклонные балки; в – трехшарнирные системы.

Условные обозначения типовых соединений стержней системы представлены на рисунке 1.7:

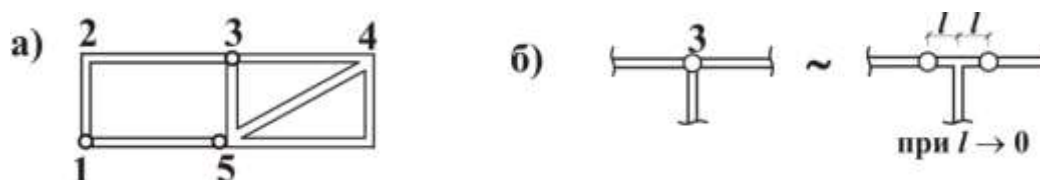


Рисунок 1.7 – Названия узлов в расчетных схемах.

а) - 1 - простой шарнирный; 2 - простой жесткий; 3 - сложный шарнирный; 4 - сложный жесткий; 5 - комбинированный.

б) сложный шарнирный узел 3, в котором сходится три стержня ($n=3$), эквивалентен двум $(n-1)$ простым шарнирным узлам, которые позволяют левой и правой части ригеля поворачиваться вокруг стойки.

Узел - точка пересечения осей двух или более стержней.

Простой узел - точка пересечения осей двух стержней.

Сложный (кратный) узел - точка пересечения осей более двух стержней, и эквивалентен $(n-1)$ простым узлам, где n - число стержней, сходящихся в точке.

Шарнирный узел - точка системы, относительно которой стержни могут поворачиваться.

Жесткий узел - точка системы, в которой стержни соединены жестко.

Комбинированный узел - точка системы, в которой часть стержней соединены жестко, часть - шарнирно.

Методы расчета систем

- **Расчет по допускаемым напряжениям** - конструкция считается неработоспособной, если хотя бы в одной точке условия прочности не выполняются. В качестве модели поведения материала используется закон Гука [4].
- **Расчет по предельному равновесию** - конструкция считается неработоспособной, если она превратилась в механизм. В качестве модели поведения материала используется диаграмма Прандтля.

Тема 2. Принципы конструирования стержневых систем. Кинематический анализ сооружений

Цель: обладать практическими навыками проводить расчетное обоснование и конструирование строительных конструкций зданий и сооружений промышленного и гражданского назначения.

Ключевые вопросы:

- 2.1. Степень свободы сооружения.
- 2.2. Степени свободы конструкции при наложении опорных связей.
- 2.3. Дисковые аналоги системы
- 2.4. Геометрически неизменяемые системы и геометрически изменяемые системы
- 2.5. Качественная оценка кинематического анализа

Методические указания

Умение решать задачи строительной механики – это есть умение проектировать сооружения, а также умение оценивать их прочность и надёжность. Поэтому необходимо внимательно изучить принципы конструирования сооружений, которые удовлетворяют условиям прочности по

допускаемым напряжениям и геометрической неизменяемости по предельному равновесию. В любом случае, создается ли новая конструкция, или производится проверка на прочность заданная схема, предварительно необходим кинематический анализ сооружения, основные положения которого изложены в этом разделе. Инженерные сооружения состоят из элементов твердых тел, воспринимающих нагрузки, и, в основном, являются неизменяемыми. Строителям важно понимать, как соединять элементы сооружения, чтобы иметь неизменяемую систему, в этом случае для анализа используется дисковая аналогия системы.

2.1 Конструирование стержневых систем

Как известно, любое сооружение или конструкции, его составляющие, необходимо представить расчетными схемами, которые могут быть:

по кинематической природе:

- геометрически неизменяемые системы (ГНС),
- геометрически изменяемые системы (ГИС),
- мгновенно изменяемые системы (МИС);

по признаку статической определимости:

- статически определимые системы (СОС),
- статически неопределимые системы (СНС).

Остановимся подробнее на понятии степени свободы; связей, накладываемых на элементы стержневой системы; геометрической изменяемости; кинематическом механизме.

Степень свободы сооружения (W) - число независимых параметров, однозначно определяющих положение элементов системы, рисунок 2.1.

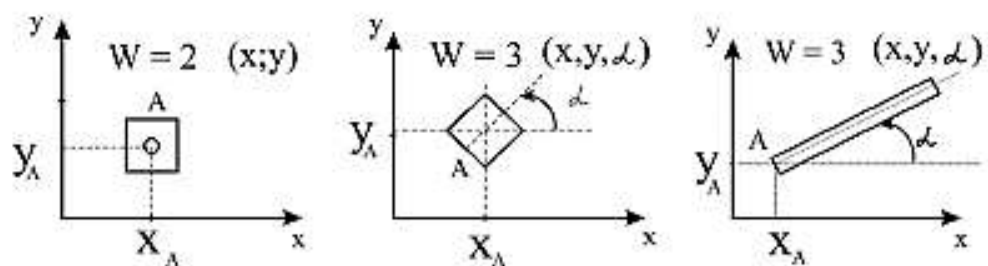


Рисунок 2.1 - Степени свободы элементов

а - шарнирный узел является точкой на плоскости ($W=2$); б - жесткий узел является диском на плоскости ($W=3$); в - стержень на плоскости. x, y - линейные степени свободы, φ - угловая степень свободы.

Связь - ограничение на перемещения точек системы.

Опорные связи - связи, которые ограничивают перемещение системы относительно фундамента.

Рассмотрим конструктивные решения опорных связей, характерные для строительных конструкций, и соответствующее им число степеней свободы и реакций, (таблицы 2.1 – 2.2).

Отдельными элементами плоских стержневых систем являются стержни различной формы, а также неизменяемая часть системы, составленная из стержней, называют **дисками** и изображают фигурой произвольной формы.

Соединение дисков в системы связано с понятиями о степенях свободы и неизменяемости систем.

Диск - неизменяемая часть сооружения. В том числе, диском является земля, фундамент сооружения.

Стержень (подвижный шарнир, связь) - связь, допускающая вращение системы вокруг определенной оси и её поступательное перемещение, параллельное некоторой прямой (таблица 2.1).

Таблица 2.1 – Конструктивное решение опорных узлов и обозначения

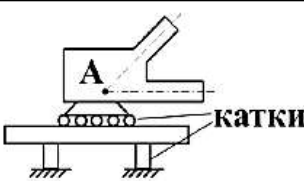
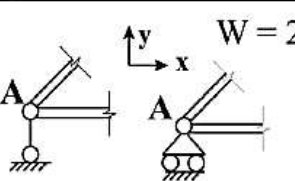
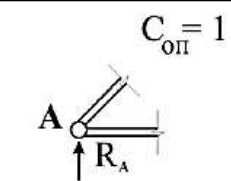
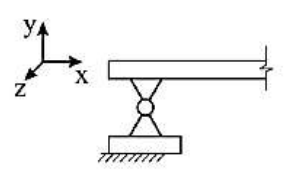
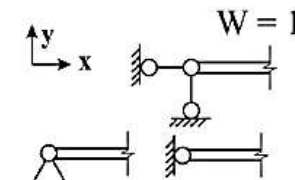
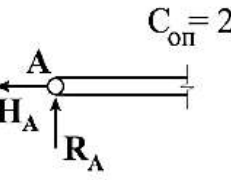
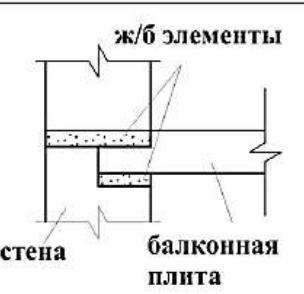
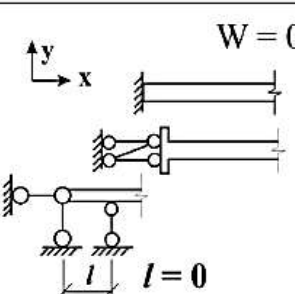
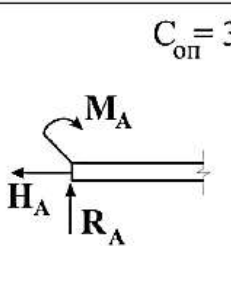
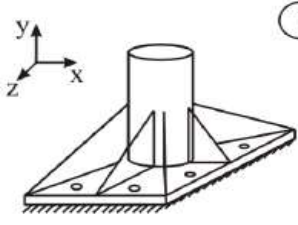
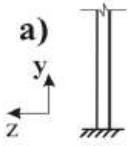
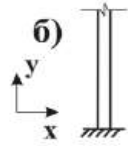
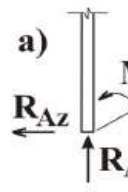
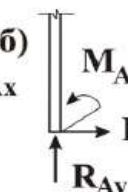
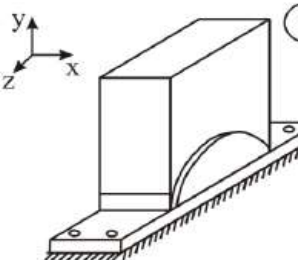
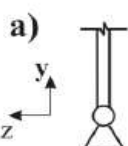
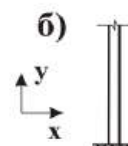
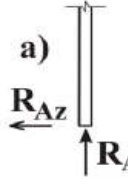
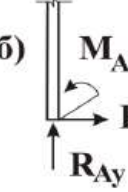
	конструкция узла	обозначение в расчетной схеме	реакции опоры
стержень			
шарнир			
заделка			

Таблица 2.2 - Конструктивное решение узлов опорных связей

конструкция узла	обозначение в расчетной схеме	реакции опоры
	$W = 0$ $W = 0$ а)  б) 	$C_{оп} = 3$ $C_{оп} = 3$ а)  б) 
	$W = 1$ $W = 0$ а)  б) 	$C_{оп} = 2$ $C_{оп} = 3$ а)  б) 

Шарнир - 1) связь, допускающая вращение системы или её частей вокруг определенной оси в пространстве или точки на плоскости;

2) шарнирный узел - точка в расчетной схеме, относительно которой:

- система может поворачиваться относительно фундамента;
- диски или стержни могут поворачиваться относительно друг друга;

3) устройство (шарнирная опора), соединяющее систему с фундаментом и разрешающее их взаимный поворот. Обозначается на схеме шарнирным узлом.

Заделка - связь, не допускающая никаких перемещений системы относительно фундамента.

Междисковые связи - связи между частями сооружений (дисками)

Припайка - жесткий узел, соединяющий две части конструкции, образуя единый диск.

Степени свободы конструкции после наложения междисковых связей (таблица 2.3)

Таблица 2.3 – Междисковые соединения и силы взаимодействия

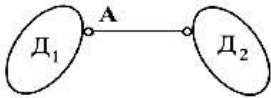
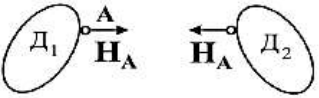
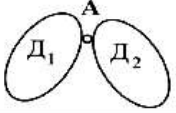
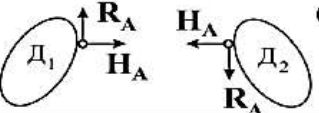
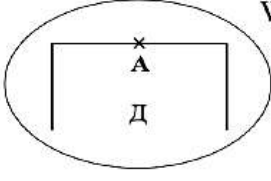
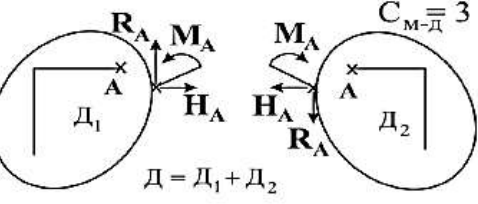
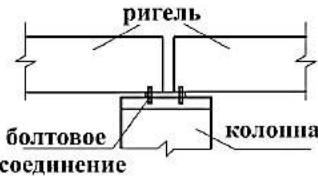
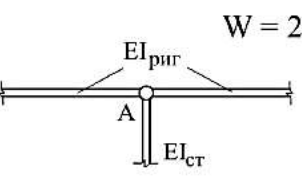
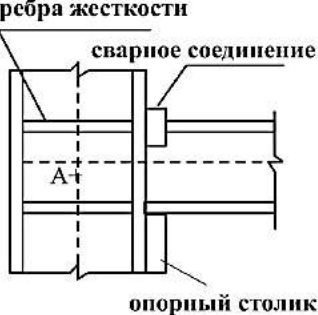
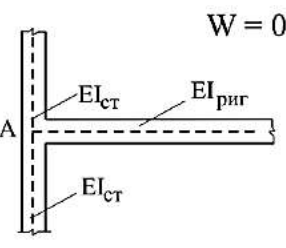
тип связи	обозначение в расчетной схеме	силовые взаимодействия между дисками
стержень (связь)	 $W = 2$	 $C_{M-D} = 1$
шарнир	 $W = 1$	 $C_{M-D} = 2$
заделка (припайка)	 $W = 0$	 $C_{M-D} = 3$ $D = D_1 + D_2$

Таблица 2.4 - Конструктивное решение узлов опорных связей

Вид соединений	Конструктивное решение узла	Расчетная схема
① шарнирный узел		 $W = 2$
② жесткий узел		 $W = 0$

Пояснения к таблице: 1 - шарнирное опирание ригеля на колонну должно давать возможность ферме поворачиваться относительно колонны, то есть верхний опорный узел фермы должен свободно перемещаться по стойке. Для этого в горизонтальных полках опорных уголков для болтов предусмотрены овальные отверстия; 2 - ребра жесткости воспринимают изгибающий момент, а опорный столик - поперечную силу в узле.

2.2 Принципы преобразования геометрически неизменяемых систем

Диском (Д) в расчетной схеме обозначают неизменяемый фрагмент расчетной схемы, разделенный шарнирами и связями. Следует отдельно обозначать диск «земля» (D_0) – условно абсолютно-жесткое тело, объединяющее все неподвижные опоры системы. Диски допускается укрупнять, используя правила образования геометрически неизменяемых систем. В этом случае шарниры внутри диска уже не учитываются. Соединения дисков в стержневых системах приводится в таблице 2.2.

Припайка (П) в расчетных схемах встречается в случае, если элементы одного диска создают замкнутый контур. Подобные схемы трудоемки для ручного расчета, поэтому их упрощают. Например, из практической деятельности известно, что узлы ферм не имеют между собой шарнирного соединения. Получается, что каждый замкнутый контур фермы создает одну припайку. Количество неизвестных возрастает на 3К и рассчитать ферму «вручную» становится практически невозможно. Поэтому, для «ручного» расчета расчетную схему фермы упрощают путем введения шарнирных узлов. Исключениями являются тяжелые фермы и фермы с малым углом наклона (менее 15°) между опорным элементами. В этих фермах пренебрегать изгибающим моментом недопустимо.

Внутренний шарнир Шв освобождает взаимодействие двух дисков в одном направлении, обычно от поворота. Полные шарниры освобождают взаимодействие трех или более дисков в нескольких направлениях, в данном случае от поворота. Количество шарниров в шарнирном узле определяется как: $Ш_v = C - 1$, где C – количество стержней, сходящихся в шарнирный узел.

Опорная связь (C_o) создает взаимодействие между диском «земля» и системой и рассчитывается как сумма одиночных связей, создаваемых опорами.

Узел фермы (У) определяется как общее количество шарнирных узлов фермы вне зависимости от количества сходящихся в узел стержней. Стержень фермы (C_ϕ) определяется как общее количество стержней фермы.

Контуром (К) системы является замкнутая ломаная, которой можно обвести диски, включая диск «земля».

2.3 Кинематический анализ сооружений

Кинематический анализ состоит из двух этапов:

- I этап: определение степени свободы;
- II этап: анализ геометрической неизменяемости.

I этап.

Определение степени свободы W выполняют по формулам:

- общая для любой системы: $W = 3Д - 3П - 2Ш_в - C_o$;
- для шарнирно-стержневой системы: $L = -W = C_ф + C_o - 2У$;
- для рам: $L = -W = 3К - Ш$;
- для неразрезных балок: $L = -W = C_o - 3$.

где: W – степень свободы системы; $Д$ – диск; $П$ – припайка; $Ш_в$ – шарнир внутренний;

$Ш_o$ – шарнир опорный; $Ш = Ш_в + Ш_o$ – общее количество шарниров – освобожденных связей; $C_в$ – связь внутренняя; C_o – связь опорная; $C = C_в + C_o$ – общее количество внутренних и опорных связей; $У$ – узел фермы; $C_ф$ – стержень фермы; $L = -W$ – «лишняя» связь; $К$ – замкнутый контур в расчетной схеме.

Таким образом, используя приведенные формулы можно определить степень свободы W , значение которой показывает, что:

- $W > 0$ – система геометрически изменяемая;
- $W = 0$ – система статически определимая;
- $W < 0$ – система статически неопределимая.

Геометрически изменяемые системы (механизмы) не рассматриваются в рамках изучаемого курса строительной механики. При $W < 0$ абсолютное значение $|W|$ определяет степень статической неопределимости системы.

Если $W \leq 0$, система должна быть дополнительно проверена на геометрическую неизменяемость.

II этап. Анализ геометрической неизменяемости заключается в необходимости доказательства правильности расположения внутренних и внешних связей, что определяет геометрическую неизменяемость системы.

Геометрически неизменяемой называется такая система, в которой отсутствуют перемещения отдельных ее элементов без их деформации.

Таблица 2.5 – Соединение дисков

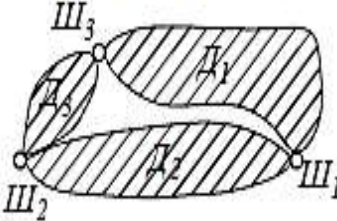
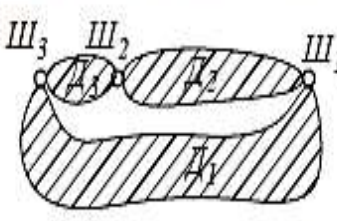

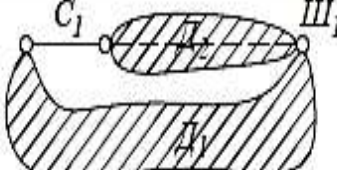
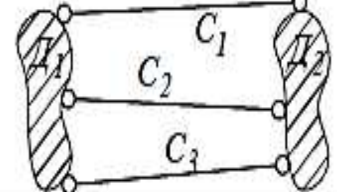
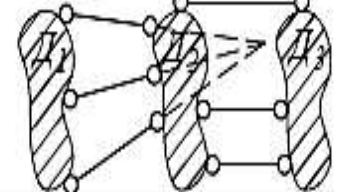
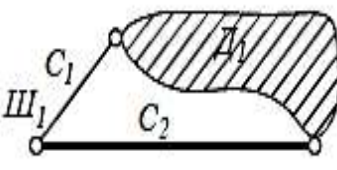
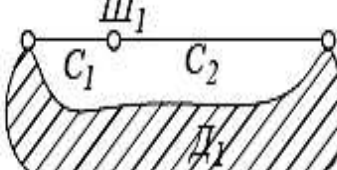
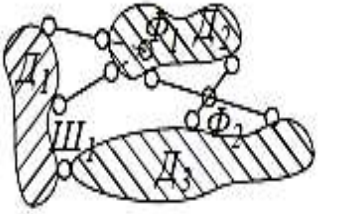

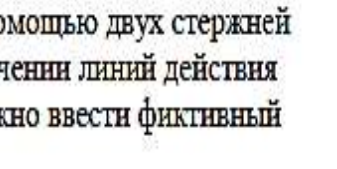
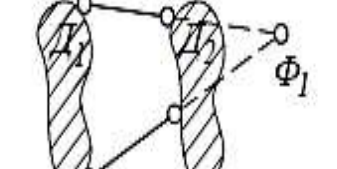
Принцип	Геометрически неизменяемая схема	Геометрически мгновенно-изменяемая схема
1. Три диска соединяются тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой		
2. Два диска соединяются шарниром и стержнем, ось которого не проходит через этот шарнир		
3. Два диска соединяются тремя стержнями, не параллельными и не сходящимися в одной точке		
4. К диску присоединяется новый узел с помощью двух стержней (диады), не лежащих на одной прямой		
5. Три диска соединяются с помощью трех обычных или фиктивных шарниров, не лежащих на одной прямой		
6. Если два диска соединяются с помощью двух стержней (четырёхугольник), то на пересечении линий действия противоположных стержней можно ввести фиктивный шарнир		

Таблица 2.6 - Шарниры и связи в расчетных схемах

Условное обозначение	Наименование	Шарниры $Ш$		Связи $С$		Припайка $П$
		$Ш_с$	$Ш_о$	$С_с$	$С_о$	
	простой шарнир	1	–	2	–	–
	неполный (примыкающий) шарнир	1	–	2	–	–
	полный шарнир	2	–	4	–	–
	общий шарнирный узел	$C-1$	–	$2C-2$	–	–
	заделка	–	0	–	3	–
	шарнирно-неподвижная опора	–	1	–	2	–
	горизонтальный ползун	–	1	–	2	–
	вертикальный ползун	–	1	–	2	–
	горизонтально-подвижная шарнирная опора	–	2	–	1	–
	вертикально-подвижная шарнирная опора	–	2	–	1	–
	припайка (создается замкнутым контуром внутри одного диска)	–	–	–	–	1

Дисковый аналог системы - расчетная схема (система), представленная в виде дисков.

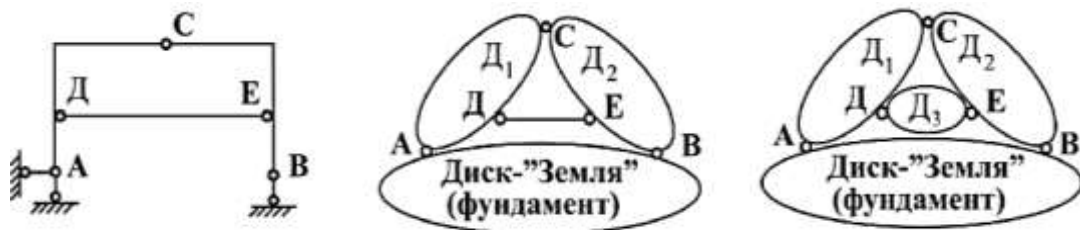


Рисунок 2.2 - Дисковый аналог системы.

а - расчетная схема; б - её дисковый аналог, где шарнир в точке С и стержень Д-Е являются междисковыми связями; в - дисковый аналог в котором стержень Д-Е представлен в виде диска, а три диска соединены тремя шарнирами С, Д, Е, не лежащими на одной прямой (образующими геометрически неизменяемую систему).

2.4 Основные формулы кинематического анализа стержневых систем

$$W = 3 \cdot D - 2 \cdot Ш - C - C_{\text{оп}}, \quad (2.1)$$

где W - число степеней свободы сооружений, D - количество дисков, $Ш$, C - число шарниров и стержней между дисками, $C_{\text{оп}}$ - число опорных связей.

Определение числа степеней свободы фермы:

$$W_{\text{ф}} = 2 \cdot Y - C - C_{\text{оп}}, \quad (2.2)$$

где $W_{\text{ф}}$ - число степеней свободы фермы, Y - число узлов, C - число стержней, $C_{\text{оп}}$ - число опорных связей.

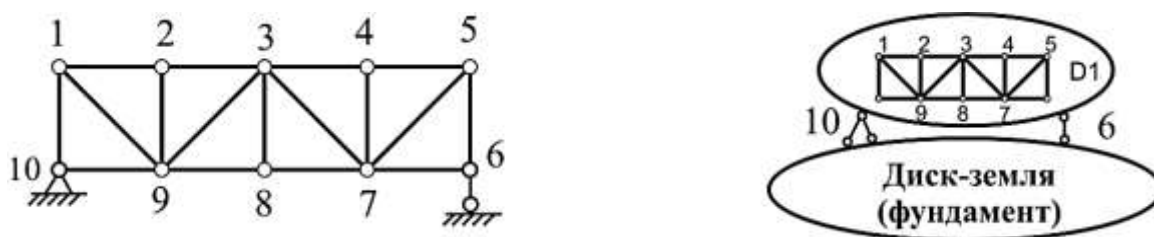


Рисунок 2.3 - Дисковый аналог простой фермы.
а - расчетная схема; б - её дисковый аналог;

В формуле (2.1) $D=1$, $Ш = 0$, $C = 0$, $C_{\text{оп}} = 3$,

$$W = 3 \cdot D - 2 \cdot Ш - C - C_{\text{оп}} = 3 \cdot 1 - 3 = 0;$$

по формуле (2.2) $W_{\text{ф}} = 2 \cdot Y - C - C_{\text{оп}} = 2 \cdot 10 - 17 - 3 = 0$.

Статически определимая система ($W = 0$) – это система, внутренние усилия которой из уравнений статики определяются однозначно.

Статически неопределимая система ($W < 0$) – это система, внутренние усилия которой из уравнений статики определяются неоднозначно.

Свойства статически определимых систем: 1) не чувствительны к неточностям изготовления элементов конструкции, осадке опор, температурным воздействиям; 2) выход из строя одного элемента приводит к геометрической изменяемости (разрушению) сооружения.

2.5 Качественная оценка кинематического анализа

Механизм (геометрически изменяемая система (ГИС)) - система, точки которой без деформаций элементов могут перемещаться.

Геометрически неизменяемая система (ГНС) - система, точки которой без деформаций элементов не могут перемещаться.

Мгновенно изменяемая система (МИС) - система, точки которой без деформаций элементов могут получать малые перемещения.

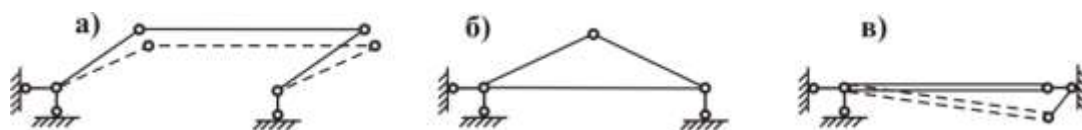


Рисунок 2.4 - Классификация систем по кинематическому признаку.

- а) - механизм (строительная механика не изучает). Условие $W > 0$ является необходимым и достаточным условием того, что система является механизмом;
- б) - геометрически неизменяемая система;
- в) - мгновенно изменяемая система.

Условие $W \leq 0$ является *необходимым, но не достаточным* условием для геометрической неизменяемости системы, потому что нужно выявить фиктивные шарниры.

Фиктивный шарнир - точка пересечения осей двух стержней, связывающих два диска (точка А рисунок 2.5).

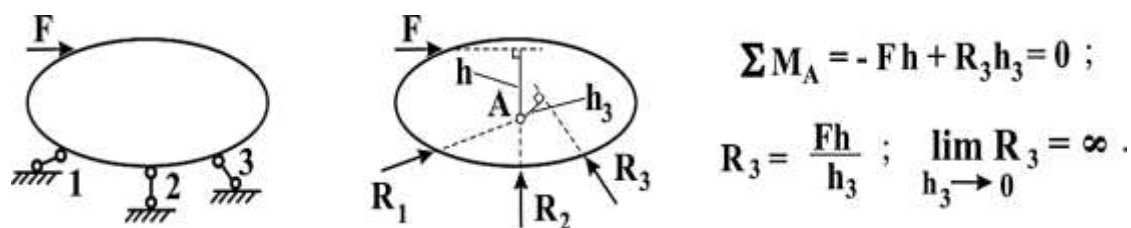
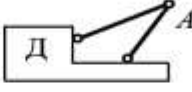
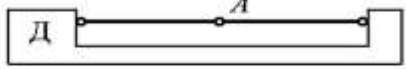
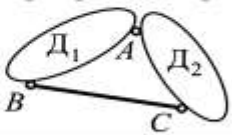
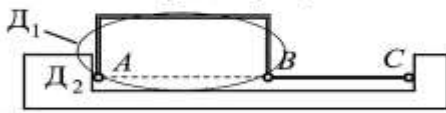
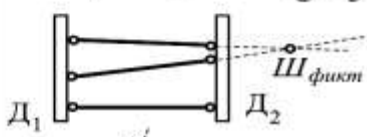




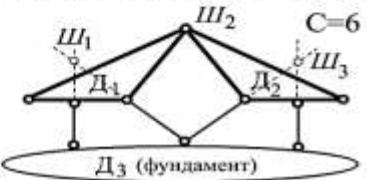
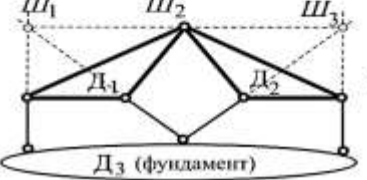


Рисунок 2.5 - Свойство систем, близких к мгновенно изменяемым

При $h_3 \rightarrow 0$ система становится мгновенно изменяемой, а реакция $R_3 \rightarrow \infty$; в системах, близких к мгновенно изменяемым, усилия в отдельных элементах много больше, чем в остальных.

Образование геометрически неизменяемых систем и исключения приведены в таблице 2.7

Таблица 2.7 – Соединения дисков в неизменяемые стержневые системы

Вид соединения	Минимальное количество связей (С)	Исключения
Узел и диск	<p>Диада $C = 2$</p> 	<p>Два стержня лежат на одной прямой</p> 
Два диска	<p>Шарнир A и стержень BC $C = 3$</p> 	<p>Направление BC проходит через шарнир A</p> 
	<p>Три стержня $C = 3$</p> 	<p>1) Стержни параллельны</p>  <p>механизм</p> <p>2) Оси стержней пересекаются в одной точке</p>  <p>Мгновенно Изменяемая Система</p>
Три диска	<p>Три шарнира $C = 6$</p> 	<p>Три шарнира лежат на одной прямой</p> 
	<p>Пары стержней образуют фиктивные шарниры $C = 6$</p> 	<p>Три шарнира лежат на одной прямой</p>  <p>МИС</p>

Тема 3. Расчет статически определимых многопролетных балок

Цель: владеть практическими навыками проводить расчетное обоснование и конструирование строительных конструкций зданий и сооружений промышленного и гражданского назначения.

Ключевые вопросы:

3.1 Статически определимые многопролетные балки

3.2 Кинематический анализ многопролетных балок

3.3 Линии влияния

3.4 Определение усилий по линиям влияния

3.1 Проектирование и расчет статически определимых многопролетных балок

В плоских стержневых (балочных и рамных) конструкциях отдельные стержни (жесткие диски) могут соединяться между собой: жестко; с помощью шарниров; подвижными связями. Для определения внутренних усилий в стержнях можно составить условия равновесия каждого стержня, получив систему уравнений с неизвестными внутренними усилиями: концевыми значениями всех силовых факторов для каждого стержня. В *статически определимых системах* число составленных уравнений будет равно числу неизвестных, что позволяет однозначно решить полученную систему уравнений.

Но этот способ расчета не рационален. Удобнее проанализировать структуру системы; выявить элементы, присоединенные к *основной* части, и провести более простой расчет.

Присоединенной называется такая часть системы, которую можно удалить без нарушения неизменяемости оставшейся части. Рассчитать ее можно независимо от оставшейся части, причем опорные реакции присоединенной системы будут служить внешними силами для оставшейся.

Геометрически неизменяемая и статически определимая система, состоящая из ряда простых балок, соединенных между собой полными идеальными шарнирами, называется *многопролетной статически определимой или многопролетной шарнирно–консольной балкой*. Отдельные балки могут быть сплошными или решетчатыми (фермы). Методика расчета основана на использовании основных свойств статически определимых стержневых системах, а именно на выделении основных и присоединенных частей.

Необходимое количество шарниров должно быть расположено таким образом, чтобы система во всех своих частях была геометрически неизменяемая и статически определимая.

В зависимости от расположения опор и шарниров, разрезные балки могут быть разными (рисунок 3.1). Их всего принципиально три типа:

- а) не встречается жесткое закрепление одного или двух торцов крайних балок;
- б) имеется одно жесткое закрепление (слева или справа);
- в) многопролетная балка жестко закреплена по торцам.

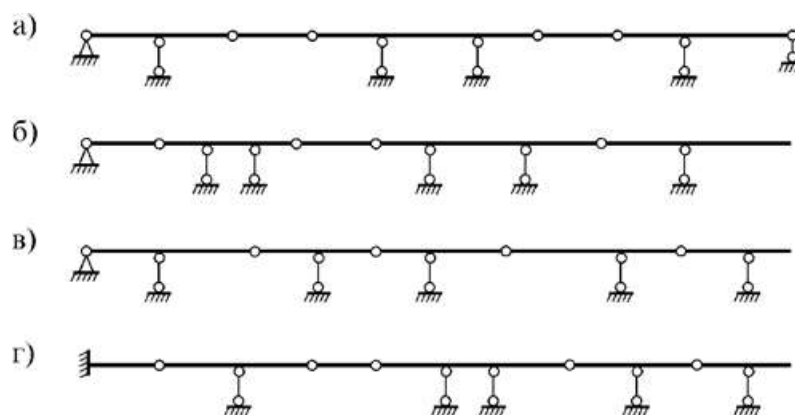


Рисунок 3.1 – Варианты конструирования многопролетных балок

Необходимым условием геометрической неизменяемости балки является равенство нулю ее степени свободы $W = 3D - \text{III} - C_0 = 0$. Число дисков D или отдельных балок зависит от количества шарниров III , т.е. $D = \text{III} + 1$. Поэтому выражение $3(\text{III} + 1) - 2\text{III} - C_0 = 0$ позволяет получить необходимое условие геометрической неизменяемости многопролетной статически определимой балки в виде

$$\text{III} = C_0 - 3, \text{ где } C_0 - \text{число опорных связей.}$$

Для соблюдения условий статической определимости и геометрической неизменяемости во всех частях таких балок при их конструировании необходимо выполнять следующие правила:

- 1) в каждом пролете должно быть не более двух шарниров;
- 2) пролеты с двумя шарнирами следует чередовать с пролетами без шарниров;
- 3) если крайняя опора шарнирная, то в примыкающем пролете может быть установлено не более одного шарнира;
- 4) если крайняя опора имеет заделку, то в примыкающем пролете должно располагаться не менее одного шарнира;
- 5) для того, чтобы балка была неподвижной, в горизонтальном направлении достаточно одной связи первого вида.

Взаимодействие частей разрезной балки легче изучать путем составления их поэтажных схем. Для этого выявляются части многопролетной балки, которые самостоятельно несут внешнюю нагрузку (**главные балки**). Все главные балки изображаются на нижнем этаже. Части балок, прилегающие к главным балкам (**подвесные балки**), воспринимают нагрузку, только опираясь на главные балки, на схемах располагаются этажом выше и т.д. В результате получается поэтажная схема балки.

При изображении поэтажной схемы балки, следует иметь в виду, что нарушается общая горизонтальная связь балки, но при отсутствии нагрузки,

действующей вдоль оси балки, геометрическая неизменяемость и статическая определимость сохраняется.

По условиям работы балки разделяются на: независимые и зависимые.

Независимые балки - воспринимают только местную нагрузку, расположенную в пределах их длины.

Зависимые балки – испытывают действие не только нагрузки, расположенной непосредственно на них, но и давление со стороны выше расположенных балок, на них опирающихся.

Например, рассмотренные на рисунке 3.1 разрезные балки можно представить в виде следующих поэтажных схем (рисунок 3.2).

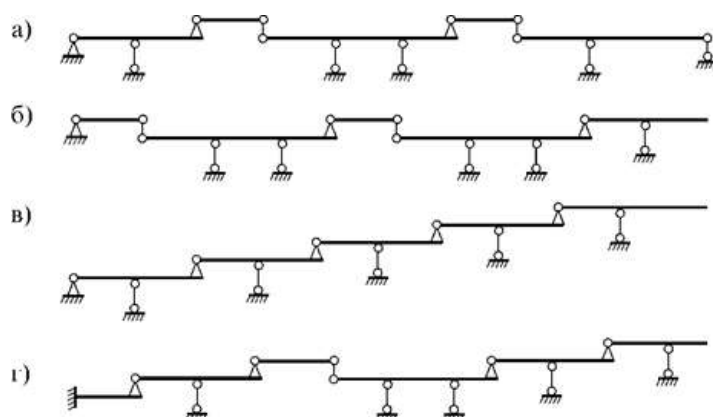


Рисунок 3.2 – Поэтажная схема многопролетных балок

3.2 Кинематический анализ многопролетной балки

Принцип построения поэтажной схемы:

1. Мысленно рассечем рассматриваемую балку по шарнирам, соединяющим между собой отдельные балки. Тогда система распадется на ряд балок (жестких дисков), часть из которых обладает достаточным количеством связей, обеспечивающих их самостоятельную работу – основные части, другие же не будут самостоятельно работать – присоединенные части.

2. Расположим основные балки на нижних уровнях, а соседние присоединенные подыдем выше. Следует следить за тем, чтобы у балок не было «лишних» связей, иначе система может быть статически неопределимой и требующей других методов расчета. Последовательно построив поэтажную схему (рисунок 3.2), установим взаимосвязь отдельных частей многопролетной балки.

Расчет разрезных балок начинается с самого верхнего этажа:

1. определим опорные реакции и внутренние усилия этой части балки от ее нагрузки;
2. переходим к нижележащему этажу - помимо нагрузки в пролете балки, приложим давление от вышележащего этажа (равное реакции вышележащего этажа, направленное в противоположную сторону);
3. определим его реакции и внутренние усилия;
4. расчет продолжается до самого нижнего этажа.

При расчетах обязательно согласование эпюр (скачки в эпюрах в местах реакций в шарнирах, отсутствие изгибающего момента в соединительных шарнирах).

На рисунке 3.3 показаны статически определимая многопролетная балка и этапы ее расчета.

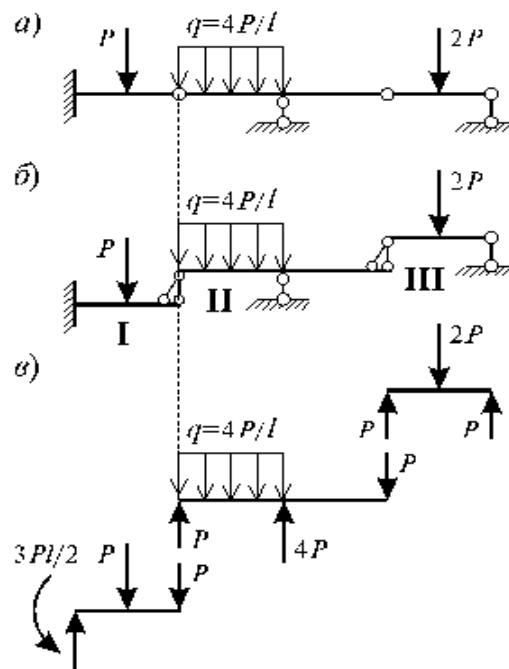


Рисунок 3.3 – Этапы расчета многопролетной балки

Основной балкой является балка I, балка III - присоединенная, балка II – присоединенная по отношению к балке I и основная по отношению к балке III (рисунок 3.3, б).

Степень изменяемости системы: $n = 3D - C = 3 \cdot 3 - 9 = 0$.

Число степеней свободы системы определяется из выражения:

$$W = 3D - 2III - C_0 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0.$$

Так как, в данном случае выполняются необходимое и достаточное условие, т.е. $n = 0$ и $W = 0$, то данная схема геометрически неизменяемая и статически определимая.

Рассчитав последовательно присоединенную балку III, получим реакции, передающиеся от балки III к основной балке II.

Далее рассчитываем балку II, как присоединенную, и получим реакцию, передающуюся балке I. Определение внутренних усилий в каждой балке рассматривается самостоятельно, считая их статически определимыми системами.

3.3 Линии влияния и их применение для расчета статически определимых балок

В курсе строительной механики стержневые системы рассчитываются не только на постоянную нагрузку, но при действии *подвижных нагрузок*

Подвижной нагрузкой называется нагрузка, которая перемещается по сооружению с некоторой скоростью. К примеру, такой нагрузкой является транспорт (рисунок 3.4, а), поезд, движущийся по мосту; кран, движущийся по подкрановой балке и др. Нагрузку можно рассматривать как систему взаимосвязанных параллельных сил, движущихся по сооружению (рисунок 3.4, б). Величина усилий зависит от положения подвижной нагрузки. Поэтому нужно выбрать такое положение, при котором рассчитываемый элемент будет находиться в самых неблагоприятных условиях. Такое положение нагрузки называется *невыгоднейшим*, или *опасным*.

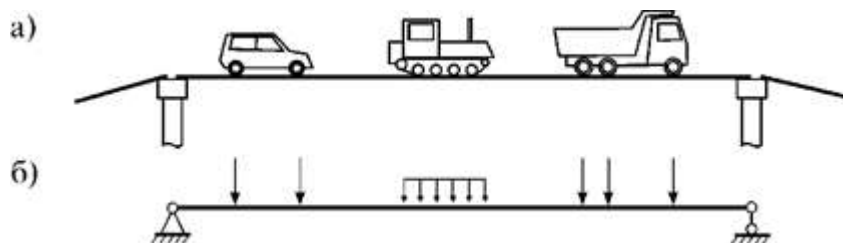


Рисунок 3.4 – Подвижная нагрузка на пролет моста и расчетная схема

3.4 Расчет сооружений на подвижную нагрузку

При расчете системы на подвижную нагрузку приходится решать несколько задач:

- 1) определение наиболее опасного положения нагрузки;
- 2) определение наибольшего значения этой нагрузки;
- 3) расчет сооружения на расчетную (наиболее опасную) нагрузку.

Расчет на подвижную нагрузку можно вести двумя методами:

1. *Сущность метода*: подвижная нагрузка рассматривается целиком и обозначается одной координатой; искомое внутреннее усилие выражается

как функция этой координаты; эта функция исследуется на экстремум и определяется расчетное положение нагрузки; затем вычисляется расчетное значение внутреннего усилия.

Этот метод универсален, но сложен для реализации.

2. *Метод линий влияния. Сущность метода:* искомая величина (внутреннее усилие, реакция и др.) определяется как функция от *подвижной единичной силы*; строится график этой функции, а затем находятся расчетное положение и расчетное значение этой величины.

Метод линий влияния более прост для реализации, позволяет достаточно просто определять расчетное положение нагрузки и ее величину.

Линия влияния (ЛВ) – это график изменения одного усилия (опорной реакции, реакции в связи, изгибающего момента, перерезывающего и продольного усилий) в определенном месте (сечении) конструкции от единичной безразмерной силы $P=1$, которая движется по конструкции без ускорения, сохраняя при этом постоянное направление.

Понятия ЛВ и эпюры нельзя путать, потому что эпюра показывает значение внутреннего усилия для всех точек (сечений) от постоянной нагрузки, а ЛВ показывает значение внутреннего усилия от подвижной единичной силы $P=1$ только для одного сечения.

Линии влияния применяют в системах, в которых груз (сосредоточенная сила) может перемещаться вдоль пролета, сохраняя свое направление.

Построение линий влияния усилий простой балки

- I. Рассмотрим консольную балку, на которую действует подвижная нагрузка $P=1$ (рисунок 3.5, а).

II. Линии влияния опорных реакций

Сумма моментов в правой опоре: $\Sigma M_B = -R_A \cdot l + 1 \cdot (l - x) = 0$.

Отсюда $R_A = \frac{l-x}{l}$.

Подставим значения x : если $x=0$, то $R_A=1$; если $x=l$, то $R_A=0$.

Через эти точки проводим прямую, построим ЛВ реакции R_A (рисунок 3.5, б).

Для определения опорной реакции R_B составим уравнение $\Sigma M_A = R_B \cdot l - 1 \cdot x = 0$.

Откуда $R_B = \frac{x}{l}$.

Получим следующие значения: если $x=0$, то $R_B=0$; если $x=l$, то $R_B=1$.

Через эти точки проводим прямую и строим л.в. реакции R_B (рис. 5.2, в).

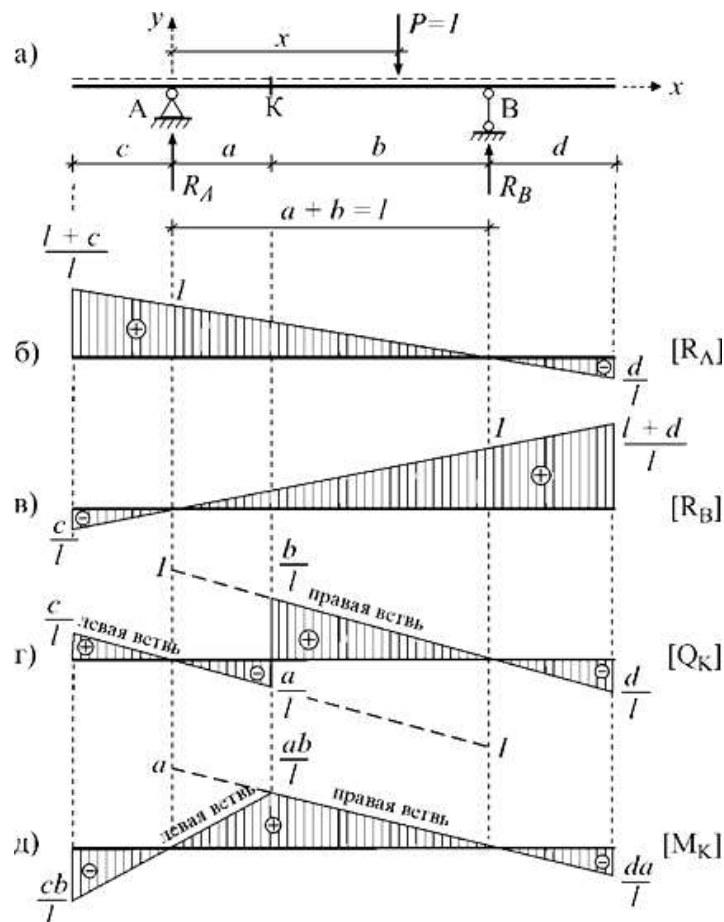


Рисунок 3.5 – построение линий влияния в консольной балке

III. Линии влияния поперечной силы и момента

Они зависят от положения сечения, в котором определяются.

а) Единичная сила правее сечения K . В этом случае $Q_K = R_A$, $M_K = R_A \cdot a$.

Эти функции определяют *правые ветви ЛВ* поперечной силы и момента в сечении K ((рисунок 3.5, г, д)).

б) Единичная сила левее сечения K . В этом случае внутренние усилия определяем через правую опорную реакцию. Тогда $Q_K = -R_B$, $M_K = R_B \cdot b$. Эти функции определяют *левые ветви ЛВ* поперечной силы и момента в сечении K ((рисунок 3.5, г, д)).

Если сечение располагается на консольных (левой или правой) частях балки (рисунок 3.6, а), ЛВ поперечной силы и момента будут совсем другими. Приведем результат их построения для двух сечений K_1 и K_2 (рис. 5.3, б-д).

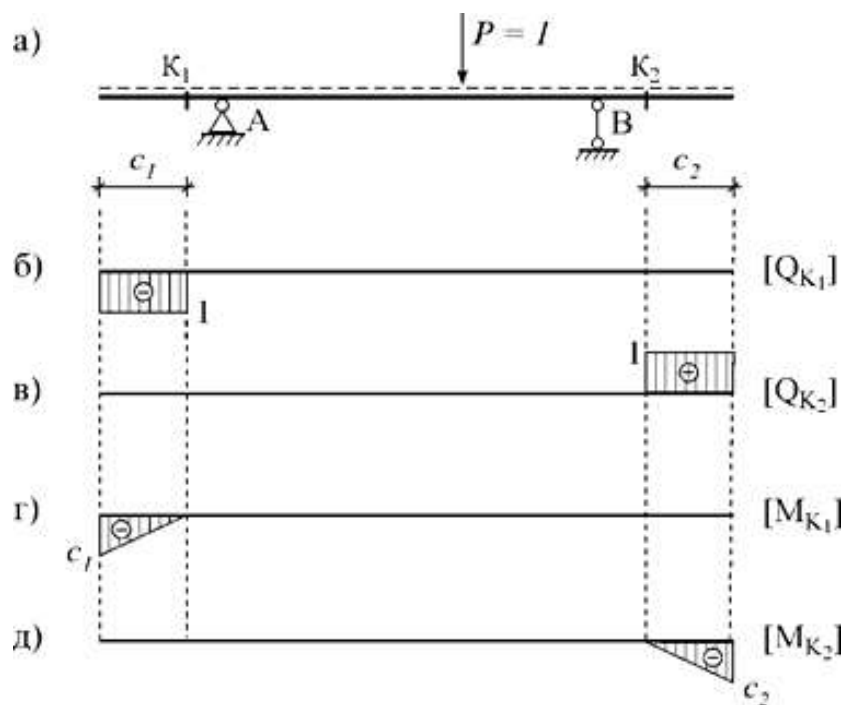


Рисунок 3.6 – Построение линий влияния, если груз расположен на консолях

В некоторых расчетных схемах встречаются консоли с заделками справа или слева. ЛВ их усилий можно получить и без расчетов, используя соответствующие левые и правые части предыдущих линий влияния ((рисунок 3.6, б-д), считая, что в точках A и B имеются заделки.

Полученные ЛВ опорных реакций и внутренних усилий используются как известные решения при расчете аналогичных балок и как промежуточные решения при расчете многопролетных балок.

3.5 Вычисление усилий по линиям влияния от нагрузки

Обратимся к ЛВ усилия R_A простой балки (рисунок 3.7). Отметим, что при нахождении силы $P = 1$ на опоре A величина реакции равна 1, а при нахождении силы $P = 1$ на расстоянии x от опоры A величина R_A будет равна величине $R_{A(x)}$, взятой из графика (рисунок 3.7). Если силу $P = 1$ увеличить в « n » раз, то и график (его значения) увеличится в « n » раз.

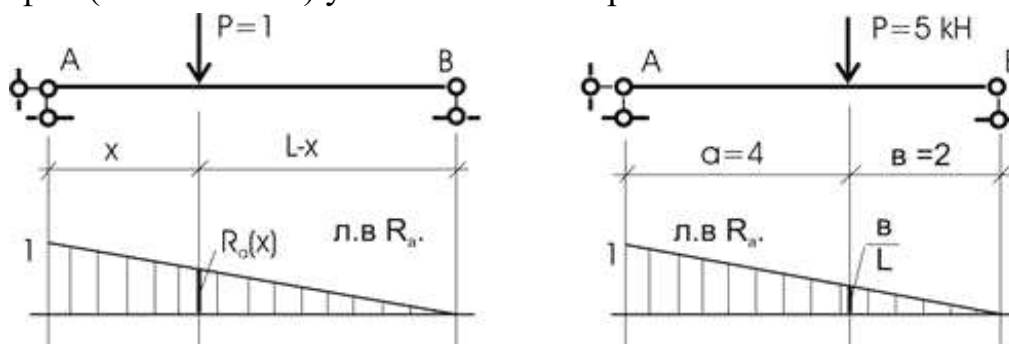


Рисунок 3.7 – Определение значений реакций по линиям влияния

Если балка сосредоточенной силой, $P = 5$ кН, величина R_A будет равна произведению силы 5 (кН) на ординату Л.В. R_A , взятую под силой, т. е. $R_A = 5 \frac{b}{l}$, вычисляя аналитически, получим то же значение R_A .

$$\sum M_B=0; R_A \cdot l - 5 \cdot b = 0; R_A = 5 \frac{b}{l}.$$

Если же балка или другая конструкция нагружена сосредоточенными силами (рисунок 3.8) и, пользуясь принципом независимости действия сил, вычислим значения усилия от каждой силы и результаты сложим, т. е.

$$S = P_1 y_1 + P_2 y_2 + \dots + P_n y_n = \sum_{i=1}^n P_i y_i,$$

где: P_i – значение сосредоточенной i -ой силы; y_i – ордината Л.В. усилия S , взятая под силой P_i .

От распределенной нагрузки $q(x)$ усилие через линии влияния определяется:

$$S = \int_a^b q(x) y(x) dx$$

где a и b - абсциссы начала и конца приложенной распределенной нагрузки.

Для равномерно распределенной нагрузки (рисунок 3.8) $q = \text{const}$:

$$S = q \int_a^b y(x) dx = q \Omega_{ab}$$

где Ω_{ab} - площадь, ограниченная линией влияния, осью абсцисс и прямыми $x = a$ и $x = b$.

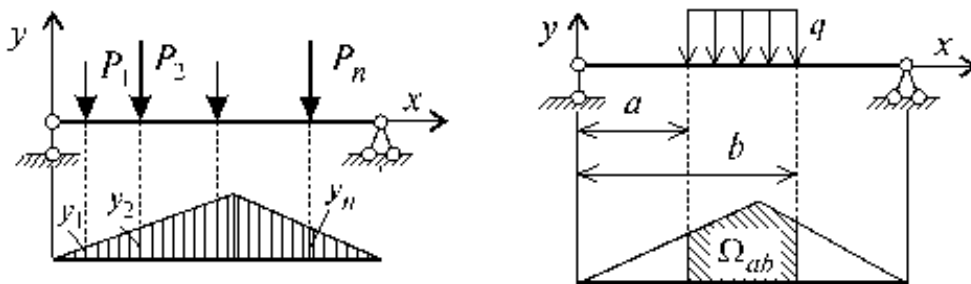


Рисунок 3.8 - Определение значений внутренних усилий по линиям влияния при действии сосредоточенных сил и распределенной нагрузки

Так для схемы на рисунке 3.8 с равномерно распределенной нагрузкой усилие S будет подсчитываться как произведение интенсивности нагрузки на площадь ($-\Omega$) ЛВ усилия (на рисунке 3.9 ЛВ усилия M_k), т. е. $S = \Omega \cdot q$ или для M_k :

$$M_k = \frac{q \cdot b \cdot a}{l} \cdot \frac{l}{2} = \frac{q \cdot b \cdot a}{2}.$$

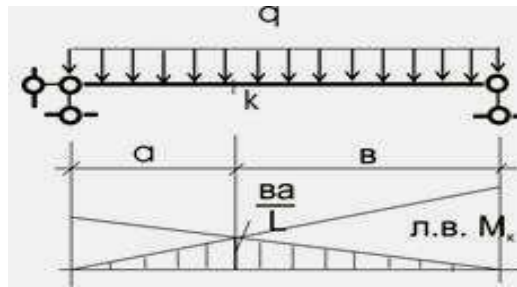


Рисунок 3.9 – Определение значений момента по линиям влияния

Необходимо установить правило знаков при расчете внутренних усилий по линиям влияния.

Если сосредоточенные силы и распределенная нагрузка направлены сверху вниз, то знак ординат линии влияния и площади определяет знак усилия.

Если положительная ветвь линии влияния отложена ниже оси стержня и сосредоточенный момент приходится на нее, то, когда поворот оси балки по кратчайшему углу к ЛВ совпадает с направлением сосредоточенного момента, имеем положительное внутреннее усилие.

Между понятиями *линии влияния* и *эюры*, которая также является графическим изображением закона изменения усилия или перемещения, существует различие. Хотя ординаты y_i линии влияния, и эюры моментов являются функциями от координаты x , но в случае ЛВ эта координата определяет положение груза $P = 1$, а в случае эюры - положение сечения, в котором находится определяемое усилие.

3.6 Матричная форма расчета усилий

При проведении расчетов с использованием вычислительной техники широко применяются **матрицы влияния**, т.е. матрицы, элементами которой являются ординаты линий влияния.

Задача расчета конструкции формулируется следующим образом: пусть требуется произвести расчет статически определимой системы на действие заданной нагрузки (рисунок 3.10, а).

Заданную систему заменим ее дискретной схемой, для чего наметим сечения $i = 1, 2, 3, \dots, n$, в которых требуется вычислить усилия $S_i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$.

Заменяя распределенную нагрузку сосредоточенными силами, а момент, в виде пары сил, система внешних сил представляется в виде системы сосредоточенных сил, (рисунок 3.10, б), $P^T = (P_1, P_2, P_3, \dots, P_n)$, где P_i - значение внешней силы, приложенной в i -ом сечении.

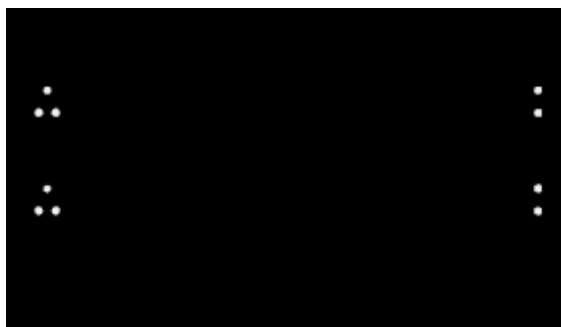


Рисунок 3.10 – Расчет статически определимой системы с помощью матриц влияния

Далее строятся линии влияния искомого усилия для сечений $i = 1, 2, 3, \dots, n$ заданной балки.

Согласно принципу независимости действия сил для каждого i -ого сечения можно составить выражение искомого усилия в следующем виде:

$$S_i = P_1 y_{i1} + P_2 y_{i2} + \dots + P_n y_{in} = \sum_{k=1}^n P_k y_{ik},$$

где y_{ik} - значение искомого усилия в i -ом сечении от единичной силы $P_k = 1$, приложенной в k -ой точке (рисунок 3.10, б).

Вводят векторы $S^T = (S_1, S_2, S_3, \dots, S_n)$; $P^T = (P_1, P_2, P_3, \dots, P_n)$ и матрицу L_S , элементами которой являются ординаты линий влияния:

$$L_S = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{bmatrix}.$$

Эта матрица называется *матрицей влияния* усилия S . При помощи введенных обозначений соотношения (1) можно записать в виде: $S = L_S P$.

На практике строится матрица влияния изгибающих моментов L_M . Далее, используя эту матрицу, можно воспользоваться формулой $Q = \frac{dM}{dx}$, и осуществить переход от матрицы влияния изгибающих моментов к матрице влияния перерезывающих сил. Для определения поперечной силы, действующей на произвольном i -ом участке балки, ограниченной сечениями i и $i-1$, пользуясь дискретным аналогом последней формулы в виде $Q_i = \frac{M_i - M_{i-1}}{a}$, она численно равна тангенсу угла наклона эпюры моментов.

Преобразованная матрица моментов может быть получена путем перемножения двух матриц: $L_Q = K_{QM} L_M$, где K_{QM} - матрица коэффициентов для преобразования матрицы влияния моментов L_M в матрицу влияния

перерезывающих сил. Она имеет двухдиагональную структуру: на диагонали стоят единицы, а под диагональю -1.

Тема 4. Расчет фермы на постоянную и временную нагрузки

Цель: владеть практическими навыками проводить расчетное обоснование и проектирование строительных конструкций зданий и сооружений промышленного и гражданского назначения.

Ключевые вопросы:

4.1 Расчетная схема ферм.

4.2 Аналитические методы расчета ферм статически определимых ферм.

4.3 Построение линий влияния для стержней фермы.

Методические указания

В строительных конструкциях широко используются фермы, которые используются в качестве ригеля для восприятия поперечной нагрузки.

В шарнирно–стержневой системе элементами являются стержни, шарнирно скрепленные между собой по концам. Точки соединения стержней называются узлами. Для подсчета числа степеней свободы шарнирно–стержневой системы можно элементами считать ее узлы, а стержни, соединяющие узлы, – связями. При этом каждый узел считается обладающим двумя степенями свободы в плоскости и тремя в пространстве. Число степеней свободы получается равным удвоенному числу узлов для плоскости и утроенному – для пространственной шарнирно–стержневой системы.

В реальных фермах стержни соединены между собой не шарнирно, а жестко. Однако и в этом случае к ним применима с достаточной степенью приближения шарнирно–стержневая расчетная схема. Действительно, в реальных фермах стержни искривляются незначительно, а изгибная жесткость стержней очень мала, поэтому возникающие в стержнях изгибающие моменты пренебрежимо малы по сравнению с продольными силами, и можно полагать, что стержни работают как шарнирно закрепленные. Применимость шарнирно–стержневой схемы к реальным фермам подтверждена экспериментально.

4.1 Конструкция фермы

В фермах, применяемых для покрытий и перекрытий, а также для мостов, различают: верхний и нижний пояса и решетку. Решетка состоит из наклонных раскосов и вертикальных стоек (рисунок 4.1).

Ферма по длине пролета делится на панели, обычно, ограниченные соседними узлами поясов. В однопролетной ферме, нагруженной действующей вниз нагрузкой, верхний пояс сжат, а нижний растянут; нисходящие раскосы вблизи опор фермы растянуты, а восходящие сжаты. Стойки решетки при нагрузке по верхнему поясу сжаты, а при нагрузке по нижнему поясу – растянуты.

В отличие от балочных, в консольных фермах (рисунок 4.2) верхний пояс растянут, а нижний – сжат.

Степень изменяемости шарнирно–стержневой системы определяется по формулам:

$$- \text{ для плоской системы } n = 2Y - C; \quad (4.1)$$

$$- \text{ для пространственной системы } n = 3Y - C. \quad (4.2)$$

Здесь Y –число узлов; C –число стержней, включая опорные.

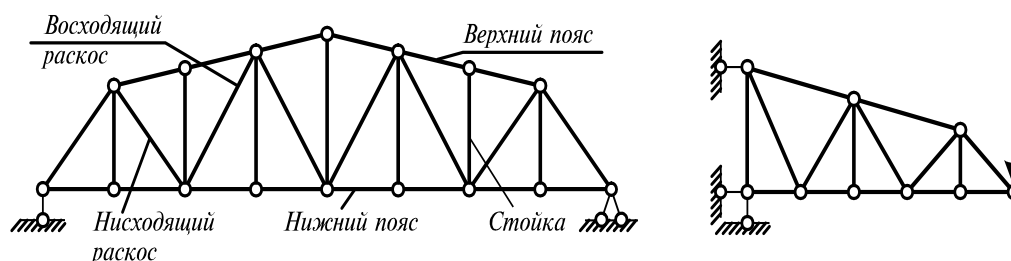


Рисунок 4.1 - Расчетные схемы ферм

Рассмотрим ферму, изображенную на рисунке 4.1 слева. Здесь $Y = 16$, $C = 32$. Следовательно, $n = 2 \cdot 16 - 32 = 0$.

Для консольной фермы, изображенной на рисунке 4.1, имеем $Y = 9$, $C = 18$. Таким образом, $n = 2 \cdot 9 - 18 = 0$.

Степень изменяемости шарнирно–стержневой системы можно определить также по другим формулам, но они оказываются более сложными.

4.2 Методы расчета статически определимых ферм

Из условия равновесия статически определимой фермы сначала определяются опорные реакции.

Для определения усилий в элементах фермы применяются различные подходы:

1. Наиболее простым методом определения усилий в стержнях статически определимой фермы является *метод вырезания узлов*. Разрезая мысленно стержни, сходящиеся в данном узле, и уравновешивая внешней силой,

приложенную к нему, продольными усилиями, действующими по направлению каждого стержня, получаем необходимые уравнения для определения этих сил. При составлении уравнений равновесия предполагаем все внутренние силы растягивающими и действующими по направлению от узла (рисунок 4.2, а).

Так как все силы, действующие на узел, пересекаются в одной точке, то для каждого узла плоской фермы можно составить два уравнения равновесия, выражающие равенство нулю сумм проекций всех сил на горизонтальную и вертикальную оси. Всего таким образом можно составить $2C$ число независимых уравнений. Поскольку число стержней в статически определимых фермах, включая опорные стержни, тоже равны $2C$, то мы получаем полную систему $2C$ алгебраических уравнений с $2C$ неизвестными усилиями. Причем, в каждое уравнение, составленных таким образом системы уравнений, входят не все неизвестные, а обычно только их небольшая часть.

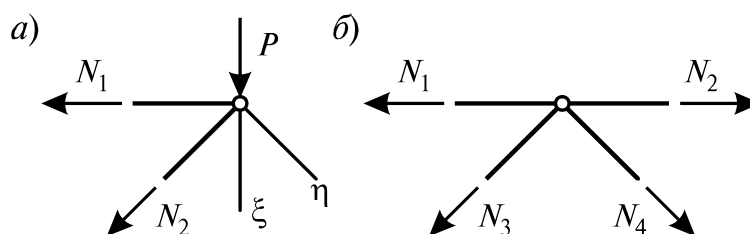


Рисунок 4.2 - Примеры вырезанных узлов фермы

Для упрощения расчета иногда берут сумму проекций всех сил на ось x , перпендикулярную одному стержню, и на ось h , перпендикулярно другому стержню (рисунок 4.2, б). При этом получаются два независимых уравнения, каждое из которых с одним неизвестным.

2. Другим эффективным способом расчета усилий в элементах фермы является *метод сечений*. Разрезав мысленно ферму на две части и отбросив одну из них, можно составить три уравнения равновесия для оставшейся части фермы. Если в разрез попадают только три стержня, то при помощи этих уравнений можно определить усилия в разрезанных стержнях. Систему трех уравнений равновесия можно свести к трем независимым уравнениям, если эти уравнения составить так, чтобы сумма моментов всех сил, действующих на оставшуюся часть фермы, относительно каждой из трех точек пересечения направлений разрезанных стержней была равна нулю.

Для определения усилия в интересующем нас j -ом стержне достаточно составить только одно уравнение моментов, взятых относительно точки пересечения двух других стержней. Эта последняя точка называется *моментной точкой* для j -ого стержня.

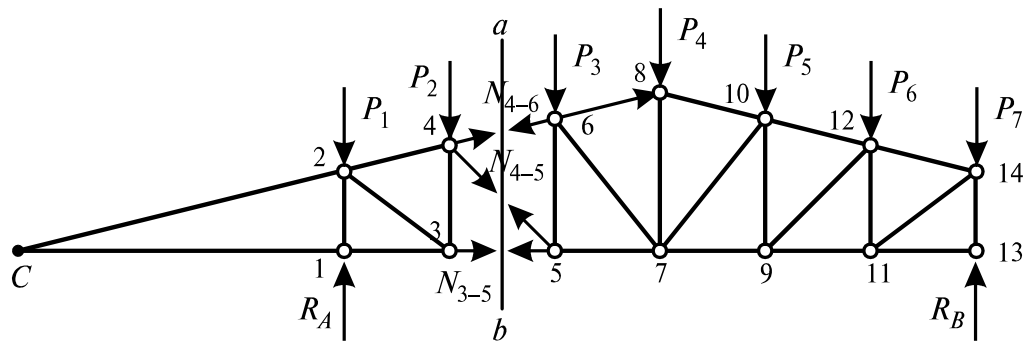


Рисунок 4.3 – Определение моментной точки для стержней во второй панели

На рисунке 4.3 показано применение метода сечений при определении усилий в стержнях второй панели фермы. Можно рассматривать как левую, так и правую часть фермы, учитывая внутренние усилия в стержнях фермы, попавших в разрез $a-b$, внешние силы, приложенные в узлах фермы, а также определенных реакций. Для определения усилия в стержне 4–6 следует составить условие равенства нулю моментов сил, приложенных слева или справа от разреза $a-b$, относительно моментной точки 5; для определения усилия в стержне 3–5 – относительно моментной точки 4 и для определения усилия в стержне 4–5 – относительно точки C , которая является точкой пересечения *линий действия* усилий в стержнях 4–6 и 3–5.

Если два из трех пересеченных стержней параллельны друг другу (рисунок 4.4), то моментная точка для третьего стержня уходит в бесконечность. В этом случае составляется условие равенства нулю суммы проекций всех сил, действующих по одну сторону разреза, на направление, перпендикулярное параллельным стержням, попадающим в разрез.

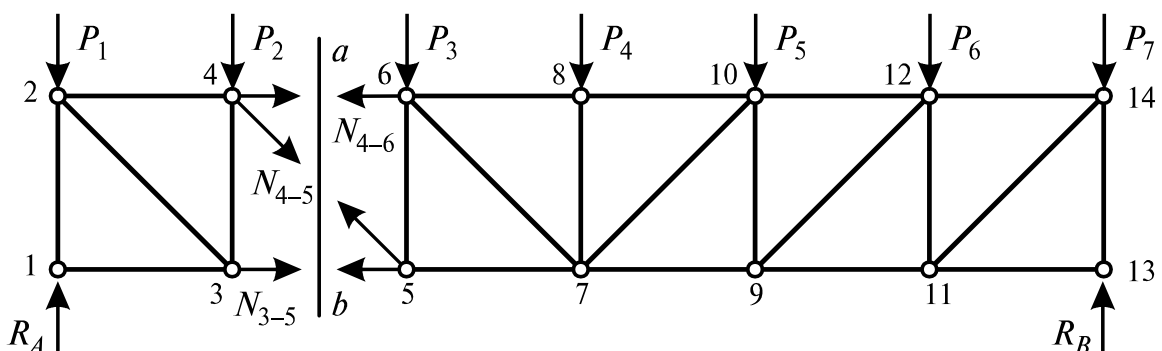


Рисунок 4.4 – Определение усилия в раскосе фермы с параллельными поясами методом проекции на оси координат

4.3 Линии влияния усилий в фермах

Линии влияния усилий в панелях верхнего и нижнего пояса фермы строятся как линии влияния момента относительно моментной точки с ординатами, деленными на плечо рассматриваемого усилия относительно моментной точки. На протяжении панели, по которой движется груз, производится спрямление линии влияния, как при узловой передаче нагрузок. Таким же образом строятся линии влияния усилий в раскосах и в стойках в случае непараллельных поясов.

Обязательно нужно учитывать, по какому поясу движется единичный груз, по верхнему или нижнему, что определяется назначением конструкции.

При параллельных поясах линии влияния усилий для раскосов и стоек строятся как линии влияния поперечной силы для вертикального сечения, пересекающего раскос или стойку, с ординатами, деленными на $\sin\alpha$, где α – угол наклона раскоса; и со спрямлением на длину панели, по которой движется груз.

Рассмотрим характерные примеры построения линий влияния для ферм с непараллельными и параллельными поясами (рисунки 4.5 – 4.6).

Рассмотрим определение линии влияния N_{2-3} , нижнего пояса фермы с непараллельными поясами.

Проведем сечение I–I. Составляем уравнение равновесия всех сил, приложенных к *правой части фермы (груз левее сечения I–I)* относительно моментной точки 8:

$$\sum M_8^{n.c.} = R_B(l - a_8) + N_{2-3}b_{2-3}, \quad (4.1)$$

Откуда

$$N_{2-3} = \frac{-R_B(l - a_8)}{b_{2-3}}, \quad (4.2)$$

графическое изображение данного выражения является *левой ветвью* линии влияния (рисунок 4.4.б)

Аналогично составляется уравнение, когда груз находится правее сечения I–I:

$$\sum M_8^{n.c.} = R_A a_8 + N_{2-3} b_{2-3}, \quad (4.3)$$

$$N_{2-3} = \frac{R_A a_8}{b_{2-3}} \quad (4.4)$$

- правая ветвь линии влияния (рисунок 4.5. б).

Воспользовавшись правилом построения линий влияния при узловой передаче нагрузки, получим передаточную прямую.

Для определения линии влияния N_{7-8} , верхнего пояса фермы с непараллельными поясами проводим сечение I-I. Составляем уравнение равновесия всех сил, приложенных к правой части фермы (груз левее сечения I-I) относительно моментной точки 2:

$$\sum M_2^{n.c.} = R_B(l - a_2) + N_{7-8}b_{7-8}, \quad (4.5)$$

$$N_{7-8} = \frac{-R_B(l - a_2)}{b_{7-8}}. \quad (4.6)$$

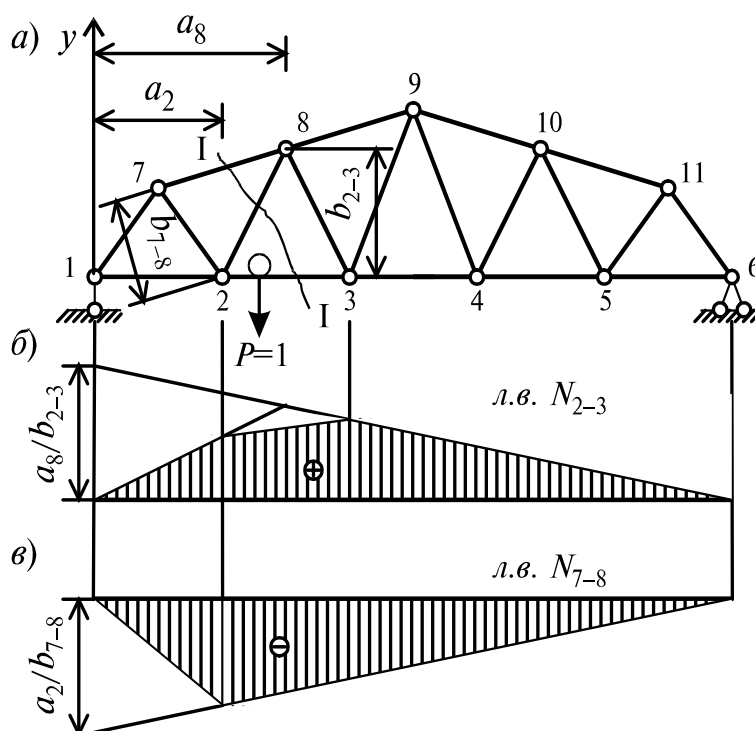


Рисунок 4.5 – Пример построения линий влияния полигональной фермы

Графическое изображение данного выражения является левой ветвью линии влияния, показанное на рисунке 4.5.в.

Аналогично составляется уравнение, когда груз находится правее сечения I-I:

$$\sum M_2^{л.с.} = R_A a_2 + N_{7-8} b_{7-8}, \quad (4.7)$$

$$N_{7-8} = \frac{R_A a_2}{b_{7-8}} \quad (4.8)$$

Строим правую ветвь линии влияния (рисунок 4.5.в).

Воспользовавшись правилом построения линий влияния при узловой передаче нагрузки, получим передаточную прямую.

Для построения линии влияния N_{8-3} в раскосе фермы с непараллельными поясами (рисунок 4.6.б), проводим сечение I–I. Составляем уравнение равновесия всех сил, приложенных к правой части фермы (груз левее сечения I–I) относительно моментной точки O :

$$\sum M_O^{n.c.} = R_B(l + a) - N_{8-3}b_{8-3}, \quad (4.9)$$

откуда

$$N_{8-3} = \frac{R_B(l+a)}{b_{8-3}}, \quad (4.10)$$

Строим левую ветвь линии влияния (рисунок 4.6. б).

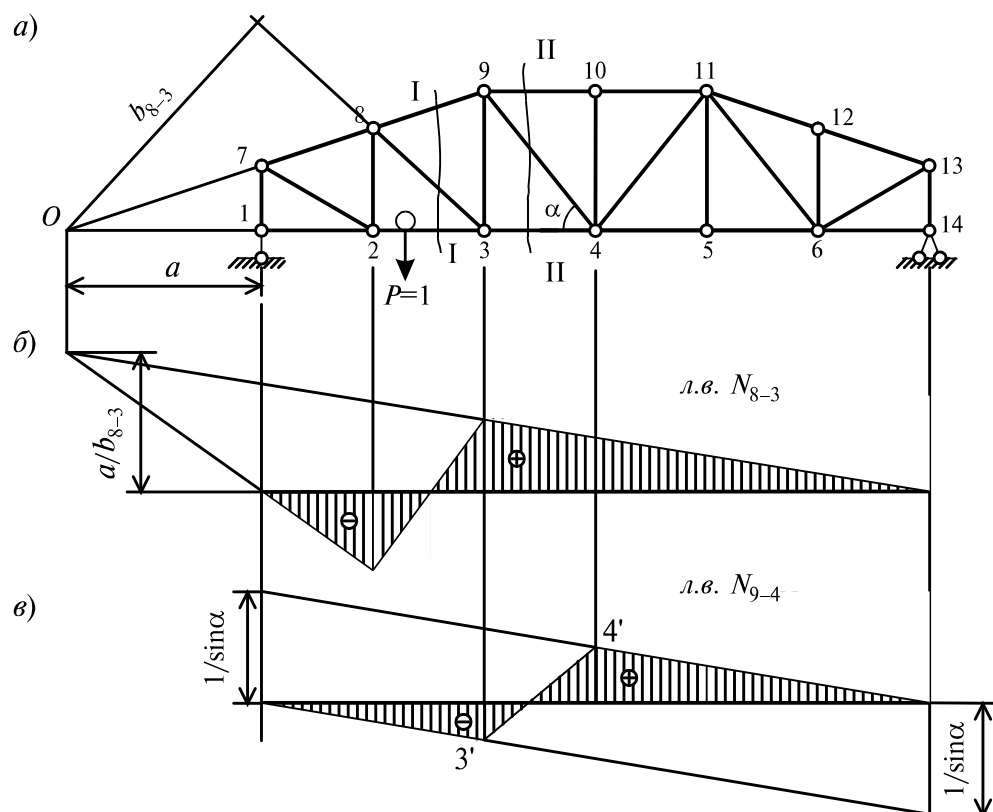


Рисунок 4.6 – Построение линий влияния в раскосах фермы

Аналогично составляется уравнение, когда груз находится правее сечения I–I:

$$\sum M_8^{n.c.} = R_A a + N_{8-3}b_{8-3}, \quad (4.11)$$

$$N_{8-3} = \frac{-R_A a_8}{b_{2-3}}. \quad (4.12)$$

Строим правую ветвь линии влияния (рисунок 4.6, б). Воспользовавшись правилом построения линий влияния при узловой передаче нагрузки, получим передаточную прямую.

Для определения линии влияния N_{9-4} для раскоса фермы с параллельными поясами проводим сечение II–II. Моментная точка в этом случае находится в бесконечности, так как верхний и нижний пояс параллельны. Применим метод проекций. Когда груз $P = 1$ находится между узлами 4 и 14 (правее панели 3–4) рассматриваем равновесие левой отсеченной части фермы (рисунок 4.6. а). Составим уравнение проекций всех сил на вертикальную ось:

$$\sum Y = R_A - N_{9-4} \sin \alpha, \quad (4.13)$$

$$N_{9-4} = \frac{R_A}{\sin \alpha} \quad (4.14)$$

По данному выражению строим левую ветвь линии влияния (рисунок 4.5. в).

Пусть теперь груз расположен между узлами 1 и 3 (левее панели 3–4), рассматриваем равновесие правой части фермы:

$$\sum Y = R_A + N_{9-4} \sin \alpha, \quad (4.15)$$

$$N_{9-4} = \frac{-R_A}{\sin \alpha}. \quad (4.16)$$

Строим правую ветвь линии влияния. Прямая (3'–4') – передаточная прямая.

4.4 Пример построения линии влияния в шпренгельной ферме

Рассмотрим пример построения линии влияния в стойке шпренгельной фермы- построим линию влияния в стойке V_2 фермы с двухъярусными шпренгелями (рисунок 4.7, а). Известно, что линия влияния в этом случае может быть построена согласно выражению:

$$V_2 = V_2^0 + V_2^n + V_2^n, \quad (4.17)$$

где V_2^0 – линия влияния в основной ферме; V_2^n, V_2^n – линии влияния левого и правого шпренгелей.

При построении линий влияния в элементе V_2 следует провести передаточные прямые (пунктирные линии на рисунке 4.7, в) при езде поверху

($m'n'$) и понизу ($k'u'$). Затем следует учесть влияние левого и правого шпренгелей (рисунок 4.7, в).

На графике, представленном на рисунке 4.6, г это точки e', w', b', c' , расположенные под стойками шпренгелей. Значения усилий определяются по ординатам под указанными точками.

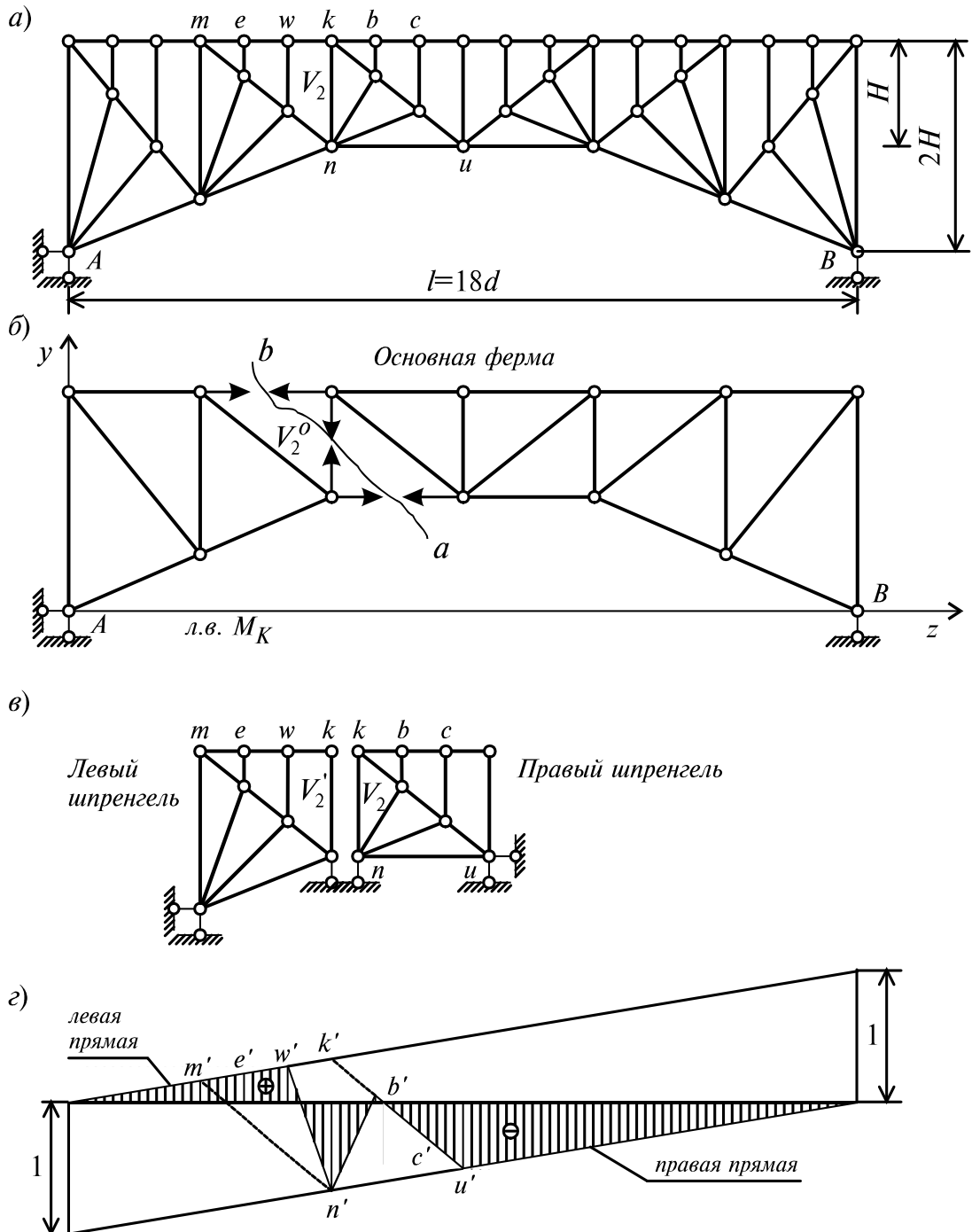


Рисунок 4.7 – Определение усилий в раскосе шпренгельной фермы

Тема 5. Расчет трехшарнирных арок и рам

Цель: владеть практическими навыками проводить расчетное обоснование и конструирование строительных конструкций зданий и сооружений промышленного и гражданского назначения.

Ключевые вопросы:

- 5.1 Понятие о распорных стержневых системах
- 5.2 Трехшарнирные арки
- 5.3 Расчет трехшарнирных арок аналитическими способами.
- 5.4 Построение линий влияния в трехшарнирных арках.

5.1 Аналитический расчет трехшарнирных статически определимых арок

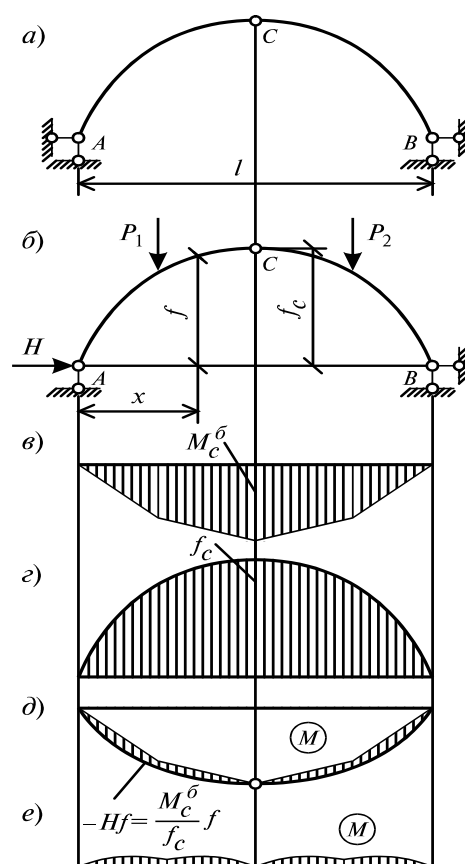


Рисунок 5.1- Трехшарнирная арка

Трехшарнирной аркой называется трехшарнирная система из двух криволинейных брусьев (рисунок 5.1а). Трехшарнирные арки относятся к *распорным системам*, которые характеризуются тем, что вертикальные нагрузки вызывают горизонтальные опорные реакции – *распор* (рисунок 5.1, б).

Для расчета трехшарнирной арки применяют следующий подход. Исключают средний шарнир арки, заменив его жесткой связью между половинками арки, и удалив одну горизонтальную опору. Полученная новая система представляет собой статически определимую однопролетную балку с криволинейной осью (рисунок 5.1 б). Отброшенную горизонтальную опору заменяют усилием H – неизвестным пока распором арки. От действия внешней нагрузки строят вдоль горизонтальной проекции арки эпюру моментов, как в обычной балке (рисунок 5.1, в).

От действия единичного усилия $H = 1$ также строят эпюру моментов, ординаты которой будут совпадать с ординатами оси арки (рисунок 5.1, в). Окончательно эпюру моментов в арке можно вычислить по формуле:

$$M = M^b - Hf, \quad (5.1)$$

где M^b – ординаты балочной эпюры моментов от внешней нагрузки; f – ординаты оси балки и эпюры моментов в криволинейной балке от единичного распора.

С расположением среднего шарнира момент в арке должен быть равен нулю:

$$M_c = M_c^b - Hf_c = 0, \quad (5.2)$$

отсюда получаем

$$H = \frac{M_c^b}{f_c}, \quad (5.3)$$

и подставляем это значение распора в формулу (5.1):

$$M = M^b - \frac{M_c^b}{f_c} f, \quad (5.4)$$

Окончательная эпюра моментов в арке показана на рисунке 5.1, д. На рисунке 5.1, е эта же эпюра, отложенная от горизонтальной линии, – “спрямленная эпюра”.

В описанном подходе использован принцип выбора основной системы, которая получается из заданной путем введения и отбрасывания некоторых связей. Этот принцип широко применяется в классических методах расчета статически определимых систем, как в данном случае, и в случаях расчета некоторых сложных статически определимых ферм.

К распорным системам относятся также сложные арки, элементы которых представляют сами по себе стержневые системы фермы (рисунок 5.2, а) или рамы (рисунок 5.2, б).

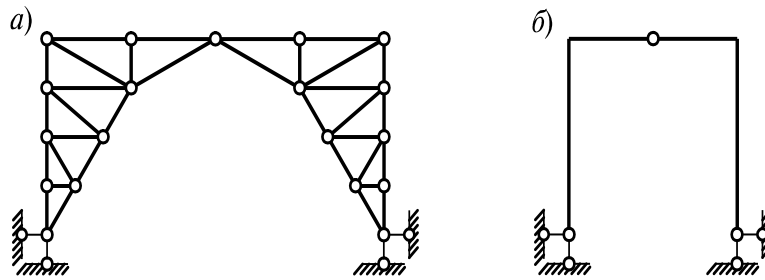


Рисунок 5.2 – Сложная арка и трехшарнирная рама

Продольные и поперечные силы в любом сечении арки или рамы определяются из условия равновесия части системы, расположенной по одну сторону от рассматриваемого сечения.

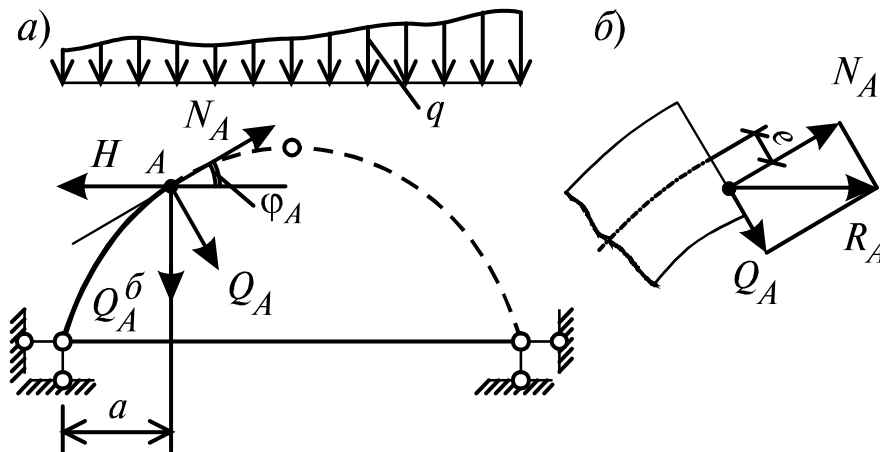


Рисунок 5.3 – Усилия в сечении арки

Предварительно заметим, что сумма вертикальных сил, приложенных слева от заданного сечения, равна балочной поперечной силе Q_A^b в спрямленной балке, свободно лежащей на крайних опорах арки и нагруженной заданной вертикальной нагрузкой.

Проектируя все силы, действующие слева от сечения $x = a$, на направление касательной к оси арки в точке A (рисунок 5.3, a), получим выражение для продольной силы:

$$N = -Q_A^b \sin \varphi_A - H \cos \varphi_A, \quad (5.5)$$

где φ_A – угол касательной к оси арки в точке A .

Проектируя те же силы на направление нормали к оси арки, получим поперечную силу

$$Q = Q_A^b \cos \varphi_A - H \sin \varphi_A \quad (5.6)$$

Если на арку действует не только вертикальная, но и горизонтальная нагрузка P , то вместо распора H в формулах (5.5) и (5.6) следует брать сумму всех горизонтальных сил, действующих слева от точки A .

Разделив момент M_A на продольную силу N_A , получим эксцентриситет e ее действия в сечении арки, который определит точку пересечения равнодействующей внутренних сил в сечении арки с плоскостью этого сечения (рисунок 5.3, б).

Геометрическое место таких точек, построенных для всех сечений арки, называется кривой давления арки. Она представляет собой линию действия внутренней силы, передающейся вдоль арки. Отношение Q_A/N_A равно тангенсу угла между касательными к кривой давления и к оси арки в том же сечении.

В особых случаях кривая давления может совпадать с осью арки. При этом изгибающие моменты по всей длине арки будут равны нулю. Такой случай будет иметь место, например, при нагружении круговой арки равномерной радиальной нагрузкой или при нагружении параболической арки равномерной вертикальной нагрузкой. Очертание оси арки, совпадающее с кривой давления, является оптимальным, т.е. наиболее выгодным при данной нагрузке.

5.2 Линии влияния опорных реакций и усилий способом наложения

В линейно–деформируемых системах с линиями влияния можно осуществлять простые арифметические действия: сложение, вычитания и умножение на постоянную величину, как с обычными числами или векторами. Учитывая это, можно воспользоваться для построения линий влияния моментов, поперечных и продольных сил в трехшарнирных арках формулами (5.1), (5.5), (5.6), причем линии влияния балочных моментов M_A^b и балочных поперечных сил Q_A^b строятся как в обычной однопролетной балке, а линии влияния распора H легко построить по формуле (1.20), как линию влияния балочного момента M_A^b деленную на стрелку арки f_c . Построение линий влияния в арке таким *способом наложения* показано на рисунке 5.4.

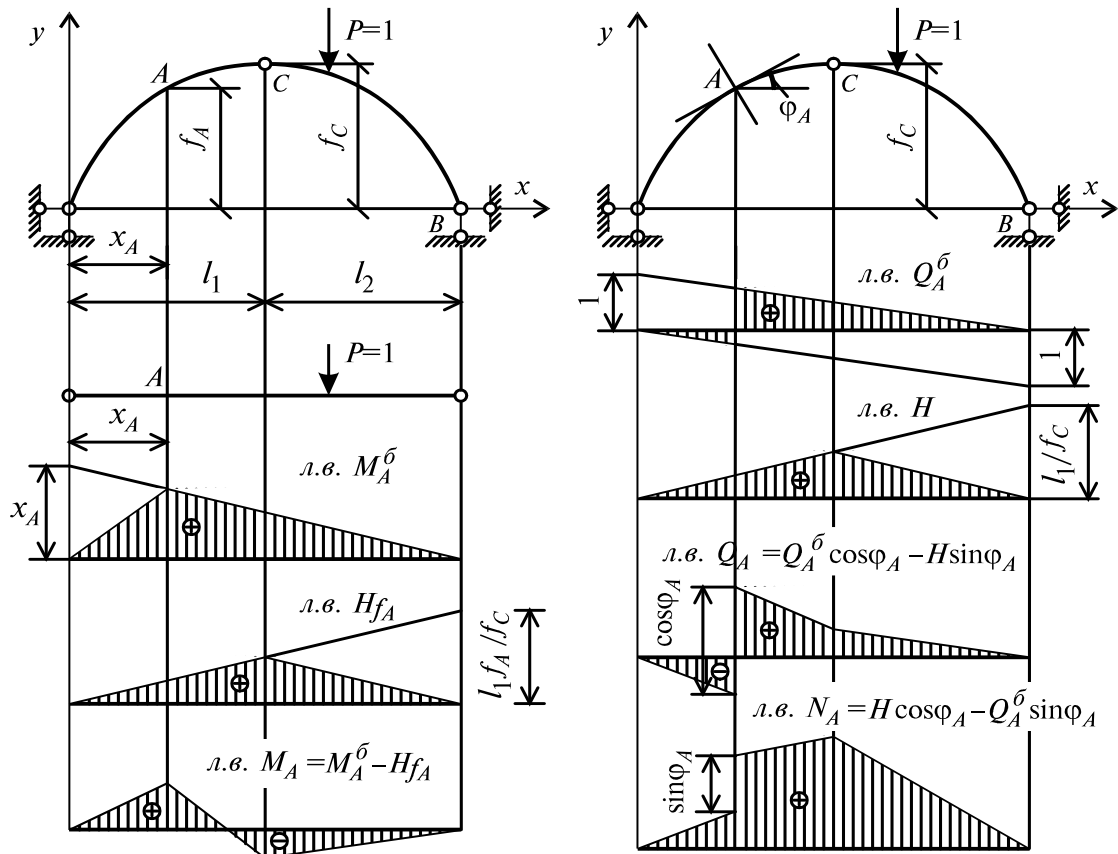


Рисунок 5.4 – Построение линий влияния способом наложения

5.3 Построение линий влияния способом нулевой точки

Построим линии влияния изгибающего момента M_K , поперечной силы Q_K и продольной силы N_K для сечения К–К способом нулевых точек.

Линии влияния внутренних усилий M_K , Q_K и N_K могут быть получены сложением известных линий влияния балочных моментов и балочных поперечных сил от действия единичной силы, а также линии влияния распора H , умноженных на соответствующие коэффициенты выражений, что приводит к простым правилам построения линий влияния внутренних усилий в арках.

Ввиду того, что все слагаемые в этих формулах представлены кусочно-линейными функциями, определим абсциссы тех точек, в которых ординаты линий влияния равны нулю. Эти точки называются *нулевыми*. Очевидно, что к их числу относятся опорные точки шарнирной арки. Далее предположим, что при действии единичного груза $P = 1$ в точке, принадлежащей арке с абсциссой z_{OM} (см. рисунок 5. 5, а), вектор равнодействующих всех внешних сил,

действующих в части системы, расположенной левее точки К, проходит через эту точку, тогда, очевидно, что изгибающий момент в сечении К в этом случае будет равен нулю.

Для определения величины z_{OM} , воспользуемся геометрическими соображениями (рисунок 5. 5, а), что высота, опущенная их точки пересечения О прямой, проведенной через левый шарнир и заданное сечение К, и прямой, проведенной через правый и средний шарнир, является общей в треугольнике, построенном на основании, и делит его на отрезки z_{OM} и $(l - z_{OM})$, тогда можно записать:

$$z_{OM} \operatorname{tg} \alpha = (l - z_{OM}) \cdot \operatorname{tg} \beta, \quad (5.7)$$

откуда:

$$z_{OM} = l \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}. \quad (5.8)$$

Далее предположим, что, если единичная сила $P = 1$ будет расположена в точке, принадлежащей арке, с абсциссой z_{OQ} , а вектор равнодействующей всех внешних сил, действующих левее сечения К, параллелен касательной оси арки, проходящей через точку К, то поперечная сила в этом сечении будет равна нулю.

Из рисунка 5.5, а также следует соотношение:

$$z_{OQ} \operatorname{tg} \varphi_K = (l - z_{OQ}) \cdot \operatorname{tg} \beta, \quad (5.9)$$

откуда:

$$z_{OQ} = l \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \varphi_K + \operatorname{tg} \beta}. \quad (5.10)$$

Для определения нулевой точки линии влияния N_K , нужно определить абсциссу точки приложения единичной силы $P = 1$, при котором нормальная внутренняя сила в сечении К равна нулю. Следовательно, нам необходимо определить такую точку приложения единичной силы $P = 1$, при котором общий вектор равнодействующей всех сил, расположенных левее сечения К, имеет направление параллельное нормали оси арки, проведенной через сечение К (рисунок 5. 5, а).

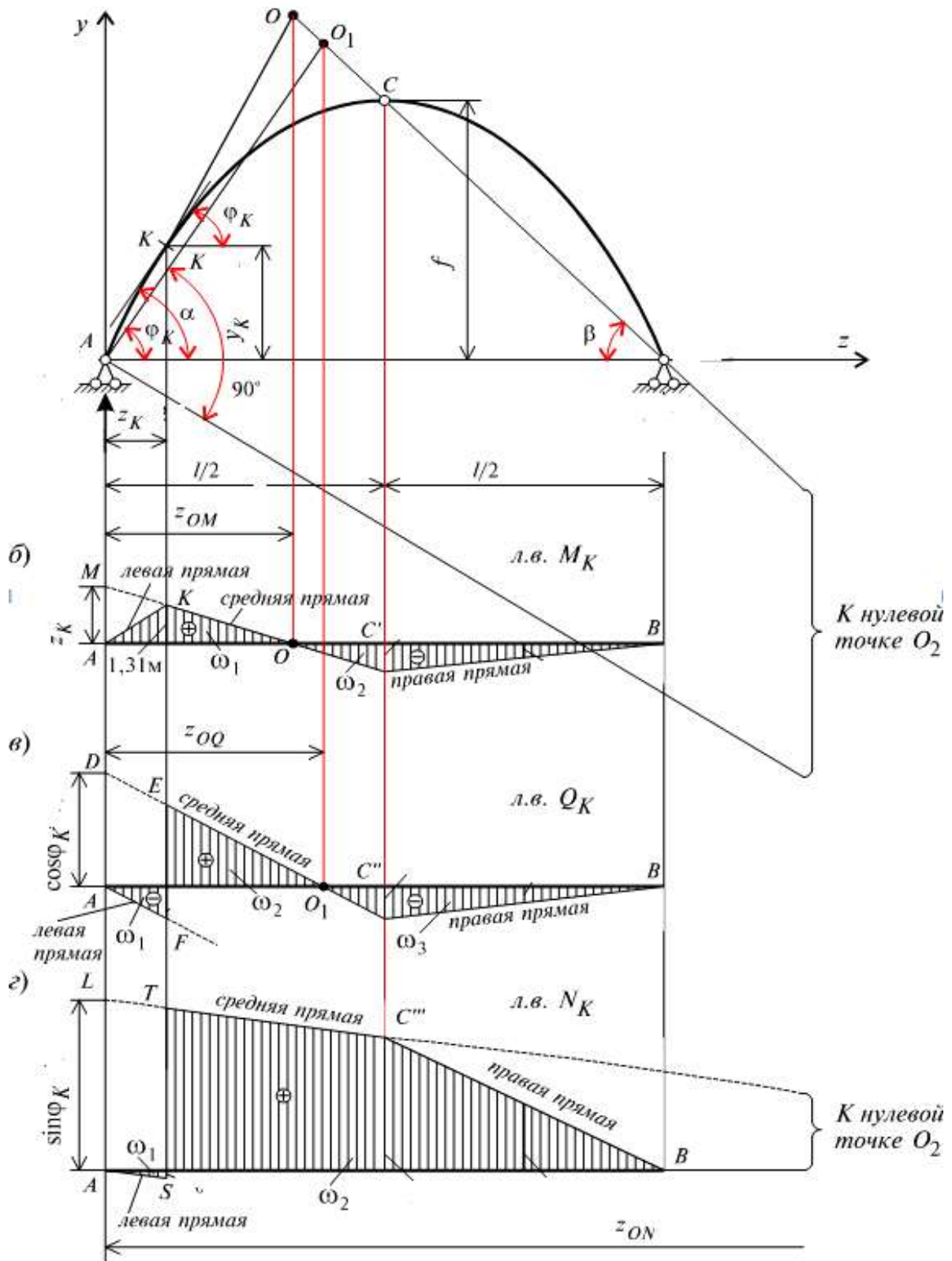


Рисунок 5.5 – Построение линий влияния способом нулевых точек

Таким образом:

$$z_{on} \operatorname{tg}(90 - \varphi_k) = (z_{on} - l) \cdot \operatorname{tg} \beta, \quad (5.11)$$

откуда:

$$z_{Ov} = l \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{ctg} \varphi_k}. \quad (5.12)$$

а). Построение линий влияния M_K . Линию влияния изгибающего момента M_K для сечения К–К строим в следующем порядке:

1. Определяем положение нулевой точки O линии влияния M_K на ее оси абсцисс. Для этого проводим на схеме трехшарнирной арки касательную к оси в точке K и BC ; их точку пересечения (O) сносим по вертикали на ось абсцисс линии влияния (точка O на рисунке 5. 5, б).

Расстояние этой точки от левой опоры находим по формуле

$$z_{Ov} = l \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} M,$$

где $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_k}{z_k}; \operatorname{tg} \beta = \frac{f}{l/2}.$

2. Зная положение нулевой точки O , проводим прямую линию, соединяя точку O с концом ординаты $AM = z_k$, отложенной вверх от оси абсцисс по вертикали, проходящей через опору A .

3. На проведенную прямую MO и ее продолжение сносим по вертикалям сечение К–К и средний шарнир C (точки K и C'). Отрезок прямой KC' является средней прямой линии влияния.

4. Соединяя точку K с нулевой ординатой под опорой A , а ординату точки C' с нулевой ординатой под опорой B , получаем левую (AK) и правую ($C'B$) прямые линии влияния M_K .

Построенная таким образом линия влияния M_K показана на рисунке 5.5, б.

б). Построение линии влияния Q_K . Эту линию влияния строим также способом нулевых точек в следующем порядке:

1. Определяем положение нулевой точки линии влияния Q_K . Для этого проводим из точки A прямую, параллельную касательной к оси трехшарнирной арки в сечении К–К, до пересечения с прямой, соединяющей точки B и C (рисунок 5. 5, а), а затем точку их пересечения O_1 проектируем на ось абсцисс линии влияния (рисунок 5. 5, в). Полученная точка O_1 и является нулевой

точкой линии влияния Q_K . Расстояние ее от левой опоры определяем по формуле

$$z_{oo} = l \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\varphi_K + \operatorname{tg}\beta} \text{ м.}$$

2. Откладываем на левой опорной вертикали положительную ординату $\cos \varphi_K$ (отрезок AD) и проводим прямую DO_1 .

3. Через нулевую ординату под опорой А (точка А) проводим прямую AF, параллельную DO_1 .

На параллельные прямые AF и DO_1 проецируем сеч. К–К (точки Е и F) и получаем левую прямую AF линии влияния. Если прямая DO_1 не пересекается с вертикалью, проходящей через средний шарнир С, продолжаем прямую DO_1 до пересечения с этой вертикалью и получаем точку С''. Соединив ординату в точке С'' с нулем под опорой В (точка В), получим правую прямую (С''В) линии влияния QK. Прямая линия, соединяющая точки Е и С'', является средней прямой линии влияния QK, а прямая EF носит название соединительной прямой линии влияния QK.

в). Построение линии влияния N_K . Линию влияния N_K строим также способом нулевых точек в следующем порядке.

1. Нулевую точку O_2 линии влияния N_K находим как проекцию на ось абсцисс линии влияния точки пересечения прямой, проведенной из точки А перпендикулярно касательной к оси арки в сечении К–К (AO_2), с прямой, проведенной через правую опорную точку В и средний шарнир С (рисунок 5.5, а, г).

На рисунке 5. 5, г нулевая точка O_2 расположена за пределами данного чертежа. Расстояние этой точки от левой опоры определяем по формуле

$$z_{on} = l \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{ctg}\varphi_K} \text{ м,}$$

2. Откладываем вверх на левой опорной вертикали ординату $\sin\varphi_K$ (отрезок AL). Соединив точку L с нулевой точкой O_2 прямой линией и продолжив ее (если это необходимо) до пересечения с вертикалью, проходящей через средний шарнир (т. С'''), получаем прямую $LC'''O_2$. Точка O_2 находится правее опоры А на большом расстоянии (арка имеет значительную крутизну),

и поэтому на схеме не показана, но может быть определена по формуле (рисунок 5. 5, г).

3. Через нуль опорной вертикали (точка А) проводим линию, параллельную прямой $LC'''O_2$.

4. На эти параллельные прямые проектируем сечение К–К (точки Т и S). Полученная прямая AS носит название левой прямой, TS – является соединительной прямой, а отрезок прямой TC''' – средней прямой линии влияния N_K .

5. Соединив ординату в точке C''' с нулем под правой опорой, получаем правую прямую (прямая $C'''B$) линии влияния N_K .

4. Вычисление величин M_K , Q_K и N_K по их линиям влияния от заданной нагрузки q и P

Если загрузить каждую линию влияния заданной нагрузкой q и P), можно получить величины внутренних усилий M_K , Q_K и N_K по известной формуле (тема 3)

Следует подчеркнуть, что все характерные ординаты линий влияния для определения необходимых площадей и ординаты под нагрузками необходимо всегда определять аналитически из подобия треугольников.

Тема 6. Расчет статически неопределимых стержневых систем. Метод сил.

Цель: владеть практическими навыками проводить расчетное обоснование и конструирование строительных конструкций зданий и сооружений промышленного и гражданского назначения.

Ключевые вопросы:

- 6.1. Что такое статически неопределимая системы?
- 6.2. Опорные связи, внутренние связи, замкнутый контур.
- 6.3. Методы расчета статически неопределимых стержневых систем
- 6.4. Выбор основной системы для различных стержневых статически неопределимых систем.
- 6.5. В чем заключается метод сил?
- 6.6. Алгоритм расчета статически неопределимых систем методом сил
- 6.7. Канонические уравнения метода сил

Большинство конструкций в строительстве, составляющих каркас зданий и сооружений, статически неопределимы, так как в статически определимых системах отказ хотя бы одного элемента, приводит к разрушению всей конструкции. Анализ степени статической неопределимости сложных стержневых систем является непростой задачей ввиду того, что связи, налагаемые на систему, могут быть разными. Расчетные схемы содержат условные обозначения, которые означают разные ограничения перемещений и соответствующих им реакций. В курсе сопротивления материалов рассматривались самые простые – балки и рамы, то есть такие конструкции, в которых связями, обеспечивающими геометрическую неизменяемость, являются опорные закрепления (опорные связи). В данной теме подробно рассматриваются статически неопределимые стержневые конструкции, применяемые при проектировании зданий и сооружений.

6.1 Статически неопределимые системы. Степень статической неопределимости

Статически неопределимыми системами называются стержневые системы, для определения реакций опор в которых только уравнений равновесия недостаточно. Число связей, наложенных на статически неопределимую систему, больше того количества связей, которые обеспечивают геометрическую неизменяемость конструкции. Такими связями могут быть как опорные связи, так и стержни самой конструкции. Для обеспечения геометрической неизменяемости балки (рамы) в плоскости достаточно трех связей. Каждая связь запрещает какое-то перемещение. Шарнирно-подвижная опора запрещает перемещение по направлению, перпендикулярному плоскости опирания, и является одной связью. Шарнирно-неподвижная опора делает невозможными линейные перемещения по двум взаимно-перпендикулярным направлениям (вертикальному и горизонтальному) и соответствует двум связям, наложенным на конструкцию. Наконец, при наличии жесткого защемления на конце стержня становятся невозможными все перемещения: и вертикальное, и горизонтальное, и угол поворота, поэтому жесткое защемление можно условно заменить тремя связями, обеспечивающими геометрическую неизменяемость балки конструкции. Каждая дополнительная связь сверх трех для плоских систем превращает конструкцию в статически неопределимую. На схемах также могут быть врезанные шарниры, простые и сложные, которые также влияют на картину деформирования конструкции.

Степень статической неопределимости

Дополнительные связи, которые не являются необходимыми для обеспечения геометрической неизменяемости конструкции, называются *лишними*.

Для раскрытия статической неопределимости таких систем необходимо составлять дополнительные *уравнения совместности деформаций*. В предыдущих лекциях для расчёта отдельных статически неопределимых стержней, работающих на растяжение–сжатие, кручение, изгиб, использовалась группа соотношений, включающая в себя уравнения равновесия, геометрические и физические уравнения. Число таких уравнений определяется числом статической неопределимости стержневой системы.

Рассмотрим некоторые примеры статически неопределимых стержневых систем.

На рисунке 6.1 приведены примеры статически неопределимых балок и рам.

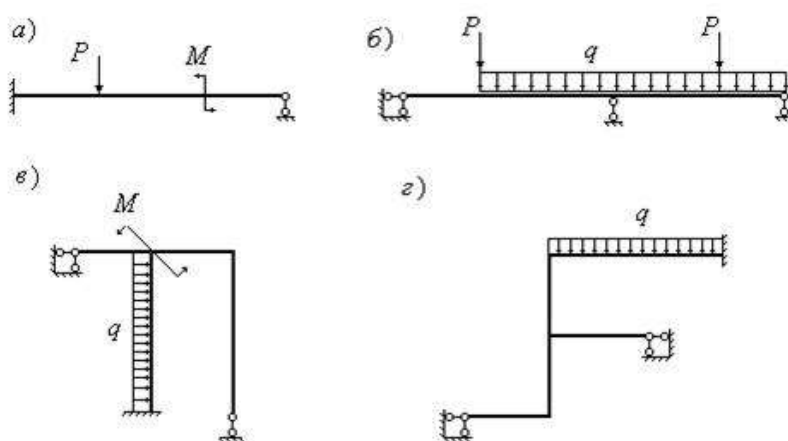


Рисунок 6.1 – Статически неопределимые балки и рамы

Балка, изображенная на рис. 6.1, б, называется *неразрезной* балкой. Происходит это название оттого, что промежуточная опора лишь подпирает балку.

В месте опоры балка не разрезана шарниром, шарнир не врезан в тело балки. Поэтому влияние напряжений и деформаций, которые балка испытывает на левом пролете, сказываются и на правом пролете. Если в месте промежуточной опоры врезать шарнир в тело балки, то в результате система станет статически определимой: из одной балки мы получим две независимые друг от друга балки, каждая из которых будет статически определимой.

Следует отметить, что неразрезные балки являются менее материалоемкими по сравнению с разрезными, так как в таких конструкциях

более рационально распределен изгибающий момент по длине. В связи с этим неразрезные балки получили широкое применение в строительстве, но по специальной методике расчета, включающей в себя использование деформаций системы.

В этой теме понятие “расчет” подразумевает только построение эпюр внутренних силовых факторов, возникающих в элементах системы, а не расчет на прочность, жесткость и т.д.

Статически неопределимые системы обладают рядом характерных особенностей:

1. Статически неопределимая система ввиду наличия добавочных лишних связей, по сравнению с соответствующей статически определимой системой оказывается более жесткой.

2. В статически неопределимых системах возникают меньшие внутренние усилия, что определяет их экономичность по сравнению со статически определимыми системами при одинаковых внешних нагрузках.

3. Разрушение лишних связей в нагруженном состоянии, не ведет к разрушению всей системы в целом, так как удаление этих связей приводит к новой геометрически неизменяемой системе, в то время как потеря связи в статически определимой системе приводит к изменяемой системе.

4. Для расчета статически неопределимых систем необходимо предварительно задаваться геометрическими характеристиками поперечных сечений элементов, т.е. фактически их формой и размерами, так как их изменение приводит к изменению усилий в связях и новому распределению усилий во всех элементах системы.

5. При расчете статически неопределимых систем необходимо заранее выбрать материал конструкции, так как необходимо знать его модули упругости.

6. В статически неопределимых системах температурное воздействие, осадка опор, неточности изготовления и монтажа вызывают появление дополнительных усилий.

6.2 Методы расчета статически неопределимых систем

Основными методами расчета статически неопределимых систем являются:

1. **Метод сил.** При расчете по *методу сил* основными искомыми величинами являются усилия в лишних связях. Знание усилий в лишних связях позволит по методу сечений выполнять полный расчет по определению усилий, возникающих в поперечных сечениях элементов заданной системы.

2. Метод трех моментов. За неизвестные принимаются моменты на опорах многопролетных неразрезных балок, часто используемых строительных конструкций.

3. Метод перемещений. При расчете по *методу перемещений* основными искомыми величинами являются перемещения узловых точек, вызванные деформацией системы. Знание этих перемещений необходимо и достаточно для определения всех внутренних усилий, возникающих в поперечных сечениях элементов, заданной системы.

4. Метод конечных элементов. При расчете по *методу конечных элементов* система разбивается на простые *конечные элементы* и по матрице жесткости элемента и системы в целом устанавливается связь между перемещениями узлов элемента и системы и усилиями в них.

5. Смешанный метод. Здесь часть неизвестных представляет собой усилия, а другая часть – перемещения.

6. Комбинированный метод. Используется при расчете симметричных систем на несимметричные нагрузки. Оказывается, что на симметричную составляющую заданной нагрузки систему целесообразно рассчитывать методом перемещений, а на обратносимметричную составляющую – методом сил.

Помимо указанных аналитических методов при расчете особо сложных систем используются различные численные методы.

С целью уменьшения неизвестных реакций из сложной системы выделяется более простая основная система, расчет которой является достаточно простым.

Основная система отличается от заданной отсутствием некоторых связей или введенными в нее новыми абсолютно жесткими связями. Отброшенные связи заменяются в основной системе внешними, вначале неизвестными силами, приложенными по направлениям отброшенных связей, причем значения этих сил подбираются из условий отсутствия перемещений по направлениям отброшенных связей. Сформированная таким образом система уравнений называется системой канонических уравнений метода сил.

Если основную систему получают из заданной введением новых жестких связей, то неизвестными станут перемещения по направлениям этих связей, а условиями для составления уравнений – условия отсутствия реактивных сил во введенных связях. Составленные уравнения называют каноническими уравнениями *метода перемещений*.

Недостатком введения основной системы является необходимость производить расчеты несколько раз: на действие заданной нагрузки и на

действие каждого неизвестного перемещения по направлению введенных связей. Затруднения возникают и при вычислениях коэффициентов канонических уравнений и их свободных членов, они, впрочем, меньше при использовании ЭВМ.

Лишние связи сооружений можно удалять, не нарушая их геометрической неизменяемости.

Степень статической неопределимости внешне статически неопределимой системы n легко установить путем по формуле

$$n = C - Y \quad (6.1)$$

где C - число связей, накладываемых на конструкцию; Y - число возможных независимых уравнений равновесия, которые можно составить для рассматриваемой системы.

Правило (6. 1) для определения степени статической неопределимости применяют только для простых систем. В более сложных случаях это правило не работает.

Внутренне статически неопределимой называют систему, обладающую лишними связями, введенными для взаимного соединения частей системы.

Прежде, чем перейти к определению степени статической неопределимости рамы, изображенной на рисунок 6, введем несколько определений. Первое из этих определений включает в себя понятие о простом шарнире.

Простым называется шарнир, соединяющий два стержня (рисунок 6.2).



Рисунок 6.2. Простой шарнир

Шарнир, соединяющий несколько стержней, называется **сложным** (рисунок 6. 3).

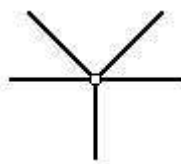


Рисунок 6. 3 – Сложный шарнир

Число простых шарниров, которые могут заменить один сложный шарнир, определим из формулы:

$$Ш = СТ - 1 \quad (6.2)$$

где СТ - число стержней, входящих в узел.

Пересчитаем сложный шарнир, изображенный на рисунок 9.3 в число простых шарниров с помощью формулы (6. 2): $Ш=5-1=4$. Таким образом, сложный шарнир, изображенный на рисункеб. 3, можно заменить четырьмя простыми шарнирами.

Введем еще одно понятие - *замкнутый контур*.

Любой замкнутый контур три раза статически неопределим.

Для доказательства теоремы рассмотрим замкнутый контур, нагруженный внешними силами (рисунок 6.5).

Разрежем замкнутый контур вертикальным сечением и покажем внутренние силовые факторы, возникающие в месте сечения. В каждом из сечений возникают три внутренних фактора: поперечная сила Q, изгибающий момент M и продольная сила N.

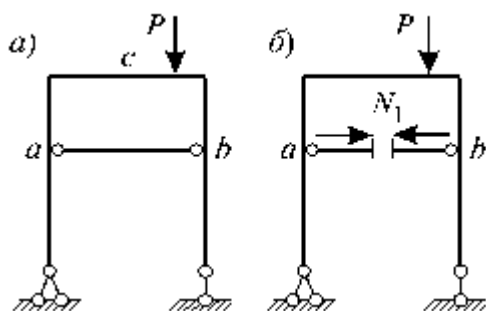


Рисунок 6. 4 – Схема рамы с затяжкой с замкнутым контуром

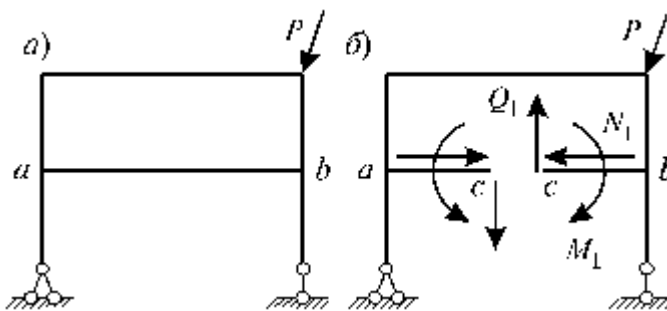


Рисунок 6. 5 – Схема рамы

Теперь, используя понятие о простом шарнире и замкнутом контуре, можно сформулировать еще одно правило для определения степени статической неопределимости:

$$n = 3К - Ш \quad (6.3)$$

Двухопорная рама с затяжкой (рисунок 6.4, а) внутренне один раз статически неопределима. Статически определимая система (рисунокб. 4, б) получена из заданной (рис. 9. 4 а) путем разрезания затяжки ab. И при этом взаимодействие частей затяжки заменяется только одной неизвестной осевой силой N_1 . Следовательно, в статически определимой системе, изображенной на рисунке 9.4, б имеем одно лишнее неизвестное N_1 , которое невозможно

определить при помощи метода сечений. Поэтому заданная система (рисунок 6. 4, *a*) является один раз статически неопределимой.

Если затяжку жестко заделать в стойки, как это показано на рисункеб. 5, *a*, то получим трижды статически неопределимую систему.

Действительно, в данном случае после разрезания нижнего ригеля *ab*, взаимодействие частей *ac* и *bc* характеризуется уже тремя неизвестными усилиями N_1, Q_1, M_1 (рисунок 6. 5, *b*), которые нельзя определить из условия равновесия. Поэтому система, изображенная на рисунке 9.5, *a*) является три раза внутренне статически неопределимой.

6.3 Метод сил

Наиболее широко применяемым общим методом раскрытия статической неопределимости стержневых и рамных систем является **метод сил**. Он заключается в том, что заданная статически неопределимая система освобождается от дополнительных связей как внешних, так и взаимных, а их действие заменяется силами и моментами. Величина их в дальнейшем подбирается так, чтобы перемещения в системе соответствовали тем ограничениям, которые накладываются на систему отброшенными связями. Таким образом, при указанном способе решения неизвестными оказываются силы. Отсюда и название «метод сил».

Алгоритм расчета методом сил

Независимо от особенностей рассматриваемой конструкции, можно выделить следующую последовательность расчета статически неопределимых систем методом сил:

1. Определить степень статической неопределимости.
2. Выбрать основную систему.
3. Сформировать эквивалентную систему.
4. Записать систему канонических уравнений.
5. Построить единичные и грузовые эпюры внутренних силовых факторов, возникающих в элементах рассматриваемой конструкции.
6. Вычислить коэффициенты при неизвестных и свободные члены системы канонических уравнений.
7. Построить суммарную единичную эпюру.
8. Выполнить универсальную проверку коэффициентов при неизвестных и свободных членов.
9. Решить систему канонических уравнений, т.е. определить реакции лишних связей.

10. Построить эпюры возникающих внутренних силовых факторов для заданной системы (иначе говоря, окончательные эпюры).

11. Выполнить статическую и кинематическую проверки.

Отметим, что пункты 7, 8, 11 приведенного алгоритма не являются безусловно необходимыми, хотя и позволяют контролировать правильность выполнения расчета. А для систем с одной лишней связью пункты 7 и 8 просто лишены смысла, так как в этом случае суммарная единичная эпюра совпадает с единичной.

Остановимся подробнее на некоторых из вышеперечисленных этапов расчета.

Выбор основной системы

Система, освобожденная от дополнительных связей, становится статически определимой. Она носит название *основной системы*. После того как дополнительные связи отброшены и система превращена в статически определимую, необходимо ввести вместо связей неизвестные силовые факторы, которые принято называть *лишними неизвестными*. В тех сечениях, где запрещены линейные перемещения, вводятся силы. Там, где запрещены угловые смещения, вводятся моменты. Как в том, так и в другом случае неизвестные силовые факторы будем обозначать X_i , где i — номер неизвестного. Наибольшее значение i равно степени статической неопределимости системы.

Заметим, что для внутренних связей силы X_i — являются взаимными. Если в каком-либо сечении рама разрезана, то равные и противоположные друг другу силы и моменты прикладываются как к правой, так и к левой частям системы.

Выбор основной системы (ОС) является непростым. Неудачный выбор основной системы может привести к значительной трудоемкости решения, а иногда и к грубой ошибке. Нельзя руководствоваться только одним правилом образования основной системы, а именно, что число отбрасываемых связей должно быть равным степени статической неопределимости. Надо обязательно следить еще и за тем, какие связи отбрасываются. Некоторые связи отбрасывать недопустимо. При выборе основной системы надо следить и за геометрической и кинематической неизменяемостью всей системы и отдельных ее частей.

Так, у балки (рисунок б. 6, а), которую далее будем называть заданной системой (ЗС), степень статической неопределимости $n=1$. Если исключить лишнюю связь (правую опору) и обозначить неизвестную реакцию через X , получим ее основную систему (ОС) (рисунок б. 6, б).

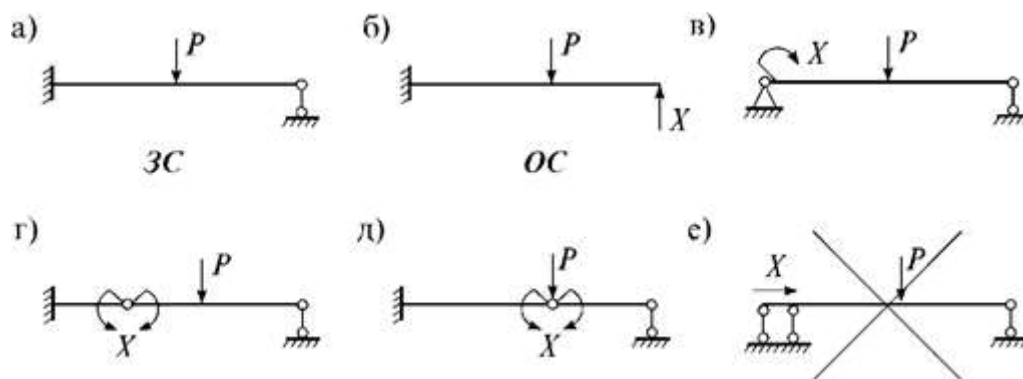


Рисунок 6. 6 – Выбор основной системы

Способов исключения лишних связей много (теоретически – бесконечное число). Например, лишнюю связь можно исключать как на рисунке 6.6, в-е. Однако одна из этих схем (рисунок. 6.6, е) геометрически изменяема и для дальнейшего расчета непригодна. Все остальные схемы могут быть приняты за основную систему.

Если воспользоваться известным теоретическим положением о том, что в линейно-упругих системах внешняя нагрузка распределяется единственным образом, то результаты расчетов по различным основным системам должны быть одинаковыми. Однако объем вычислений в разных основных системах может быть разным. Поэтому из многих вариантов основной системы нужно выбирать наиболее оптимальную. Например, в нашем примере первый вариант основной системы (рисунок 6.6, б) предпочтительнее остальных, т.к. в ней эпюры строятся легче.

Для заданной расчётной схемы статически неопределимого сооружения существует множество вариантов основных систем метода сил. Для расчёта принимается вариант, удовлетворяющий ряду требований, среди которых обязательным является требование геометрической неизменяемости основной системы метода сил. Выполнение некоторых желательных требований при выборе основной системы метода сил способствует сокращению времени на расчёт статически неопределимого сооружения. Это, прежде всего, образование простых по структуре основных систем методом сил, где чётко просматриваются рабочие схемы (главные и второстепенные части), легко определяются реакции опорных связей и внутренние усилия.

Устранение каких-либо связей не изменяет внутренние усилия и деформации системы, если к ней приложить дополнительные силы и моменты, представляющие собой реакции отброшенных связей. Значит, если к основной системе приложить заданную нагрузку и реакции удаленных связей, то основная и заданная системы станут эквивалентными.

Основную систему с приложенными к ней лишними неизвестными X_1, X_2, \dots, X_n и внешней нагрузкой P называют *эквивалентной системой* при условии, что её действительные перемещения согласуются с наложенными на исходную систему связями. Для каждой статически неопределимой заданной системы (рис. 6.7, а) можно подобрать, как правило, различные основные системы (рис. 6.7, б, в), однако их должно объединять следующее условие - основная система должна быть статически определимой и геометрически неизменяемой (т.е. не должна менять свою геометрию без деформаций элементов).

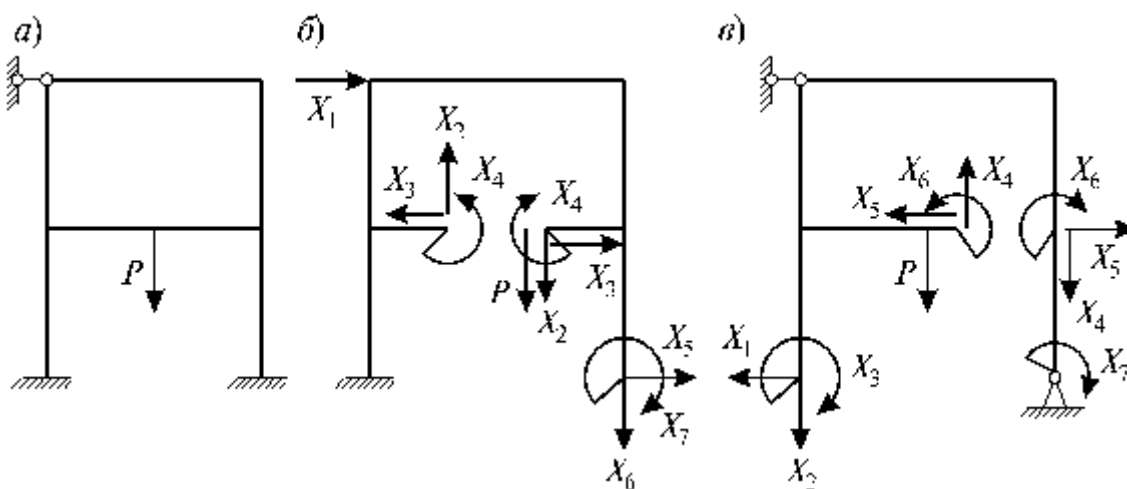


Рисунок 6.7 – Примеры выбора лишних связей

6.4 Канонические уравнения метода сил

В заданной системе по направлениям имеющихся жестких связей, в том числе и тех связей, которые отброшены при переходе к основной системе, перемещений быть не может. Поэтому и в основной системе перемещения по направлениям отброшенных связей должны равняться нулю. А для этого реакции отброшенных связей должны иметь строго определенные значения.

Условие равенства нулю перемещения по направлению любой i -ой связи из n отброшенных на основании принципа независимости действия сил имеет вид:

$$\Delta_i = \Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \dots + \Delta_{in} + \Delta_{iF} = 0; \quad (6.4)$$

где первый индекс означает направление перемещения и номер отброшенной связи, а второй указывает на причину, вызвавшую перемещение, т.е. Δ_{ik} - это перемещение по направлению i -ой связи, вызванное реакцией k -ой связи; Δ_{iF} - перемещение по направлению i -ой связи, вызванное одновременным действием всей внешней нагрузки.

Вид уравнения (9.7), т.е. количество слагаемых в каждом из них и их общее число, определяется только степенью статической неопределимости системы и не зависит от ее конкретных особенностей.

6.5 Вычисление коэффициентов и свободных членов канонических уравнений.

Метод Мора. Правило Верещагина. Формула Симпсона

Этому этапу расчета предшествует построение единичных и грузовых эпюр внутренних силовых факторов (для балок и рам – эпюр изгибающих моментов). Единичные эпюры строятся от действия безразмерной единичной силы или безразмерного единичного момента, совпадающих по направлению с направлением соответствующей лишней неизвестной в эквивалентной системе, и обозначаются через \bar{x}_i , а единичная эпюра – через \bar{M}_i .

Грузовая эпюра строится от внешней нагрузки, приложенной к основной системе. При этом можно строить одну эпюру от одновременного действия всех внешних нагрузок или несколько эпюр, отдельно от каждой из приложенных нагрузок. Такое разбиение одной грузовой эпюры на несколько более простых, как правило, целесообразно только тогда, когда среди действующих нагрузок есть равномерно распределенная, и эпюра моментов на соответствующем участке под ней является знакопеременной. При этом в каждом каноническом уравнении число свободных членов будет равно числу построенных грузовых эпюр.

Единичные и грузовые перемещения (коэффициенты и свободные члены канонических уравнений) в общем случае можно вычислить методом Мора. Для балок и рам это можно сделать при помощи правила Верещагина.

При вычислении коэффициентов и свободных членов канонических уравнений метода сил, помимо интегрирования

$$\delta_{ik} = \int \frac{\bar{M}_i M_k}{EI} dx \quad (6.8)$$

а также

$$\Delta_{iF} = \int \frac{\bar{M}_i M_F}{EI} dx \quad (6.9)$$

применяют различные упрощенные приемы вычисления интегралов.

Особенно обстоятельно они разработаны для рам с прямолинейными стержнями постоянного сечения. Жесткость $EI = \text{const}$ при этом выносится за знак интеграла, а под интегралом остается произведение двух функций: M_i и M_k , одна из которых, как правило, или обе являются линейными

функциями. Операция интегрирования здесь часто называется перемножением эпюр и ее символически изображают следующим образом:

$$\frac{1}{EI} \int_a^b M_1 M_2 dx = M_1 \otimes M_2 \quad (6.10)$$

здесь знак \otimes означает умножение в смысле формулы Мора.

Русский ученый Верещагин усовершенствовал метод, доказав, что вычисление интеграла Мора может быть заменено перемножением площадей грузовой эпюры моментов (грузовое состояние) на ординату с единичной эпюры (единичное состояние) под центром тяжести первой эпюры на всех участках стержневой системы.

При помощи расчленения эпюр на части можно добиться того, чтобы при перемножении участвовали эпюры простой структуры, для которых легко определяются и площади, и положения центров тяжести.

Приближенная формула Симпсона для перемножения эпюр представлена на рисунке 9.8. Определенный по приведенной формуле результат Δ_i численно равен произведению площади момента грузовой эпюры на ординату (угол поворота) единичной эпюры, взятой в центре тяжести грузовой.

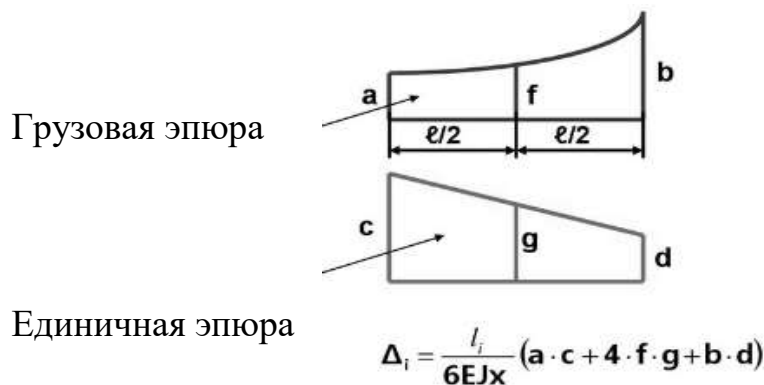


Рисунок 6.8 – Формула Симпсона

6.6 Универсальная проверка коэффициентов и свободных членов канонических уравнений

Для выполнения универсальной проверки необходимо построить суммарную единичную эпюру \bar{M}_s - эпюру моментов от одновременного действия всех единичных сил, приложенных к основной системе:

$$\bar{M}_s = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i \quad (6.11)$$

Перемножим суммарную единичную эпюру с эпюрой \bar{M}_i :

$$\begin{aligned} \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_s}{EI} ds &= \int \frac{1}{EI} \bar{M}_i (\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n) ds = \\ &= \int \frac{1}{EI} \bar{M}_i \bar{M}_1 ds + \int \frac{1}{EI} \bar{M}_i \bar{M}_2 ds + \dots + \int \frac{1}{EI} \bar{M}_i \bar{M}_n ds \\ &= \delta_{i1} + \delta_{i2} + \dots + \delta_{in}; \end{aligned} \quad (6.12)$$

Таким образом, результат перемножения суммарной и i -ой единичной эпюр - это перемещение по направлению i -ой связи от совместного действия единичных лишних неизвестных. Это перемещение равно сумме коэффициентов i -го канонического уравнения:

$$\delta_{is} = \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_s}{EI} ds = \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n \delta_{ik}. \quad (6.13)$$

Такая проверка называется *построчной* и выполняется для каждого канонического уравнения.

Вместо n построчных проверок чаще всего выполняется одна – **универсальная** проверка, которая состоит в перемножении суммарной единичной эпюры самой на себя и проверке условия:

$$\delta_{ss} = \int \frac{\bar{M}_s \bar{M}_s}{EI} ds = \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n \delta_{ik}. \quad (6.14)$$

Если универсальная проверка выполняется, единичные перемещения вычислены правильно; если нет – необходимо выполнить построчные проверки, что позволит уточнить перемещение, при вычислении которого допущена ошибка.

Для выполнения проверки грузовых перемещений необходимо перемножить суммарную единичную и грузовую эпюры изгибающих моментов:

$$\begin{aligned} \int \frac{\bar{M}_s M_F}{EI} ds &= \int \frac{1}{EI} M_F (\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n) ds = \\ &= \int \frac{1}{EI} \bar{M}_1 M_F ds + \int \frac{1}{EI} \bar{M}_2 M_F ds + \dots + \int \frac{1}{EI} \bar{M}_n M_F ds \\ &= \Delta_{1F} + \Delta_{2F} + \dots + \Delta_{nF}; \end{aligned} \quad (6.15)$$

Таким образом, проверка свободных членов системы канонических уравнений состоит в выполнении условия:

$$\delta_{sF} = \int \frac{\bar{M}_s M_F}{EI} ds = \sum_{i=1}^n \Delta_{iF} i = 1, 2, \dots, n \quad (9.16)$$

6.7 Построение окончательных эпюр внутренних силовых факторов

Окончательные эпюры можно построить двумя способами.

Так как при найденных значениях лишних неизвестных X_i выполняются условия совместности деформаций, то из расчета основной системы можно получить все искомые внутренние усилия заданной системы. На основании принципа независимости действия сил для изгибающих моментов получим:

$$M = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n + M_F,$$

или, учитывая, что

$$M_1 = \bar{M}_1 X_1; \quad M_2 = \bar{M}_2 X_2; \quad \dots \quad M_n = \bar{M}_n X_n;$$

приходим к выражению:

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n + M_F = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i X_i + M_F. \quad (6.17)$$

Аналогично определяется продольные и поперечные силы:

$$Q = \bar{Q}_1 X_1 + \bar{Q}_2 X_2 + \dots + \bar{Q}_n X_n + M_F = \sum_{i=1}^n \bar{Q}_i X_i + Q_F. \quad (6.18)$$

$$N = \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + \dots + \bar{N}_n X_n + M_F = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i X_i + N_F. \quad (6.19)$$

Второй способ основан на том, что в результате вычисления реакций лишних связей X_i исходная статически неопределимая система приведена к статически определимой системе, загруженной внешними нагрузками и реакциями лишних связей. Поэтому окончательные эпюры внутренних силовых факторов можно построить для эквивалентной системы, вычислив предварительно (и то не всегда) из условий равновесия опорные реакции последней.

Недостатком первого способа является то обстоятельство, что для его реализации необходимо дополнительно построить эпюры поперечных и продольных сил, которые не используются в расчетах.

В связи с этим для построения окончательных эпюр более рациональным представляется второй способ, а условие (6.17) можно использовать в качестве дополнительной проверки.

Проверка окончательной эпюры изгибающих моментов

Эта проверка выполняется в двух вариантах: статическая и кинематическая.

При *статической проверке*, выполняемой обычно для рам, вырезаются узлы и записываются условия их равновесия под действием узловых сосредоточенных моментов и изгибающих моментов на концах стержней. Алгебраическая сумма моментов в любом узле должна быть равна нулю. Проверка является вспомогательной и выполняется автоматически при правильных эпюрах изгибающих моментов в основной системе и при выполнении кинематической проверки. Статическая проверка эпюр Q и N состоит в том, что для любой отсеченной части рамы сумма проекций на две оси всех действующих сил – внешних нагрузок и внутренних усилий – должна быть равна нулю.

Тема 7. Метод перемещений. Степень кинематической неопределимости рам

Цель: владеть практическими навыками проводить расчетное обоснование и конструирование строительных конструкций зданий и сооружений промышленного и гражданского назначения.

Ключевые вопросы:

- 7.1 Что такое степень кинематической неопределимости?
- 7.2 Выбор основной системы при решении методом перемещений.
- 7.3 Канонические уравнения метода перемещений.
- 7.4 Определение реакций в однопролетных статически неопределимых стержневых элементах

Методические указания

При расчете сложных рам часто используется метод перемещений в связи с тем, что позволяет существенно сократить количество неизвестных. Также на этом методе строится расчет при продольно-поперечном изгибе и определение устойчивости строительных конструкций.

7.1 Выбор основной системы

Для раскрытия сути метода перемещений дадим определение понятия степени кинематической неопределимости. *Степенью кинематической*

неопределимости называется число возможных перемещений узлов заданной системы.

При расчете статически неопределимых систем по методу перемещений за искомые величины принимаются те перемещения, через которые можно будет определить величины внутренних усилий в любом произвольном сечении. Известно, что для определения изгибающего момента в произвольном сечении заданного стержня необходимо знать величины поворотов в узлах и относительные линейные смещения концов стержня друг относительно друга.

Для решения статически неопределимой системы методом перемещений первоначально необходимо установить общее число неизвестных перемещений, которые нужно определить.

Следовательно, при расчете рам за неизвестные следует принимать углы поворотов и линейные смещения узлов заданной системы. Общее число неизвестных n будет равно сумме числа неизвестных углов поворота узлов n_y и их возможных линейных перемещений n_l , т.е.

$$n = n_y + n_l \quad (7.1)$$

Число неизвестных углов поворота n_y равно числу жестких узлов заданной системы. Жестким считается узел, в котором концы, по крайней мере, двух из сходящихся в нем стержней жестко связаны между собой (например, узлы 1, 2, 3, на рисунке 7.1, а; узлы 1, 2 на рисунке 7.2, а).

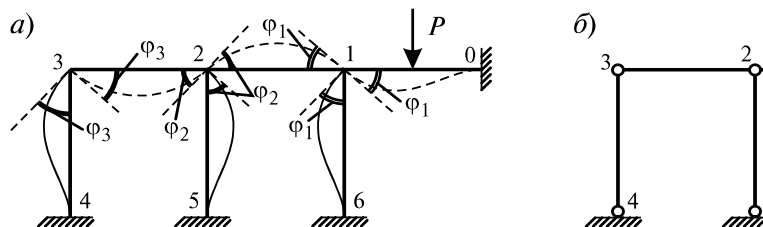


Рисунок 7.1- Расчетная схема рамы с жесткими узлами

Для определения числа линейных неизвестных перемещений заданную систему следует заменить ее *шарнирной схемой* путем введения полных шарниров во все узлы и опорные закрепления (рисунок 7.2, б- 7.3, б). Число неизвестных линейных смещений узлов системы равно числу стержней, которые необходимо ввести в шарнирную схему, чтобы превратить ее в геометрически неизменяемую систему. Следовательно, число независимых линейных смещений узлов равно степени геометрической изменяемости шарнирной системы, полученной из заданной, путем введения во все жесткие узлы, включая и опорные, полных шарниров.

На основании о пренебрежении продольными деформациями элементов, для плоской рамы (рисунок 7.2, а), линейные смещения узлов отсутствуют. Но шарнирная схема (рисунок 7.2, б) является геометрически неизменяемой.

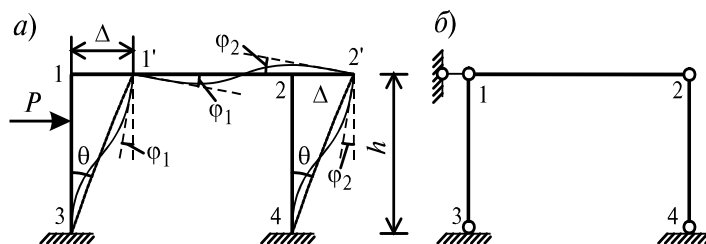


Рисунок 7.2 – Расчетная схема геометрически изменяемой рамы

Рамы, шарнирные схемы которых являются геометрически неизменяемыми, относятся к категории, так называемых, *закрепленных* или *несвободных*. Для таких рам число неизвестных перемещений легко определяется и оно всегда равно числу жестких узлов: $n = n_y$. В нашем примере $n = 3$.

В качестве другого примера, рассмотрим раму, изображенную на рисунок 7.2, а, число жестких узлов которого равно 2. Следовательно, $n_y = 2$.

Шарнирная схема рамы один раз геометрически изменяемая, так как для превращения ее в геометрически неизменяемую необходимо ввести 1 стержень, например, так, как это показано на рисунке 7.2, б. Итак, число линейных неизвестных перемещений $n_l = 1$. Общее число неизвестных перемещений в рассматриваемой системе равно

$$n = 2 + 1 = 3. \tag{7.2}$$

7.2 Основная система. Канонические уравнения метода перемещений

При расчете методом перемещений заданная система расчленяется на однопролетные статически неопределимые балки путем введения дополнительных связей, позволяющих исключить все линейные и угловые перемещения узлов заданной системы.

Получаемая в результате система, называется *основной системой метода перемещений*. Например, для расчета заданной системы, изображенной на рисунке 7.3а, по методу перемещений основная система будет иметь вид, представленный рисунке 7.3б.

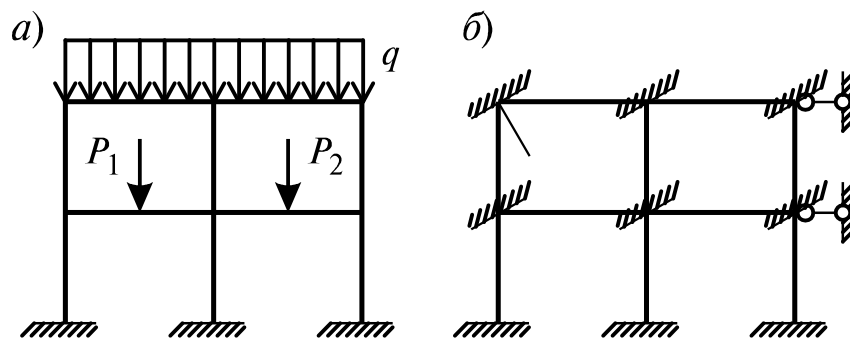


Рисунок 7.3 - Пример статически неопределимой рамы и основная система

При этом $n = n_y + n_n = 6 + 2 = 8$.

Поскольку в заданной системе имеют место и повороты, и линейные смещения узлов, то основной системе надо придать такие же повороты и смещения, при этом добиваясь равенства нулю реакций во всех введенных связях, сопротивляющихся этим поворотам и смещениям. Тогда можно утверждать, что заданная и основная система в нагруженном состоянии являются эквивалентными.

Обозначая, через R_1, R_2, \dots, R_n величины *реактивных моментов и усилий* в n количестве дополнительно введенных элементах основной системы, математическая формулировка условий эквивалентности заданной и основной систем, будет иметь вид:

$$R_1 = 0; \quad R_2 = 0; \quad \dots \quad R_n = 0. \quad (7.3)$$

Для раскрытия выражений реакций R_i ($i = 1, 2, \dots, n$), введем следующие обозначения:

Z_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – линейные и угловые перемещения узлов заданной системы при действии системы внешних сил;

r_{ik} ($i, k = 1, 2, \dots, n$) – реакция в i -ой дополнительно введенной связи от перемещения $Z_k = 1$;

R_{iPq} ($i = 1, 2, \dots, n$) – реакция в i -ой дополнительно введенной связи основной системы от действия заданной системы внешних сил.

С учетом принятых обозначений, суммарную реакцию в i -ой дополнительно введенной связи, можно записать в следующем виде:

$$R_i = r_{i1} Z_1 + r_{i2} Z_2 + \dots + r_{in} Z_n + R_{iPq} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (7.4)$$

Для того, чтобы основная система стала эквивалентна заданной, полную реакцию R_i ($i = 1, 2, \dots, n$) во всех введенных связях основной системы, согласно (7.4), необходимо приравнять нулю:

$$\sum_{k=1}^n r_{ik} Z_k + R_{iPq} = 0, (i = 1, 2, 3, \dots, n),$$

или в развернутой форме:
$$\frac{d^4 y}{dx^4} = 0 \quad (7.5)$$

$$(7.6) \quad \begin{cases} r_{11} Z_1 + r_{12} Z_2 + \dots + r_{1n} Z_n + R_{1Pq} = 0; \\ r_{21} Z_1 + r_{22} Z_2 + \dots + r_{2n} Z_n + R_{2Pq} = 0; \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ r_{m1} Z_1 + r_{m2} Z_2 + \dots + r_{mn} Z_n + R_{mPq} = 0. \end{cases}$$

Здесь неизвестными являются перемещения Z_i ($i = 1, 2, \dots, n$), т.е. возможные перемещения узлов заданной системы по направлению введенных связей в основной системе.

Уравнения (7.6) называются *каноническими уравнениями метода перемещений*. Коэффициенты этих уравнений обладают свойством симметрии $r_{ik} = r_{ki}$, что следует из *теоремы о взаимности реакций*, примененной к основной системе метода перемещений.

Проверкой правильности расчета рамы методом перемещений служат равенство нулю суммы моментов, передающихся на каждый узел с примыкающих к нему стержней, а также иные условия равновесия рамы.

Заметим, что в методе сил эти условия выполняются в каждой единичной эпюре и поэтому не обеспечивают проверку решения канонических уравнений.

Для определения коэффициентов r_{ik} и свободных членов R_{iPq} системы канонических уравнений метода перемещений (7.6) необходимо предварительно построить эпюры моментов в основной системе от заданной системы внешних сил и от единичных перемещений $Z_i = 1$. Все коэффициенты, а также свободные члены уравнений разделяются на две группы: коэффициенты и свободные члены, представляющие реактивные моменты во введенных дополнительных элементах; коэффициенты и свободные члены, представляющие реактивные усилия во введенных дополнительных элементах основной системы.

Коэффициенты и свободные члены, представляющие реактивные моменты во введенных элементах, определяются вырезанием узлов и составлением уравнений равновесия моментов $\sum M = 0$, согласно методу сечений.

Коэффициенты и свободные члены, представляющие реактивные усилия во введенных связях основной системы определяются разрезанием элементов

рамы и составлением уравнения равновесия сил на отсеченной части $\Sigma y = 0$. При этом направление оси y выбирается так, чтобы уравнение получилось наиболее простым по форме.

Следовательно, для того, чтобы построить эпюру моментов в основной системе от действия системы внешних сил и от $Z_i = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$), необходимо предварительно определить эпюру моментов в однопролетных статически неопределенных стержнях (входящих в состав основной системы, за исключением дополнительных элементов). Откуда следует, что в общем случае для реализации метода перемещений необходимо предварительно рассмотреть решение задачи об определении эпюр внутренних усилий в однопролетных статически неопределимых стержнях при кинематическом (линейном и угловом перемещении концевых сечений) и внешнем силовом и температурном нагружении.

7.3 Определение реакций в однопролетных статически неопределимых стержневых элементах

Сначала определим выражения изгибающих моментов и поперечных сил в однопролетных балках при единичных угловых перемещениях или при единичных относительных линейных смещениях концевых сечений (рисунок 7.4, а).

Дифференциальное уравнение изгиба балок с постоянным поперечным сечением при отсутствии внешних нагрузок, действующих в пролете, записывается в виде:

Общее решение однородного дифференциального уравнения (7.3) запишем в следующем виде:

$$y = c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4, \quad (7.7)$$

откуда

$$\varphi = \frac{dy}{dx} = 3c_1 x^2 + 2c_2 x + c_3. \quad (7.8)$$

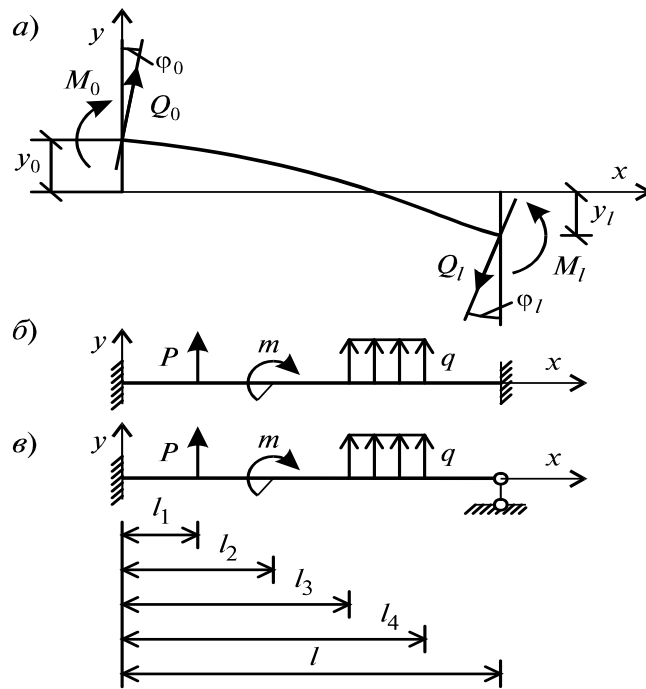


Рисунок 7.4 – Схема для определения значений усилий в концевых сечениях стержня

Введем следующие граничные условия соответственно расчетной схеме:

При $x = 0, y = y_0; \varphi = \varphi_0$;

при $x = l, y = y_l; \varphi = \varphi_l$. (7.9)

С учетом граничных условий задачи (7.9) из (7.7) и (7.8), получим:

$$c_4 = y_0; \quad c_3 = \varphi_0; \quad c_1 l_3 + c_2 l_2 + \varphi_0 l + y_0 = y_l;$$

$$3 c_1 l_2 + 2 c_2 l + \varphi_0 = \varphi_l. \quad (7.10)$$

В результате совместного рассмотрения уравнений (7.10) получим выражения произвольных постоянных $c_i (i = 1, 2, 3, 4)$, представленное в следующем виде:

$$c_1 = \frac{\varphi_0 - \varphi_l}{l^2} - \frac{2}{l^3}(y_l - y_0); \quad c_2 = -\frac{2\varphi_0 + \varphi_l}{l} + \frac{3}{l^2}(y_l - y_0); \quad c_3 = \varphi_0; \quad c_4 = y_0.$$

Далее определим выражения M и Q :

$$M = -EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -EJ(6c_1 x + 2c_2); \quad Q = -EJ \frac{d^3 y}{dx^3} = -EJ \cdot 6c_1. \quad (7.11)$$

Для примера вычислим значения M и Q в концевых сечениях для балки с двумя защемленными концами при $\varphi_0 = 1$.

В данном случае имеем: $\varphi_l = y_l = y_0 = 0$.

Подставляя эти значения в (7.11) получим:

$$M_0 = -EJ \cdot 2c_2 = -2EJ \left(-\frac{2}{l} \right) = 4 \frac{EJ}{l}; \quad Q_0 = -6EJ c_1 = -\frac{6EJ}{l^2};$$

$$M_l = -EJ \left(6\frac{1}{l^2}l - 2\frac{2}{l} \right) = 2 \frac{EJ}{l}; \quad Q_l = Q_0 = -\frac{6EJ}{l^2}. \quad (7.12)$$

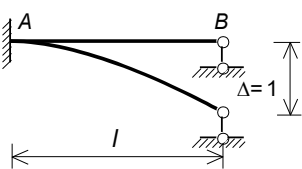
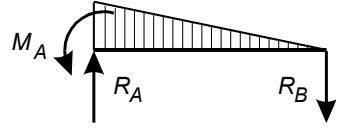
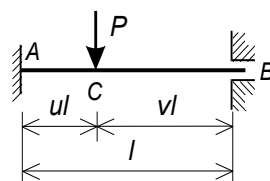
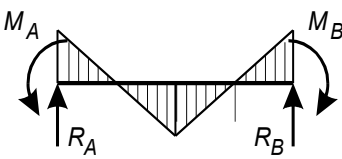
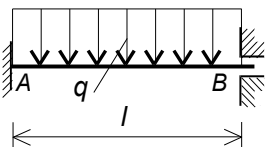
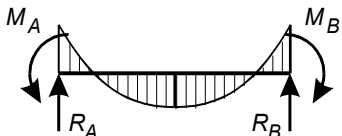
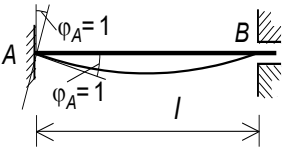
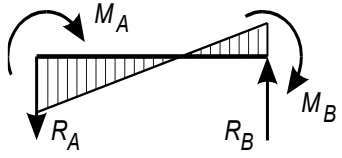
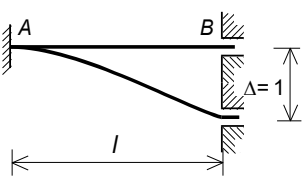
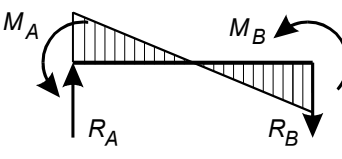
Результаты расчетов эпюры моментов и поперечных сил для однопролетных статически неопределимых балок с различными граничными условиями их закрепления и при различном характере кинематического нагружения обобщены в таблице 7.1. Ординаты эпюры моментов отложены со стороны растянутых волокон.

Для определения эпюры моментов в однопролетных статически неопределимых балочных элементах основной системы от действия внешних сил, удобно применить метод сил.

Нужно отметить, что применяя метод перемещений, следует придерживаться какого-либо определенного правила знаков. Принять, что углы поворота опорного сечения, а также реактивный момент, действующий на балку со стороны заделки, положительны, если в результате оси поворачиваются по часовой стрелке. Линейное смещение узла принято положительным, если оно совпадает по направлению с положительной реакцией, вызывающей растяжение опорного сечения стержня.

Таблица 7.1

№ n/n	Схема балки и воздействия на нее	Эпюры изгибающих моментов ¹⁾ и реакции	Формулы
1.			$M_A = -(Pl/2)v(1-v^2);$ $M_C = (Pl/2)u^2v(3-u);$ $R_A = (Pv/2)v(3-v^2);$ $R_B = Pu^2[1+(v/2)] = (Pu^2/2)(3-u)$
2.			$M_A = -ql^2/8;$ $R_A = 5ql/8;$ $R_B = 3ql/8$
3.			$M_A = 3EJ/l;$ $R_A = -R_B = -3EJ/l^2$

4.			$M_A = -3EJ/l^2;$ $R_A = -R_B = 3EJ/l^3$
5.			$M_A = -uv^2 Pl;$ $M_B = u^2 v Pl;$ $M_C = 2u^2 v^2 Pl;$ $R_A = v^2(1+2u)P;$ $R_B = u^2(1+2v)P$
6.			$M_A = -M_B = -ql^2/12;$ $R_A = R_B = ql/2$
7.			$M_A = 4EJ/l;$ $M_B = 2EJ/l;$ $R_A = -R_B = -6EJ/l^2$
8.			$M_A = M_B = -6EJ/l^2;$ $R_A = -R_B = 12EJ/l^3$
Примечание. 1) ординаты отложены со стороны растянутого волокна.			

Тема 8. Устойчивость сооружений

Цель: владеть практическими навыками проводить расчетное обоснование и конструирование строительных конструкций зданий и сооружений промышленного и гражданского назначения.

Ключевые вопросы:

7.1 Устойчивость сооружений

7.2 Критерии определения устойчивости систем.

7.3 Задача Эйлера

7.4 Определение реакций в однопролетных статически неопределимых стержневых элементах

8.1. Предмет и задачи устойчивости

Устойчивость - способность сооружений сохранять первоначальное положение или первоначальную форму равновесия в деформированном состоянии при действии внешних сил.

Следовательно, надо различать *устойчивость положения сооружения* и *устойчивость форм равновесия* в нагруженном состоянии. Положение сооружения или форма равновесия в нагруженном состоянии считаются *устойчивыми*, если при всяком малом дополнительном возмущении, сооружение отклоняется от исследуемого положения или равновесного состояния, но полностью возвращается в исходное состояние (для упругих систем) после устранения возмущения, или стремится к возвращению в исходное состояние (для упруго–пластических систем).

Положение сооружения или форма равновесия в нагруженном состоянии считаются *неустойчивыми*, если сооружение не проявляет тенденцию к уменьшению отклонений, и отклоняется еще далее – до нового положения или новой формы равновесного состояния.

Переход сооружения из одного равновесного состояния к другому равновесному состоянию называется *потерей устойчивости системы*. Состояние перехода называется *критическим состоянием*. При этом, величины внешних сил, действующие на сооружение, называются *критическими*.

Как это следует из понятия устойчивости, в механике различают два вида потери устойчивости сооружения: *потерю устойчивости положения* и *потерю устойчивости, вызванной сменой формы равновесного состояния*.

Пример потери устойчивости положения элемента сооружения рассмотрим на схеме, изображенной на рисунке 8.1. На пластину на двух опорах действует собственный вес G и сила P .

Учитывая, что левая подвижная опора способна развить реакцию только вверх, т.е. представляет собой одностороннюю связь, следовательно, при условии $P h < G \frac{l}{2}$ состояние пластинки является устойчивым. В данном случае левая опорная реакция – величина конечная и направлена вверх.

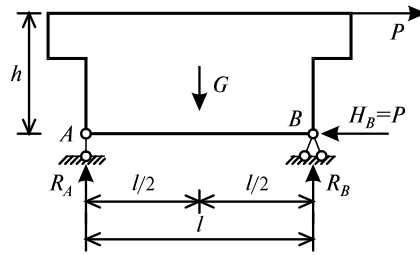


Рисунок 8.1 – Схема нагружения пластины

С ростом силы P , при $P h = G \frac{l}{2}$ левая опорная реакция принимает нулевое значение, а равнодействующая сил P и G пройдет через правый шарнир. Это признак того, что наступило критическое состояние. Поэтому значение силы P считается критическим и обозначается $P_{кр}$.

Даже незначительное увеличение силы P приведет к опрокидыванию пластины, она займет новое равновесное положение. То есть произойдет потеря устойчивости положения пластины.

При изучении потери устойчивости сооружений, связанная со сменой формы деформированного состояния в строительной механике различают два рода потери устойчивости.

Потерю устойчивости, связанную только со сменой формы деформированного состояния, называют *потерей устойчивости первого рода*, что свойственно только упругим системам.

Потерей устойчивости второго рода принято называть первое предельное состояние системы по несущей способности системы, т.е. состояние системы, когда при дальнейшем увеличении внешних сил равновесие между внешними и внутренними силами нарушается.

Основная задача теории устойчивости заключается в определении критических значений внешних сил. При этом наибольшее практическое значение имеет определение критических значений внешних сил при потере устойчивости системы по первому роду.

8.2 Критерии определения устойчивости упругих систем

В теории устойчивости основными критериями определения критических значений внешних нагрузок являются *энергетический, динамический и статический*.

В основе энергетического критерия заложен известный *принцип Лагранжа–Дирихле*, согласно которому, если система находится в состоянии устойчивого равновесия, ее полная потенциальная энергия обладает минимумом по сравнению со всеми соседними состояниями системы; если в

состоянии неустойчивого равновесия – то максимумом; а если в *безразличном*, т.е. критическом – то потенциальная энергия является постоянной величиной.

В общем случае изменение (*вариацию*) полной потенциальной энергии системы dU при переходе ее от рассматриваемого состояния к соседнему можно записать таким образом:

$$dU = dV - dT,$$

где dV – вариация потенциальной энергии внутренних сил; dT – вариация потенциальной энергии внешних сил.

Следовательно, критическое состояние системы, согласно энергетического критерия, определяется из условия

$$dU = 0 \text{ или } dV = dT.$$

к первоначальному состоянию.

Суть статического критерия заключается в следующем. Исследуемой системе задается отклоненная форма равновесия, совпадающая по характеру перемещений с ожидаемой новой формой равновесного состояния системы после потери устойчивости системы, и определяются значения рассматриваемых внешних нагрузок, способных удержать систему в новой форме равновесного состояния. Значения внешних нагрузок, способных удержать систему в новом равновесном состоянии, при соблюдении граничных условий по исходному состоянию, является критическим.

В дальнейшем, здесь рассматривается решение задач теории устойчивости с применением только статического критерия, так как он является основным критерием при выполнении практических расчетов упругих консервативных систем.

8.3 Задача Эйлера

Рассмотрим решение задачи устойчивости упругого стержня, постоянного поперечного сечения, расположенной на двух шарнирно опертых концах, при действии продольной силы переменной величины P (рисунок 8.2). Впервые эта задача была поставлена и решена Л. Эйлером в середине XVIII века.

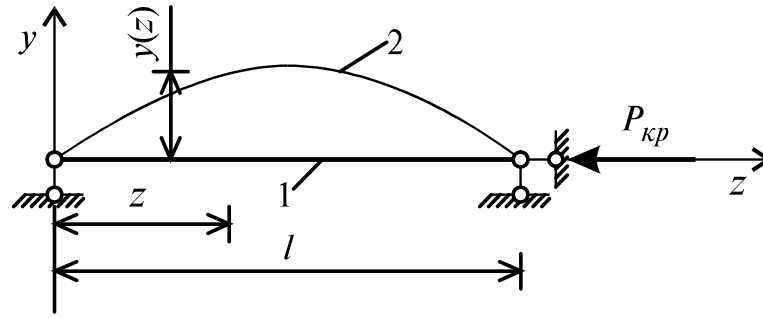


Рисунок 8.2 – Задача Эйлера

На начальном этапе действия постоянно возрастающей силы P , очевидно, что в поперечных сечениях стержня возникают только продольно сжимающие силы и стержень испытывает сжатие, сохраняя прямолинейную форму деформированного состояния (1). Считая данную форму деформированного состояния в качестве начальной, предполагают, что при некотором значении внешней силы $P = P_{кр}$ стержень изогнется, т.е. в некотором новом равновесном состоянии принимает искривленную форму (2), изображенную на рисунок 8.2.

Обозначая величину прогибов стержня через $y(z)$ в сечении, расположенном на расстоянии z от начала системы координат yz , значения изгибающих моментов в указанном поперечном сечении от действия внешней силы P принимают значения

$$M = -Py.$$

Из теории изгиба следует, деформированное состояние стержня описывается уравнением

$$E J_x y'' = M = -Py. \quad (8.1)$$

Принимая обозначение аргумента сложного изгиба

$$k^2 = \frac{P}{E J_x}, \quad (8.2)$$

Получим уравнение (8.1) в виде:

$$y'' + k^2 y = 0. \quad (8.3)$$

Решение дифференциального уравнения имеет вид имеет следующий вид:

$$y = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz. \quad (8.4)$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий закрепления балки (прогибы на опорах равны нулю), или, $y(0) = 0$; $y(l) = 0$.

Из первого условия вытекает, что $C_2 = 0$, а из второго

$$C_1 \sin kl = 0. \quad (8.5)$$

Последнее уравнение имеет два возможных решения: либо $C_1 = 0$, либо же $\sin kl = 0$.

В первом случае получается, что $C_1 = C_2 = 0$ и перемещения согласно (8.4) тождественно равны нулю, т.е. $y = 0$. Это решение нас не интересует. Во втором случае, т.е. предполагая, что $C_1 \neq 0$, из (8.5) следует, что $\sin kl = 0$. Откуда следует, что $kl = n\pi$, где $n = 1, 2, 3, \dots$ С учетом выражения (8.2), получим

$$P_{кр} = \frac{n^2 \pi^2 EJ_x}{l^2}$$

Наименьшее значение критической силы $P_{кр}$ получается при $n=1$:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_x}{l^2} \quad (8.6)$$

Эта сила носит название первой *критической или эйлеровой силы*.

Решение (8.4) при $C_1 \neq 0$ $C_2 = 0$ принимает вид

$$y = C_1 \sin \frac{n \pi z}{l}.$$

При выполнении практических расчетов, как правило, определяется критическое значение внешней силы, соответствующее низшей форме потери устойчивости системы. Поэтому мы далее будем рассматривать решение задачи по определению только наименьшего значения критических сил.

8.4. Устойчивость стержней с различными концевыми условиями их закрепления

Рассмотрим однопролетный упругий стержень постоянного поперечного сечения, по концам которого приложены сжимающие силы P , всегда направленные параллельно оси недеформированного стержня. Поместим начало системы декартовых координат x, y, z в центре тяжести левого крайнего сечения. Ось z направим по продольной недеформированной оси стержня, а ось y – по направлению наименьшей жесткости поперечного сечения.

С целью введения различных условий закрепления в концевых сечениях стержня предполагается, что в новом равновесном (критическом) состоянии (2) в общем случае могут быть приложены поперечные силы и изгибающие моменты. Кроме того, концевые сечения могут перемещаться перпендикулярно оси недеформированного стержня и поворачиваться вокруг оси x (рис. 8.3).

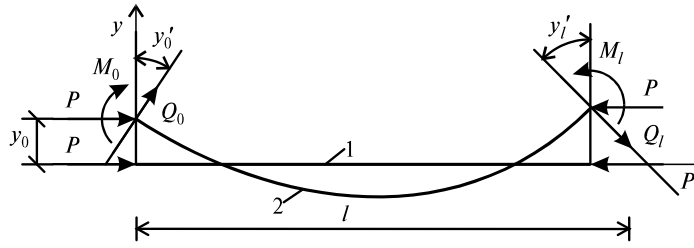


Рисунок 8.3 – Граничные условия на концах стержня

Дважды дифференцируя каждый член уравнения (8.1), получим дифференциальное уравнение, описывающее деформированное состояние рассматриваемого стержня в общем виде:

$$EJ_x \frac{d^4 y}{dz^4} + P \frac{d^2 y}{dz^2} = 0. \quad (8.7)$$

Общее решение которого имеет вид:

$$y = C_1 + C_2 z + C_3 \sin kz + C_4 \cos kz. \quad (8.8)$$

Составляя первые три производные от функции прогиба, составим выражение для углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил, возникающих в произвольном сечении, расположенном на расстоянии $0 \leq z \leq l$ от начала принятой системы координат:

$$\begin{cases} y' = C_2 + C_3 k \cos kz - C_4 k \sin kz; \\ M_x = EJ_x y'' = -EJ_x k^2 C_3 \sin kz - EJ_x k^2 C_4 \cos kz; \\ Q_x = EJ_x y''' = -EJ_x k^3 C_3 \cos kz + EJ_x k^3 C_4 \sin kz. \end{cases} \quad (8.9)$$

Произвольные постоянные C_1 , C_2 , C_3 и C_4 определяются из граничных условий закрепления стержня. Очевидно, что произвольные постоянные в первоначальном, т.е. докритическом равновесном состоянии независимо от граничных условий закрепления стержня, тождественно приравнивают нулю, так как в первоначальном равновесном состоянии (1) (см. рисунок 8.3) имеем:

$$y = y' = Q_y = M_x = 0.$$

В новом равновесном (критическом) состоянии необходимо учесть, что независимо от граничных условий закрепления стержня произвольные постоянные C_1 , C_2 , C_3 и C_4 одновременно не могут быть равными нулю. Данное обстоятельство является необходимым и достаточным условием для определения нового равновесного состояния системы соответственно величинам критических значений внешних продольных сил P .

Решение задач по определению критической величины силы P для стержней с различными концевыми условиями закрепления (рис. 8.4).

а) В случае, когда стержень с двумя концами шарнирно оперт (рис. 8.4, а), граничные условия задачи имеют вид:

$$y(0) = y(l) = 0; \quad M_x(0) = M_x(l) = 0.$$

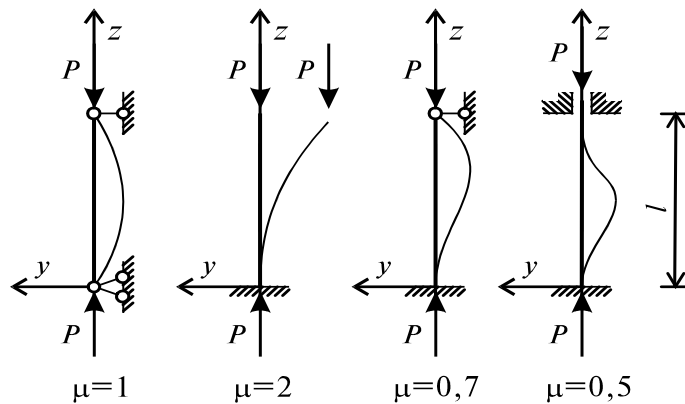


Рисунок 8.4 – Определение критической силы для разных условий опирания концов

Подставляя выражения прогиба и изгибающего момента соответственно из (8.8) и (8.9) в граничные условия задачи, получим:

$$\begin{cases} C_1 = C_4 = 0; \\ C_1 + C_2 l + C_3 \sin kl + C_4 \cos kl = 0; \\ -k^2 EJ_x C_4 = 0; \\ -k^2 EJ_x C_3 \sin kl - k^2 EJ_x C_4 \cos kl = 0. \end{cases} \quad (8.10)$$

Однако из третьего уравнения, а затем из первого уравнения последней системы легко установить, что в данном случае $C_4 = 0$, $C_1 = 0$, следовательно, алгебраическая система относительно неизвестных произвольных постоянных принимает вид:

$$\begin{cases} C_2 l + C_3 \sin kl = 0; \\ -k^2 EJ_x C_3 \sin kl = 0. \end{cases} \quad (8.11)$$

Так как C_2 и C_3 одновременно не могут быть равными нулю в новом – критическом равновесном состоянии стержня, поэтому необходимо требовать, чтобы определитель последней системы однородных уравнений был равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} l & \sin kl \\ 0 & -k^2 EJ_x C_3 \cdot \sin kl \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad -k^2 l EJ_x C_3 \sin kl = 0. \quad (8.12)$$

Откуда следует, что $\sin kl = 0$. Из решения последнего уравнения получим $k = \frac{n\pi}{l}$, ($n = 1, 2, 3, \dots$).

С учетом (8.2), при $n = 1$, выражение наименьшего значения критической силы $P_{кр}$ окончательно определяется:

$$P_{кр} = k^2 EJ_x = \frac{\pi^2 EJ_x}{l^2}. \quad (8.13)$$

Последнее выражение, как нетрудно заметить, полностью совпадает с результатом решения задачи Эйлера.

б) Для стержня, изображенного на рис. 8.4, б, граничные условия задачи имеют вид:

$$y(l) = y'(l) = 0; \quad M_x(0) = 0; \quad M_x(l) = P y_0 = EJ_x k^2 y_0.$$

Подставляя выражения прогибов, углы поворотов и изгибающих моментов в граничные условия задачи, получим:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 l + C_3 \sin kl + C_4 \cos kl = 0; \\ C_2 + C_3 \cos kl - C_4 \sin kl = 0; \\ -k^2 EJ_x C_4 = 0; \\ -k^2 EJ_x C_3 \sin kl - k^2 EJ_x C_4 \cos kl = EJ_x k(C_1 + C_4). \end{cases} \quad (8.14)$$

Из третьего уравнения следует, что $C_4 = 0$. С учетом данного обстоятельства последняя система уравнений окончательно записывается в виде:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 l + C_3 \sin kl = 0; \\ C_2 + C_3 \cos kl = 0; \\ C_1 + C_3 \sin kl = 0. \end{cases} \quad (8.15)$$

Откуда имеем:

$$\begin{vmatrix} 1 & l & \sin kl \\ 0 & 1 & k \cos kl \\ 1 & 0 & \sin kl \end{vmatrix} = 0. \quad (8.16)$$

Раскрывая определитель и после некоторых преобразований получим: $\cos kl = 0$. Наименьший корень данного уравнения является $kl = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, критическое значение внешней силы определяется по формуле

$$P_{кр} = k^2 EJ_x = \frac{\pi^2 EJ_x}{(2l)^2} = \frac{\pi^2 EJ_x}{4l^2}. \quad (8.17)$$

в) Для стержня, изображенного на рис. 8.4, в граничные условия задачи записываются в виде $y(0) = y(l) = 0; y'(l) = 0; M_x(0) = 0$. Следовательно, система уравнений относительно произвольных постоянных в данном случае записывается в форме:

$$\begin{cases} C_1 + C_4 = 0; \\ C_1 + C_2 l + C_3 \sin kl + C_4 \cos kl = 0; \\ C_2 + C_3 k \cos kl - C_4 k \sin kl = 0; \\ -k^2 EJ_x C_4 = 0. \end{cases} \quad (8.18)$$

Из последнего уравнения имеем, что $C_4 = 0$, следовательно в первом уравнении $C_1 = 0$. Поэтому система уравнений преобразуется к виду:

$$\begin{cases} C_2 l + C_3 \sin kl = 0; \\ C_2 + C_3 k \cos kl = 0. \end{cases} \quad (8.19)$$

Определитель которого в критическом состоянии стержня должен быть равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} l & \sin kl \\ 1 & k \cos kl \end{vmatrix} = 0. \quad (8.20)$$

Откуда имеем: $\operatorname{tg} kl = kl$. Наименьший корень последнего уравнения принимает значение $kl = 4.49$, следовательно,

$$P_{кр} = k^2 EJ_x = \frac{\pi^2 EJ_x}{(0.7l)^2} = \frac{4.49^2 EJ_x}{l^2}. \quad (8.21)$$

г) Рассмотрим стержень с двумя заземленными концами, изображенный на рис. 8.4, з, граничные условия которого удовлетворяют условиям $y(0) = y(l) = 0; y'(0) = y'(l) = 0$.

$$\begin{cases} C_1 + C_4 = 0; \\ C_1 + C_2 l + C_3 \sin kl + C_4 \cos kl = 0; \\ C_2 + C_3 k = 0; \\ C_2 + C_3 k \cos kl - C_4 k \sin kl = 0. \end{cases} \quad (8.22)$$

Откуда

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & l & \sin kl & \cos kl \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k \cos kl & -k \sin kl \end{vmatrix} = 0. \quad (8.23)$$

Раскрывая последний определитель и после ряда преобразований получим: $kl \sin kl = 2 \cdot (1 - \cos kl)$, наименьший корень которого имеет значение $kl = 2\pi$. Следовательно, критическое значение силы P будет

$$P_{кр} = k^2 EJ_x = \frac{\pi^2 EJ_x}{(0.5l)^2} = \frac{4\pi^2 EJ_x}{l^2}. \quad (8.24)$$

8.5 Выражения изгибающих моментов и поперечных сил в концевых сечениях стержней

Следуя статическому критерию, при решении задач устойчивости рамных систем, метод перемещений, наряду с другими классическими методами, является наиболее эффективным методом.

При применении метода перемещений для решения задач устойчивости статически неопределимых рамных стержневых систем, важным этапом является определение выражения внутренних усилий узловых сечениях элементов основной системы, с учетом наличия продольной силы при единичном угловом или линейном смещении узлов основной системы.

В связи с этим для расчета рам на устойчивость необходимо предварительно определить выражение изгибающих моментов и поперечных сил в концевых сечениях стержней при различных концевых условиях их закрепления и одновременном действии продольной сжимающей силы и единичном линейном или угловом смещении одного из концов рассматриваемого стержня.

С этой целью постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 в выражениях (8.8) и (8.9) выразим через начальные параметры y_0, y'_0, M_0, Q_0 стержня, изображенного на рисунке 8.4. С учетом начальных условий, т.е. $y = y_0, y' = y'_0, M_x = M_0, Q_y = Q_0$ при $z = 0$ из (8.8) и (8.9) получим

$$\begin{cases} C_1 + C_4 = y_0; \\ C_2 + C_3 k = y'_0; \\ -k^2 E J_x C_4 = M_0; \\ -k^2 E J_x C_3 = Q_0. \end{cases} \quad (8.25)$$

Откуда, определяя выражения постоянных и подставляя в выражения (8.8) и (8.9), получим:

$$\begin{cases} y = y_0 + y'_0 z + \frac{M_0}{k^2 E J_x} (1 - \cos kz) + \frac{Q_0}{k^3 E J_x} (kz - \sin kz); \\ y' = y'_0 + \frac{M_0}{k E J_x} \sin kz + \frac{Q_0}{k^2 E J_x} (1 - \cos kz); \\ M_x = M_0 \cos kz + \frac{Q_0}{k} \sin kz; \\ Q_y = -M_0 k \sin kz + Q_0 \cos kz. \end{cases} \quad (8.26)$$

Для дальнейшего нужно будет иметь выражения изгибающих моментов и поперечных сил на концевых сечениях стержня при двух вариантах закрепления – жестко защемленного с двумя концами, жестко защемленного на одном конце и шарнирно опертого на другом.

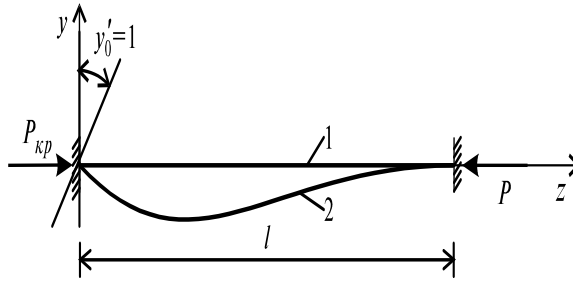


Рисунок 8.5 – Продольный изгиб жестко заземленного стержня при повороте на единичный угол

Подробно рассмотрим стержень, изображенный на рисунке 8.5, при $y'_0 = 1$. Для деформированного состояния (кривая 2) имеем следующие граничные условия: $y_0 = y_l = 0$;
 $y'_0 = 1$; $y'_l = 0$.

С учетом последних условий из первых двух уравнений (8.10) получим

$$\begin{cases} l + \frac{M_0}{k^2 EJ_x} (1 - \cos kl) + \frac{Q_3}{k^3 EJ_x} (kl - \sin kl) = 0; \\ 1 + \frac{M_0}{k EJ_x} \sin kl + \frac{Q_3}{k^2 EJ_x} (1 - \cos kl) = 0. \end{cases} \quad (8.27)$$

Обозначим: $i = \frac{EJ_x}{l}$; $\nu = kl = \sqrt{\frac{Pl^2}{EJ_x}}$;

$$\varphi_1 = \frac{\nu(\operatorname{tg} \nu - \nu)}{8 \operatorname{tg} \nu \left(\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2} \right)}; \quad \varphi_2 = \frac{\nu(\nu - \sin \nu)}{4 \sin \nu \left(\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2} \right)}; \quad \varphi_3 = \frac{\nu^2 \operatorname{tg} \frac{\nu}{2}}{12 \left(\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2} \right)}. \quad (8.28)$$

Решение систем уравнений (4.11) можно записать в следующем виде (значения специальных функций приведены в табл. 8.1):

$$Q_0 = -\frac{6i}{l} \varphi_3(\nu), \quad M_0 = 4i \varphi_1(\nu).$$

Опорные реакции Q_l и M_l на противоположном конце стержня определяются из условия ее равновесия, т.е. $\sum y = 0$; $\sum M_A = 0$. Из первого уравнения получим $Q_0 = -Q_l$, а из второго $M_l = 2i \varphi_2(0)$.

Теперь предположим, что продольная сжимающая сила $P = 0$. В этом случае все расчетные зависимости сильно упрощаются и принимают вид:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 1; \quad M_0 = 4i; \quad M_l = 2i; \quad Q_0 = -\frac{6i}{l}; \quad Q_l = -Q_0.$$

Таблица 8.1

v	$\varphi 1(v)$	$\varphi 2(v)$	$\varphi 3(v)$	$\varphi 4(v)$	$\varphi 7(v)$	$\varphi 8(v)$
0.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.2	0.9986	1.0009	0.9992	0.9959	0.9973	0.9840
0.4	0.9945	1.0026	0.9973	0.9840	0.9893	0.9350
0.6	0.9881	1.0061	0.9941	0.9641	0.9758	0.8558
0.8	0.9787	1.0111	0.9895	0.9362	0.9565	0.7432
1.0	0.9662	1.0172	0.9832	0.8999	0.9313	0.5980
1.2	0.9511	1.0251	0.9756	0.8566	0.8998	0.4198
1.4	0.9329	1.0348	0.9669	0.8025	0.8613	0.2080
1.6	0.9116	1.0463	0.9567	0.7431	0.8152	-0.0381
1.8	0.8871	1.0600	0.9449	0.6749	0.7606	-0.3194
2.0	0.8590	1.0760	0.9313	0.5980	0.6961	-0.6372
2.2	0.8273	1.0946	0.9164	0.5131	0.6202	-0.9932
2.4	0.7915	1.1164	0.8998	0.4198	0.5304	-1.3896
2.6	0.7513	1.1417	0.8814	0.3181	0.4234	-1.8299
2.8	0.7064	1.1712	0.8613	0.2080	0.2944	-2.3189
3.0	0.6560	1.2057	0.8393	0.0983	0.1361	-2.8639
3.2	0.5997	1.2463	0.8153	-0.0380	-0.0635	-3.4769
3.4	0.5366	1.2940	0.7891	-0.1742	-0.3248	-4.1781
3.6	0.4656	1.3508	0.7609	-0.3191	-0.6862	-5.0062
3.8	0.3850	1.4191	0.7297	-0.4736	-1.2303	-7.0436
4.0	0.2933	1.5018	0.6961	-0.6372	-2.1717	-7.5060
4.2	0.1877	1.6036	0.6597	-0.8103	-4.3156	-10.1956
4.4	0.0648	1.7310	0.6202	-0.9931	-15.3271	-21.7815
4.5	-0.0050	1.8070	0.5990	-1.0880	227.9292	222.1820

4.6	-0.0807	1.8933	0.5772	-1.1861	14.6693	7.6160
4.8	-0.2572	2.1056	0.5305	-1.3896	5.4023	-2.2777
5.0	-0.4772	2.3924	0.4793	-1.6040	3.3615	-4.9719
5.2	-0.7630	2.7961	0.4234	-1.8299	2.3986	-6.6147
5.4	-1.1563	3.3989	0.3621	-2.0679	1.7884	-7.9317
5.6	-1.7481	4.3794	0.2944	-2.3189	1.3266	-9.1268
5.8	-2.7777	6.2140	0.2195	-2.5838	0.9302	-10.2831
6.0	-5.1589	10.7270	0.1361	-2.8639	0.5551	-11.4449
6.2	-18.5940	37.3080	0.0424	-3.1609	0.1700	-12.6433

Выражения изгибающих моментов и поперечных сил из (8.10) также сильно упрощаются, учитывая, что при $P \rightarrow 0$ и $k = \sqrt{\frac{P}{EJ_x}} \rightarrow 0$, а в этом случае $\cos kz \rightarrow 1$; $\frac{\sin kz}{kz} \rightarrow 1$, последние два выражения (4.10) принимают общеизвестный вид и записываются следующим образом: $M_x = M_0 + Q_0 z$; $Q_y = Q_0$.

Таблица 8.2

Вид смещения и эпюра М	M0	M1	Q0 = Q1
	$4 i \varphi_1(v)$	$2 i \varphi_2(v)$	$-\frac{6i}{l} \varphi_3(v)$
	$\frac{6i}{l} \varphi_3(v)$	$\frac{6i}{l} \varphi_3(v)$	$\frac{12i}{l^2} \varphi_4(v)$
	$3 i \varphi_7(v)$	0	$-\frac{3i}{l} \varphi_7(v)$

	$\frac{3i}{l} \varphi_7(\nu)$	0	$\frac{3i}{l^3} \varphi_8(\nu)$
<p>Аналитические выражения специальных функций:</p> $\varphi_1 = \frac{\nu(\operatorname{tg} \nu - \nu)}{8 \operatorname{tg} \nu \left(\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2} \right)}; \quad \varphi_2 = \frac{\nu(\nu - \sin \nu)}{4 \sin \nu \left(\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2} \right)}; \quad \varphi_3 = \frac{\nu^2 \operatorname{tg} \frac{\nu}{2}}{12 \left(\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2} \right)};$ $\varphi_4 = \frac{\nu^3}{24 \left(\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2} \right)}; \quad \varphi_7 = \frac{\nu^2 \operatorname{tg} \nu}{24 \left(\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2} \right)}; \quad \varphi_8 = \frac{\nu^3}{3(\operatorname{tg} \nu - \nu)}.$			

Следовательно, при $P \rightarrow 0$ и эпюры внутренних силовых факторов существенно трансформируются. Характер трансформации эпюры M_x при $P \rightarrow 0$ изображен на рисунке 8.6.

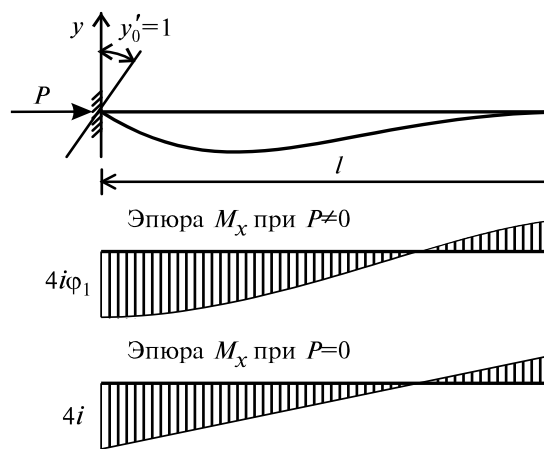


Рисунок 8.6 – Эпюра распределения моментов при продольном изгибе для единичного угла поворота

Результаты аналогичных примеров расчета, т.е. выражения изгибающих моментов и поперечных сил, возникающих в концевых сечениях стержней с различными граничными условиями их закрепления от соответствующих единичных перемещений, приведены в таблице 8.2.

Численные значения специальных функций φ_r ($r = 1, 2, 3, 4, 7, 8$), входящих в выражение изгибающих моментов и поперечных сил, возникающих в концевых сечениях стержней, приведены в таблице 8.1.

Так как в новом равновесном (критическом) состоянии, составные элементы искривляются, следовательно, все неизвестные Z_i заведомо не могут быть равны нулю. Поэтому определитель однородной системы алгебраических уравнений (8.30), составленный из коэффициентов при неизвестных, должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} r_{11}(\nu) & r_{12}(\nu) & \cdots & r_{1n}(\nu) \\ r_{21}(\nu) & r_{22}(\nu) & \cdots & r_{2n}(\nu) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1}(\nu) & r_{n2}(\nu) & \cdots & r_{nn}(\nu) \end{vmatrix} = 0. \quad (8.31)$$

Раскрыв определитель (8.31) и приравняв его нулю, получим трансцендентное уравнение относительно параметра критической нагрузки ν . Решив это уравнение относительно ν , по минимальному значению корня $\nu = \nu_{\min}$ определяют критическое значение внешних сил.

Заключение

В учебно-методическом пособии рассмотрены основные вопросы, касающиеся механики стержневых систем. Однако полный курс дисциплины «Строительная механика» содержит не менее важные разделы для понимания принципов работы строительных конструкций и определение ее надежности в процессе эксплуатации: динамика сооружений; изгиб и кручение тонкостенных стержней; пластины и оболочки; расчет конструкций по методу предельного равновесного состояния; расчет конструкций на надежность, изучение которых не предусмотрено программой для бакалавриата.

Список использованных источников

Основная литература:

1. Шапошников, Н. Н. Строительная механика / Н. Н. Шапошников, Р. Е. Кристалинский, А. В. Дарков. — 15-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 692 с. — Режим доступа: для авториз. пользователей. — Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/322604> (дата обращения: 06.06.2022). — ISBN 978-5-507-45374-0. — Текст: электронный.
2. Кузьмин, Л. Ю. Строительная механика: учебное пособие / Л. Ю. Кузьмин, В. Н. Сергиенко. — 2-е изд., испр. и доп. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 296 с. — Режим доступа: для авториз. пользователей. — Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/212384> (дата обращения: 06.06.2022). — ISBN 978-5-8114-2117-6. — Текст: электронный.
3. Васильков, Г. В. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений: учебное пособие / Г. В. Васильков, З. В. Буйко. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 256 с. — Режим доступа: для авториз. пользователей. — Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/211133> (дата обращения: 15.06.2022). — ISBN 978-5-8114-1334-8. — Текст: электронный.

Дополнительная литература:

1. Иванов, С. П. Строительная механика / С. П. Иванов, О. Г. Иванов; Поволжский государственный технологический университет. — Йошкар-Ола: Поволжский государственный технологический университет, 2018. — 308 с. — Режим доступа: по подписке. — URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=496231> (дата обращения: 07.06.2022). — ISBN 978-5-8158-2019-7. — Текст: электронный.
2. Смирнов, В. А. Строительная механика: учеб. / В. А. Смирнов, А. С. Городецкий; под ред. В. А. Смирнова; Московский архитектурный институт. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: Юрайт, 2013. — 424 с. — ISBN 978-5-9916-2184-7. — Текст: непосредственный.
3. Сеницкий, Ю. Э. Строительная механика для архитекторов: учебник: в 2 томах / Ю. Э. Сеницкий, А. К. Синельник; Самарский государственный архитектурно-строительный университет. — Самара: Самарский государственный архитектурно-строительный университет, 2013. — Том I. — 150 с. — Режим доступа: по подписке. — URL:

<https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=256148> (дата обращения: 15.06.2022). – ISBN 978-5-9585-0551-7. – Текст: электронный.

4. Сеницкий, Ю. Э. Строительная механика для архитекторов: учебник: в 2 томах / Ю. Э. Сеницкий, А. К. Синельник; Самарский государственный архитектурно-строительный университет. – Самара: Самарский государственный архитектурно-строительный университет, 2014. – Том II. – 280 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=256149> (дата обращения: 15.06.2022). – ISBN 978-5-9585-0563-0. – Текст: электронный.

5. Коновалов, А. Ю. Строительная механика: учебное пособие / А. Ю. Коновалов. — Архангельск: САФУ, 2019. — 178 с. — Режим доступа: для авториз. пользователей. — Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/161892> (дата обращения: 15.06.2022). — ISBN 978-5-261-01392-1. — Текст: электронный.

Локальный электронный методический материал

Жанна Григорьевна Концедаева

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Редактор И. Голубева

Локальное электронное издание

Уч.-изд. л. 6,3. Печ. л. 6,3.

Издательство федерального государственного
бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Калининградский государственный технический университет»
236022, Калининград, Советский проспект, 1