Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Н. П. Зубарева

Теория вероятностей и математическая статистика

Учебно-методическое пособие по выполнению контрольной работы
для студентов очно-заочной формы обучения по направлению подготовки
08.03.01 – Строительство

Калининград
Издательство ФГБОУ ВО «КГТУ»
2023

УДК 517

Рецензент:
канд. физ.-мат. наук, и. о. зав. кафедры прикладной математики и информационных технологий Института цифровых технологий ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет»
А. И. Руденко

Зубарева, Н. П.
Теория вероятностей и математическая статистика : Учебно-методическое пособие по выполнению контрольной работы для студентов очно-заочной формы обучения по направлению подготовки 08.03.01 – Строительство / Н. П. Зубарева. – Калининград : Изд-во ФГБОУ ВО «КГТУ», 2023. – 71 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов очно-заочной формы обучения и содержит методические указания по выполнению контрольной работы и решению задач на практических занятиях.

Рис. – 8, табл. – 3, список лит. – 4 наименования

Учебно-методическое пособие рассмотрено и одобрено кафедрой прикладной математики и информационных технологий Института цифровых технологий ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет» 24.05.2023, протокол № 5.

Учебно-методическое пособие рассмотрено и одобрено методической комиссией ученого совета Института морских технологий, энергетики и строительства ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет» 28.06.2023, протокол № 10.

Учебно-методическое пособие рассмотрено и одобрено к печати методической комиссией Института морских технологий, энергетики и строительства ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет» 05.07.2023, протокол № 8.

УДК 517

Оглавление

Введение

Дисциплина «**Теория вероятностей и математическая статистика**» по программе бакалавриата 08.03.01 – Строительство по профилям «Промышленное и гражданское строительство», «Водоснабжение и водоотведение», «Теплогазоснабжение и вентиляция» по учебному плану изучается студентами очно-заочной формы обучения в третьем семестре, входит в состав базовой части образовательной программы направлений подготовки бакалавров. Итоговая аттестация по дисциплине – экзамен.

Целью освоения дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» является выработка способности студента решать задачи профессиональной деятельности и обработки расчётных и экспериментальных данных вероятностно-статистическими методами на основе использования теоретических и практических основ данной дисциплины.

В результате изучения дисциплины студент должен

знать: методы обработки расчётных и экспериментальных данных вероятностно-статистическим аппаратом;

уметь: обрабатывать расчётные и экспериментальные данные вероятностно-статистическими методами;

владеть: навыками решения задач профессиональной деятельности на основе расчётных и экспериментальных данных.

Предлагаемое учебное пособие предназначено для оказания помощи студентам очно-заочной формы обучения в решении контрольной работы и выполнении практических заданий и содержит методические указания по выполнению контрольной работы и решению задач на практических занятиях. Цель пособия – научить студентов решать вероятностные задачи, сформировать у них основы математического подхода к исследованию задач, показать применение вероятностно-статистических методов при решении прикладных задач. Особенностью данного пособия является то, что в краткой форме изложен основной теоретический материал по основным разделам и темам в соответствии с учебной программой дисциплины. Рассматриваемые в пособии примеры и задачи даны с подробным анализом и подобраны так, что их условия соответствуют заданиям, входящим в перечень заданий контрольной работы для самостоятельного выполнения студентами.

Рассматриваемые в пособии задачи – типовые и подобраны так, что их условия соответствуют задачам, которые могут быть решены на практических занятиях и входить в задания экзамена; методический материал по выполнению практических заданий приведён в виде примеров решения предлагаемых студентам задач.

Установлены критерии оценивания преподавателем выполненной студентом контрольной работы и выставления итоговых оценок по дисциплине; приведён список рекомендуемой литературы для самостоятельного и полного изучения дисциплины. Студенту рекомендуется ответить на вопросы самопроверки.

Данное пособие поможет освоить учебный материал данной дисциплины и студентам дневной и заочной форм обучения всех специальностей.

I. Перечень теоретических вопросов к экзамену

1. Основные формулы комбинаторики: размещения, перестановки, сочетания.
2. Виды случайных событий.
3. Классическое определение вероятности события.
4. Теоремы сложения вероятностей несовместных событий.
5. Теорема умножения вероятностей независимых событий.
6. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей зависимых событий.
7. Теорема сложения вероятностей совместных событий.
8. Вероятность появления хотя бы одного события.
9. Формула полной вероятности.
10. Теорема гипотез. Формула Бейеса.
11. Повторение испытаний. Формула Бернулли.
12. Локальная теорема Лапласа.
13. Распределение Пуассона.
14. Интегральная теорема Лапласа.
15. Относительная частота появления события.
16. Вероятность отклонения относительной частоты от теоретической вероятности.
17. Случайные величины. Дискретные и непрерывные случайные величины.
18. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины.
19. Ряд и многоугольник распределения.
20. Числовые характеристики дискретных случайных величин.
21. Математическое ожидание дискретной случайной величины, его свойства.
22. Математическое ожидание числа появлений события в независимых испытаниях.
23. Отклонение случайной величины от её математического ожидания.

24. Дисперсия дискретной случайной величины, её свойства. Формула для вычисления дисперсии.

25. Дисперсия числа появления события в независимых испытаниях.

26. Среднее квадратическое отклонение.

27. Функция распределения случайной величины, её свойства. Построение графика.

28. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины, её свойства.

29. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал.

30. Нахождение функции распределения по известной плотности распределения.

31. Показательное распределение.

32. Биноминальное распределение.

33. Закон равномерного распределения вероятностей.

34. Числовые характеристики непрерывных случайных величин.

35. Нормальное распределение, его математическое ожидание, дисперсия.

36. Нормальная кривая.

37. Вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины.

38. Вычисление вероятности заданного отклонения.

39. Правило трёх сигм.

40. Генеральная и выборочная совокупность. Повторная и бесповторная выборки.

41. Статистическое распределение выборки.

42. Эмпирическая функция распределения.

43. Полигон и гистограмма.

44. Статистические оценки параметров распределения.

45. Несмещённые, эффективные и состоятельные оценки.

46. Генеральная средняя. Выборочная средняя. Групповая и общая средние.

47. Генеральная дисперсия. Выборочная дисперсия.

48. Формула для вычисления дисперсии.

49. Оценка генеральной дисперсии по исправленной выборочной.

50. Точность оценки, доверительная вероятность (надёжность). Доверительный интервал.

51. Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при известном δ.

52. Мода, медиана.
53. Эмпирические моменты.
54. Асимметрия и эксцесс эмпирического распределения.
55. Статистические оценки статистических гипотез.
56. Система двух случайных величина.
57. Числовые характеристики системы двух случайных величин. Корреляционный момент, коэффициент корреляции.
58. Линейная регрессия.

II. Критерии оценки

Студент должен после выполнения заданий контрольной работы, получения рецензии преподавателя на работу студента и исправления ошибок, допущенных студентом при выполнении работы, побеседовать с преподавателем по выполнению заданий – «защитить» работу. *К сдаче экзамена* допускаются студенты, «защитившие» выполненную работу.

Критерии выставления итоговых оценок по дисциплине

Экзаменационные билеты содержат по два теоретических вопроса и три практических задания.

При ответе студента на экзамене учитываются:
- содержательность ответа на поставленные в билете вопросы;
- логика изложения учебного материала: последовательность, выделение главного, доказательность выбора и обобщения.

Система оценивания ответа студента на экзамене:
- оценка «отлично» – ответ на все пять задания билета полный, правильный, понимание учебного материала по предмету студентом глубокое, изложение логично, доказательно, выводы и обобщения точны, связаны с областью будущей специальности;
- оценка «хорошо» – ответ удовлетворяет вышеназванным требованиям, но изложение недостаточно систематизировано, отдельные умения недостаточно устойчивы, в определении понятий, в выводах и обобщениях имеются отдельные неточности, которые легко исправимы с помощью дополнительных вопросов преподавателя;
- оценка «удовлетворительно» – ответ обнаруживает понимание основных положений излагаемого материала, однако наблюдается значительная неполнота знаний; определения понятий нечёткие, умения сформированы недостаточно, выводы и обобщения аргументированы слабо, в ответах допускаются ошибки;

- оценка «неудовлетворительно» – ответ неправильный, показывает незнание основного материала, грубые ошибки в определении понятий, неумение работать с источниками, отказ отвечать по билету.

Методические указания по оформлению контрольной работы

Работа выполняется студентом в отдельной тонкой тетради с полями. Решения заданий студент в тетрадь должен записать в порядке возрастания номеров заданий. Выполненные задания должны содержать условие задачи и решение заданий со всеми необходимыми расчётами и пояснениями.

Студент должен оформить титульный лист работы по образцу (смотри Приложение 3). Студент должен предусмотреть свободную страницу в тетради для замечаний преподавателя по допущенным ошибкам в выполнении заданий и для выполнения работы над ошибками.

III. Задания контрольной работы

Студент должен выполнять работу по варианту.

Таблица 1: Номера задач для выполнения заданий по вариантам.

Вариант	**Номера задач**				
1	1	11	21	31	41
2	2	12	22	32	42
3	3	13	23	33	43
4	4	14	24	34	44
5	5	15	25	35	45
6	6	16	26	36	46
7	7	17	27	37	47
8	8	18	28	38	48
9	9	19	29	39	49
10	10	20	30	40	50

Задачи для контрольной работы

Задачи № 1–10

Задача 1. В каждой из двух урн содержится 6 черных и 4 белых шаров. Из первой урны наудачу извлечён один шар и переложен во вторую. Найти вероятность того, что шар, извлечённый из второй урны, окажется черным.

Задача 2. В каждой из двух урн содержится 8 черных и 2 белых шара. Из второй урны наудачу извлечён один шар и переложен в первую. Найти вероятность того, что шар, извлечённый из первой урны, окажется черным.

Задача 3. Три стрелка произвели залп по цели. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,7; для второго и третьего стрелков эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что:
1) только один из стрелков поразит цель;
2) только два стрелка поразят цель;
3) все три стрелка поразят цель.

Задача 4. Студент знает 40 из 50 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает 2 вопроса, содержащиеся в его экзаменационном билете.

Задача 5. Две команды по 20 спортсменов производят жеребьёвку для присвоения номеров участникам соревнований. Два брата входят в состав различных команд. Найти вероятность того, что братья будут участвовать в соревновании под одним и тем же номером 18.

Задача 6. Вероятность хотя бы одного попадания при двух выстрелах равна 0,99. Найти вероятность четырёх попаданий при пяти выстрелах.

Задача 7. От аэровокзала отправились 2 автобуса-экспресса к трапам самолётов. Вероятность своевременного прибытия каждого автобуса в аэропорт равна 0,95. Найти вероятность того, что:

1) оба автобуса прибудут вовремя;
2) оба автобуса опоздают;
3) только один автобус прибудет вовремя;
4) хотя бы один автобус прибудет вовремя.

Задача 8. Вероятность появления событий в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что событие наступит 60 раз в 100 испытаниях.

Задача 9. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти вероятность того, что в 100 испытаниях событие появится не менее 20 и не более 30 раз.

Задача 10. Вероятность наступления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероятностью 0,95 можно было ожидать отклонение относительной частоты появления события от его вероятности не больше чем на 0,04.

Задачи № 11–20

На заводе имеются **N** цехов. Вероятность того, что некачественная деталь отсутствует в этих цехах, одинакова и равна **p**. Составить закон распределения числа цехов, на которых искомая деталь отсутствует в данный момент. Построить многоугольник распределения. Найти дисперсию и среднеквадратичное отклонение числа цехов, на которых искомая деталь отсутствует в данный момент.

Задачи	**N**	**p**
11	3	0,2
12	4	0,25
13	3	0,1
14	2	0,2
15	4	0,1
16	3	0,2
17	4	0,3
18	3	0,11
19	3	0,12
20	4	0,3

Задачи № 21–30

Дискретная случайная величина X может принимать только два значения: x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1 возможного значения x_1, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсия $D(X)$. Найти закон распределения этой случайной величины.

Задачи	Значение **p_1**	Математическое ожидание **M(X)**	Дисперсия **D(X)**
21	0,1	3,9	0,09
22	0,3	3,7	0,21
23	0,5	3,5	0,25
24	0,7	3,3	0,21
25	0,9	3,1	0,09
26	0,9	2,2	0,36
27	0,8	3,2	0,16
28	0,6	3,4	0,24
29	0,4	3,5	0,24
30	0,2	3,8	0,16

Задачи № 31–40

Случайная величина X задана интегральной функцией (функцией распределения) F(x). Требуется:

1) найти дифференциальную функцию (плотность вероятности);

2) найти математическое ожидание **M(X)** и дисперсию **D(X)** случайной величины X;

3) построить графики интегральной и дифференциальной функций.

Задача	F(x)	**Задача**	F(x)
31	$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{81} \text{ при } 0 < x \le 9 \\ 1 \text{ при } x > 9 \end{cases}$	**32**	
33	$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{49} \text{ при } 0 < x \le 7 \\ 1 \text{ при } x > 7 \end{cases}$	**34**	

F $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{36} \text{ при } 0 < x \le 6 \\ 1 \text{ при } x>6 \end{cases}$

35		**36**	

$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{9} \text{ при } 0 < x \le 3 \\ 1 \text{ при } x>3 \end{cases}$

37		**38**	

$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0 \\ x^2 \text{ при } 0 < x \le 1 \\ 1 \text{ при } x >1 \end{cases}$

39		**40**	

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{4} \text{ при } 0 < x \le 2 \\ 1 \text{ при } x > 2 \end{cases}$$

Задачи № 41–50

Заданы среднее квадратическое отклонение **σ** нормально-распределённой случайной величины **X**, выборочная средняя $\overline{x}$, объем выборки ***n***. Найти доверительные интервалы для оценки неизвестного математического ожидания ***a*** с заданной надёжностью **γ=0,95**.

Задачи	Среднее квадратическое отклонение **σ**	Выборочная средняя $\overline{x}$	Объем выборки ***n***
41	10	18,21	16
42	9	18,31	49
43	8	18,41	36
44	7	18,51	100
45	6	18,61	81
46	10	18,71	25
47	9	18,81	16
48	8	18,91	49
49	7	20,01	36
50	6	20,11	64

IV. Теоретический материал к контрольной работе

Глава 1. Теория вероятностей

1.1. Основной справочный материал. Общие понятия

1.1.1. Что изучает теория вероятностей

Теория вероятностей изучает *вероятностные закономерности* массовых однородных *случайных событий*. То есть у неё нет цели что-либо угадать, например результат броска монеты в единичном эксперименте. Однако если одну и ту же монету в одинаковых условиях подбрасывать *сотни и тысячи раз*, то будет прослеживаться чёткая закономерность, описываемая вполне жёсткими законами.

Теория вероятностей является одним из основных методов исследования в экономике, естествознании, технике и других науках. Вопросы организации и планирования производства также связаны с необходимостью учёта случайных событий и, следовательно, не могут быть решены без применения теории вероятностей. Теория вероятностей развилась из потребностей практики, и её аксиомы и теоремы в абстрактной форме отражают закономерности, присущие случайным событиям массового характера, т.е. событиям, которые могут произойти, но могут и не произойти по причинам, не поддающимся непосредственному учёту в данных условиях. Изучение количественных закономерностей, которым подчиняются массовые случайные события, и составляет предмет теории вероятностей.

1.1.2. Основные термины теории вероятностей

События бывают *достоверными*, *невозможными* и *случайными*.

Достоверным называют событие, которое в результате *испытания* (*осуществления определённых действий*, *определённого комплекса условий*) *обязательно произойдёт*.

Например, в условиях земного тяготения подброшенная монета непременно упадёт вниз.

Невозможным называют событие, которое *заведомо не произойдёт* в результате испытания.

Пример невозможного события: в условиях земного тяготения подброшенная монета улетит вверх.

Событие называется ***случайным***, если в результате испытания оно может, *как произойти, так и не произойти***.** Случайное событие – есть следствие случайных факторов, воздействие которых предугадать невозможно или крайне затруднительно.

Например, в результате броска монеты выпадет «герб» («орёл»). В рассмотренном случае случайные факторы – это форма и физические характеристики монеты, сила, направление броска, сопротивление воздуха и т.д.

Любой результат испытания называется ***исходом***, который, собственно, и представляет собой появление определённого события. В частности, при подбрасывании монеты возможны 2 исхода (случайных события): выпадет герб» («орёл»), выпадет цифра («решка»). Естественно, подразумевается, что данное испытание проводится в таких условиях, что монета не может встать на ребро или, скажем, зависнуть в невесомости.

События (любые) *обозначают* большими латинскими буквами А, В, С, … либо теми же буквами с подстрочными индексами, например A_1, A_2, A_3,…

Другая важная характеристика событий – это их *равновозможность*. Два или большее количество событий называют ***равновозможными***, если ни одно из них не является более возможным, чем другие.

1.1.3. Совместные и несовместные события. Противоположные события. Полная группа событий

События называют ***несовместными***, если **в одном и том же испытании** появление одного из событий **исключает** появление других событий. Простейшим примером несовместных событий является пара *противоположных* событий. *Событие*, *противоположное данному*, обычно обозначается той же латинской буквой с чёрточкой вверху. Например,

A_1 – в результате броска монеты выпадет орёл;

$\bar{A}_1$ – в результате того же броска монеты выпадет решка (цифра).

Совершено ясно, что *в одном испытании* (при одном броске) появление орла исключает появление решки (и наоборот), поэтому данные события и называются *несовместными.*

Множество несовместных событий образуют ***полную группу событий***, если в результате *отдельно взятого испытания обязательно появится одно из этих событий.*

События называются ***совместными***, если *в отдельно взятом испытании появление одного из них не исключает* появление другого.

Событие **В** называется ***зависимым от события А***, если помимо случайных факторов его вероятность зависит от появления либо не появления события **А**.

Вероятность события **В**, вычисленная в предположении того, что событие **А** уже произошло, называется ***условной вероятностью наступления события***

B и обозначается через $\mathbf{P_A}$ **(B)**. При этом события **A** и **B** называют зависимыми событиями (*хотя зависимо только одно из них*).

В некоторых учебниках вероятность события **B**, вычисленная в предположении того, что событие **A** уже произошло, обозначают **P(B/A)**.

1.1.4. *Сочетания*

Соединениями называют различные группы, составленные из каких-либо объектов.

Элементами называют объекты, из которых составлены соединения.

Сочетаниями из n элементов по m *(m ≤ n)* называют соединения, в каждое из которых входит *m* элементов, взятых из данных *n* элементов, и которые **отличаются только элементами (хотя бы одним)**.

Иными словами, отдельно взятое сочетание – это уникальная выборка из *m* элементов, в которой **не важен их порядок** (расположение). Число различных **сочетаний из n элементов по *m*** обозначается символом $\boldsymbol{C_n^m}$.

Общее же количество таких уникальных сочетаний рассчитывается по

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\cdot m!}$$

формуле:

Задача 1. В ящике находится 15 деталей. Сколькими способами можно взять 4 детали?

Решение:

Прежде всего снова обращаю внимание на то, что, по логике условия, детали считаются *различными* – даже если они на самом деле однотипны и визуально одинаковы (*в этом случае их можно*, *например*, *пронумеровать*).

В задаче речь идёт о выборке из 4-х деталей, в которой не имеет значения их «дальнейшая судьба» – грубо говоря, «просто выбрали 4 штуки и всё». Таким образом, у нас имеют место *сочетания* деталей. Считаем их количество:

$$C_{15}^4 = \frac{15!}{(15-4)!\cdot 4!} = \frac{15!}{11!\cdot 4!} = (*)$$

Здесь, конечно же, не нужно «ворочать» огромные числа

$11! = 39916800, \quad 15! = 1307674368000$

Распишу подробно:

$$(*) = \frac{11!\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{11!\cdot 4!} = \frac{12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{4!} = \frac{12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{24} = 1365$$

1365 способами можно взять 4 детали из ящика с пятнадцатью деталями. Что это значит? Это значит, что из набора 15-ти различных деталей можно составить *одну тысячу триста шестьдесят пять уникальных* сочетания 4-х деталей. То есть каждая такая комбинация из 4-х деталей будет отличаться от других комбинаций хотя бы одной деталью.

Ответ: 1365 способами.

1.1.5. Вероятность события

Классическое определение вероятности

Вероятностью наступления события А в некотором испытании называют отношение

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где **n** – общее число всех **равновозможных**, **элементарных** исходов этого испытания, которые образуют **полную группу событий**; **m** – количество **элементарных** исходов, ***благоприятствующих*** событию А.

Принято считать, что вероятность может изменяться в пределах

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

При этом:

если P(A) = 0, то событие А является ***невозможным***;

если P(A) = 1, то ***достоверным***;

а если 0 <P(A)<1, то речь идёт о ***случайном*** **событии**.

Задача 2. В урне 5 черных и 3 белых шара. Найти вероятность того, что вынут белый шар в одном испытании.

Решение:

Пусть событие А – извлечение из урны белого шара.

Всех возможных исходов (случаев) опыта: n = 5 + 3 = 8.

Случаев, благоприятствующих выборке одного белого шара: m = 3.

Следовательно, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{8}$

Ответ: Вероятность того, что из урны вынут белый шар, равна 3/8.

1.2. Основные теоремы

1.2.1. Сумма вероятностей событий, образующих полную группу

Теорема 1. Сумма вероятностей событий, которые образуют полную группу, равна единице.

Если события образуют полную группу, то со 100 %-й вероятностью какое-то из них произойдёт.

Равновозможные события называют ***равновероятными***.

Вероятность противоположного события стандартно обозначается строчной буквой **q**.

Например, если p = 0,7 – вероятность того, что стрелок попадёт в цель, то q = 1 – p = 1 – 0,7 = 0,3 – вероятность того, что он промахнётся.

1.2.2. Теоремы сложения вероятностей

*Операция **сложения событий** означает логическую связку «**ИЛИ**».*

Суммой (объединением) двух событий A и B называется событие **C**, состоящее в появлении *или события A*, *или события B*, *или обоих этих событий*.

События называют ***несовместными***, если *в одном и том же испытании* появление одного из событий *исключает появление других событий.*

Теорема 2. Сложение вероятностей *несовместных* событий

Вероятность появления одного из двух ***несовместных*** событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A)+P(B)$$

Следствие 1. Вероятность появления *одного из нескольких попарно несовместных событий*, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P\,(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P\,(A_1) + P\,(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Следствие 2. *Сумма вероятностей событий A_1, A_2, ..., A_n*, образующих ***полную группу,*** *равна единице:* $P\,(A_1) + P\,(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$.

Следствие 3. Сумма вероятностей **противоположных событий** равна единице:

$$P(A_0)+P(\bar{A}_0)=1$$

Задача 3. В шляпе содержатся 30 шаров: 5 синих, 15 белых и 10 красных. Найти вероятность извлечения цветного шара.

Решение:

Появление цветного шара означает появление либо красного, либо синего. Всего шаров 30. Вероятность появления синего шара (событие А):

$$P(A) = 5/30 = 1/6.$$

Вероятность появления красного шара (событие В):

$$P(B) = 10/30 = 1/3.$$

Событие *А и В несовместны* (появление шара одного цвета исключает появление шара другого цвета, так как испытание производят один раз), поэтому искомая вероятность

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = 1/6 + 1/3 = 1/2.$$

Эту же задачу можно решить иначе:

Решение (второй способ): Всего шаров 30. Цветных шаров –15. Вероятность извлечения цветного шара равна $P(A+B) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$

Ответ: Вероятность извлечения цветного шара равна 1/2.

События называются **совместными**, если в отдельно взятом испытании **появление одного из них не исключает появление другого**.

Теорема 3. Сложение вероятностей *совместных* событий

Вероятность появления **хотя бы одного *из двух совместных*** событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$\mathbf{P\ (A+B) = P\ (A) + P(B) - P(AB).}$$

Замечание 1. При использовании полученной формулы следует иметь в виду, что события **А** и **В** могут быть как независимыми, так и зависимыми.

Для **независимых** событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B).$$

Для **зависимых событий**:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P_A(B).$$

Следствие 4. Теорема 3 может быть обобщена на любое конечное число **совместных событий.** Например, **для трех совместных событий**:

$$\boldsymbol{P\ (A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).}$$

1.2.3. Теоремы умножения вероятностей

Операция ***умножения событий означает логическую связку «И»***.

Произведением двух событий **A** и **B** называют событие **AB**, которое состоит **в совместном появлении этих событий**, иными словами, умножение **AB** означает, что при некоторых обстоятельствах наступит **и** событие **A**, **и** событие **B**.

Теорема 4. Умножение вероятностей. **Вероятность** ***совместного*** появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$$

$$\text{или} \quad P(AB) = P(B) \cdot P_B(A).$$

Следствие 5. Вероятность **совместного появления нескольких событий** равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причём вероятность каждого последующего события вычисляют в предположении, что все предыдущие события уже наступили:

$$P(A_1 A_2 A_3 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P_{A1}(A_2) \cdot P_{A1A2}(A_3) \ldots P_{A1A2 \ldots A\,n-1}(A_n),$$

где $P_{A1A2} \ldots A_{n-1}(A_n)$ – вероятность события A_n, вычисленная в предположении, что события $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ наступили.

Следствие 6. Для независимых событий $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$, т.е. вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Следствие 7. Вероятность совместного появления нескольких **независимых событий** равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \ldots P(A_n).$$

Задача 4. В первом ящике 2 детали нестандартные и 10 стандартных. Во втором ящике 8 нестандартных и 4 стандартных. Из каждого ящика вынули по одной детали. Какова вероятность, что обе детали не будут стандартными (то есть будут *нестандартные*)?

Решение:

Пусть событие A – появление нестандартной детали из первого ящика.

Событие В – появление нестандартной детали из второго ящика.

События А и В – независимые (деталь из второго ящика доставали вне зависимости от того, какую из деталей достали из первого ящика): для независимых событий $P\,(AB) = P\,(A) \cdot P\,(B)$, вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению этих событий.

Имеем:

В первом ящике 12 деталей, вероятность появления нестандартной детали из первого ящика равна

$$P(A) = \frac{2}{12} = 1/6\ ;$$

Во втором ящике 12 деталей, вероятность появления нестандартной детали из второго ящика равна

$$P(B) = \frac{8}{12} = 2/3.$$

Для независимых событий вероятность их совмещения равна произведению их вероятностей:

$$P(AB) = P(A)\,P(B) = \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9}\ .$$

Ответ: Искомая вероятность равна 1/9.

1.2.4. Вероятность появления хотя бы одного события

Пусть события $\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots, A_n}$ **независимы** в совокупности, причём вероятности этих событий $\mathbf{P\,(A_1) = p_1}$, $\mathbf{P(A_2) = p_2, \ldots, P\,(A_n) = p_n}$. Вероятности событий, противоположных событиям A_1, A_2, …, A_n, обозначим $\mathbf{q_1}$, $\mathbf{q_2}$, **…,** $\mathbf{q_n}$. Пусть в результате испытания могут наступить все события, либо часть из них, либо ни одно из них.

Теорема 5. Вероятность наступления события $\boldsymbol{A}$, состоящего в появлении **хотя бы одного из событий** $\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots, A_n}$, **независимых** в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots, A_n}$:

$$\boldsymbol{P(A) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n}.$$

Следствие 7. В частности, если все $\boldsymbol{n}$ событий имеют одинаковую вероятность, равную $\boldsymbol{p}$, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий:

$$P(A)=1-q^n$$

Задача 5. Вероятность попадания стрелком в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что мишень будет поражена хотя бы один раз при трех выстрелах.

Решение:

Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна p=0,8, а тогда вероятность промаха равна q = 1- 0,8= 0,2.

Выстрелов было произведено три, т. е. n = 3 .

Вероятность того, что мишень будет поражена хотя бы один раз при трех выстрелах, равна:

$$P(A) = 1 - q^3 = 1 - (0{,}2)^3 = 1 - 0{,}008 = 0{,}992.$$

Ответ: Вероятность того, что мишень будет поражена хотя бы один раз при трех выстрелах, равна 0,992.

Задача 6. Вероятность хотя бы одного попадания стрелком в мишень при трех выстрелах равна 0,973. Найти вероятность попадания при одном выстреле.

Решение:

Вероятность попадания в мишень хотя бы раз при одном из трех выстрелов (событие A) равна

$$P(A) = 1 - q^3,$$

где q – вероятность промаха.

По условию Р (А) = 0,973.

Следовательно, 0,973 = 1 – q^3 , находим q:

$$q^3 = 1 - 0{,}973 = 0{,}027$$

$$q=\sqrt[3]{0{,}027}=0{,}3$$

Отсюда q =0,3. Сумма вероятностей событий, которые образуют полную группу, равна единице. Вероятность попадания при одном выстреле:

$$p = 1 - q = 1 - 0{,}3 = 0{,}7.$$

Ответ**:** р=0,7.

1.2.5. Формула полной вероятности

Вероятность события A, **которое может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий** (гипотез) $H_1, H_2, \ldots, H_n$,

образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события ***A*** :

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H2}(A) + \ldots + P(H_n) \cdot P_{Hn}(A) \quad (*)$$

$$\text{где} \quad P(H_1) + P(H_2) + \ldots + P(H_n) = 1.$$

Равенство **(*)** называют ***формулой полной вероятности***.

Задача 7. Азотное удобрение поступает на склад хозяйства из пункта 1 и из пункта 2, причём из 1-го пункта в 2 раза больше, чем из 2-го. Вероятность события – удобрение из первого пункта удовлетворяет стандарту равна 0,9, а соответствующая вероятность для второго пункта равна 0,7. Определить вероятность события ***A*** **–** что взятое для пробы на складе хозяйства удобрение удовлетворяет стандарту.

Решение:

Обозначим: событие ***A*** **–** взятое для пробы на складе хозяйства удобрение удовлетворяет стандарту;

событие B_1 – удобрение поступило из пункта 1;

событие B_2 – удобрение поступило из пункта 2.

Находим вероятности поступления удобрений соответственно из пунктов B_1 и B_2. Общее количество удобрений в частях равно:

1 часть + 2 части = 3 части.

Вероятность того, что удобрение поступило из пункта 1 равна $P(B_1) = 2/3$, а из пункта 2 равна $P(B_2) = 1/3$.

Удобрение поступило из 1-го пункта и удовлетворяет стандарту – обозначим $P_{B1}(A) = 0{,}9$.

Удобрение поступило из 2-го пункта и удовлетворяет стандарту – обозначим $P_{B2}(A) = 0{,}7$.

Вероятность события **A**: $\mathbf{P(A) = P(B_1)\, P_{B1}(A) + P(B_2)\, P_{B2}(A)}$**,**

$$P(A) = \frac{2}{3} \cdot 0{,}9 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}8 = 0{,}8333$$

Событие ***A*** имеет вероятность 0,8333. Это значит, что в среднем в 83 случаях из 100 проба удобрения отвечает стандарту.

Ответ: 0,8333.

1.3. Повторение испытаний

1.3.1. Формула Бернулли

Если производятся испытания, при которых вероятность появления события A в каждом испытании **не зависит от исходов других испытаний**, то такие испытания называют ***независимыми относительно события A***.

Формула Бернулли. Вероятность того, что в ***n*** **независимых** испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0 \le p \le 1)$, **событие наступит ровно** ***k*** **раз** (безразлично, в какой последовательности), равна

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

или

$$P_n(k) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} p^k q^{n-k}$$

где $q = 1 - p$.

Вероятность того, что в n испытаниях **событие наступит** ***менее k раз:***

$$P_n(k) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k-1);$$

Вероятность того, что в n испытаниях **событие наступит** ***более k раз:***

$$P_n(k) = P_n(k+1) + P_n(k+2) + \ldots + P_n(n);$$

Вероятность того, что в n испытаниях **событие наступит** ***не менее k раз:***

$$P_n(k) = P_n(k) + P_n(k+1) + \ldots + P_n(n);$$

Вероятность того, что в n испытаниях **событие наступит** ***не более k раз:***

$$P_n(k) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k).$$

Задача 8. Монету бросают шесть раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет: а) ровно два раза; б) менее двух раз; в) не менее двух раз.

Решение:

Вероятность того, что выпадет «герб», равна $\mathbf{p} = \frac{1}{2} = \mathbf{0.5}$, вероятность того, что не выпадет «герб» (т. е. выпадет цифра), равна $\mathbf{q = 1 - p = 0.5}$.

Монету бросают шесть раз, значит $\mathbf{n = 6}$.

Применим формулу Бернулли:

а) вероятность того, что «герб» выпадет *ровно два раза* в шести испытаниях:

n= 6, k= 2.

$$P_6(2)=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}p^k\cdot q^{n-k}=\frac{6!}{(6-2)!\cdot 2!}\cdot 0{,}5^2\cdot 0.5^{6-2}=\frac{4!\cdot 5\cdot 6}{4!\cdot 2}0{,}5^2\cdot 0{,}5^4=15\cdot 0{,}015625=0{,}2344$$

б) вероятность того, что «герб» выпадет *менее двух раз*.

Менее двух раз означает или ни разу, или один раз в шести испытаниях:

$$\mathbf{P_6\ (k<2) = P_6\ (0) + P_6\ (1)}$$

$$P_6(0)+P_6(1) = \frac{6!}{6!}\cdot 0{,}5^0 0{,}5^{6-0} + \frac{6!}{(6-1)!1!}\cdot 0.5^1 0{,}5^5 = 0{,}5^6+6\cdot 0{,}5^6=\frac{7}{64}=0{,}1094$$

Примечание: 0!= 1;

в) вероятность того, что «герб» выпадет *не менее двух раз*, можно вычислить как сумму событий: может выпасть и два раза, и три раза, и четыре и пять раз и шесть из шести попыток:

$$\boldsymbol{P_6\ (k\geq 2\ ) = P_6\ (2) + P_6\ (3) + P_6\ (4) + P_6\ (5) + P_6\ (6)}$$

или это же можно вычислить как разность между единицей и вероятность того, что «герб» выпадет *менее двух раз*:

$$\mathbf{P_6\ (k\geq 2) = 1 -} \boldsymbol{P_6\ (k<2)} = 1 - 0{,}1094 = 0{,}8906.$$

Ответ: Вероятность того, что герб выпадает ровно два раза, равна 0,2344, менее двух раз 0,1094, не менее двух раз равна 0,8906.

1.3.2. Локальная и интегральная теоремы Лапласа

Для больших значений ***n*** *и* ***k*** формулой Бернулли $P_n\ (k) = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}p^k q^{n-k}$ для вычисления вероятности того, что **событие наступит ровно *k* раз**, пользоваться затруднительно.

Для этих случаев используют локальную теорему Лапласа.

Теорема 6. ***Локальная теорема Лапласа***

Вероятность того, что в ***n независимых*** *испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна* ***p, событие наступит ровно k раз*** *(безразлично, в какой последовательности), приближённо равна (тем точнее, чем больше* ***n****):*

$$\boldsymbol{P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)},$$

где $\boldsymbol{\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x2}{2}}}$, $\boldsymbol{x}=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ где $\boldsymbol{0 < p < 1}$.

Таблица функции ***φ (x)*** для положительных значений ***x*** приведена в *Приложении 1*. Для отрицательных значений ***x*** пользуются этой же таблицей, так как функция ***φ (x)*** чётная, ***φ (- x)*** = ***φ (x)***.

В таблице есть значения **x** от x= 0 до x= 3,99.

Для значений x> 3,99 принимаем **φ (x) =0**.

Таблица функции ***φ (x)*** приведена полностью в конце данного пособия. Для пояснения приведена выдержка из таблицы:

Например, x=0,35 , тогда φ (0,35) = 0,3752;

x= 0,26 , тогда φ (0,26) =0,3857.

Приложение 1. Таблица значений функции φ(x)

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

Таблица 2: Таблица значений функции φ(x)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3508	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352

φ (- 0,08) = φ (0,08) = 0,3977

Задача 9. Найти вероятность того, что событие ***A*** наступит 1200 раз в 2500 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,5.

Решение:

Так как ***n*** велико, воспользуемся локальной теоремой Лапласа:

$$\boldsymbol{P_n(k)} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x).$$

По условию задачи k=1200, n= 2500, p =0,5, q =1- p =0,5.

Вычислим x:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1200 - 2500 \cdot 0{,}5}{\sqrt{2500 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = \frac{1200 - 1250}{\sqrt{625}} = \frac{50}{25} = 2.$$

В таблице Приложения 1 найдём φ (2) = 0,0540.

Вычисляем вероятность:

$$\boldsymbol{P_{2500}(1200)} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2500 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} \cdot 0{,}0540 = \frac{1}{25} \cdot 0{,}0540 = 0{,}00216.$$

Ответ: Вероятность того, что событие А наступит ровно 1200 раз в 2500 испытаниях, равна 0,00216, то есть практически равна нулю.

Теорема 7. Интегральная теорема Лапласа

Вероятность того, что в ***n независимых*** *событиях, в каждом из которых вероятность появления события равна* ***p(0<p<1)****, событие* ***наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз****, приближённо равна*

$$P(k_1 ; k_2) = \Phi(x)'' - \Phi(x'),$$

где $\boldsymbol{\Phi(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-z^2}{2}} \cdot dz$ – функция Лапласа,

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, \quad 0 < p < 1.$$

Таблица функции Лапласа для положительных значений x **(0 ≤ x ≤ 5)** приведена в Приложении 2 в конце этого пособия. Выписка из Приложения 2:

Приложение 2. Таблица значений функции Ф(x)

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}} d$$

Таблица 3: Таблица значений функции Ф(x)

x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)
0,00	0,0000	0,23	0,0910	0,46	0,1772	0,69	0,2549
0,01	0,0040	0,24	0,0948	0,47	0,1808	0,70	0,2580
0,02	0,0080	0,25	0,0987	0,48	0,1844	0,71	0,2611
0,03	0,0120	0,26	0,1026	0,49	0,1879	0,72	0,2642
0,04	0,0160	0,27	0,1064	0,50	0,1915	0,73	0,2673
0,05	0,0199	0,28	0,1103	0,51	0,1950	0,74	0,2703
0,06	0,0239	0,29	0,1141	0,52	0,1985	0,75	0,2734
0,07	0,0279	0,30	0,1179	0,53	0,2019	0,76	0,2764
0,08	0,0319	0,31	O1217	0,54	0,2054	0,77	0,2794
0,09	0,0359	0,32	0,1255	0,55	0,2088	0,78	0,2823
0,10	0,0398	0,33	0,1293	0,56	0,2123	0,79	0,2852

Для значений $x > 5$ полагают $\Phi(x) = 0{,}5$.

Для отрицательных значений x используют эту же таблицу, учитывая, что функция Лапласа нечётная $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Таблица функции Лапласа приведена полностью в конце данного пособия. Для пояснения приведена выдержка из таблицы.

Например, если x=0,09 , то Ф(0,09) =0,0359;

если x = 0,32, то Ф(0,32) =0,1255;

Ф(0,48) = 0,1844;

Ф(- 0,79) = -0.2852.

Задача 10. В лаборатории из партии семян, имеющих всхожесть 90 %, высеяно 600 семян. Найти вероятность события – число семян, давших всходы, не менее 520 и не более 570, если принять, что каждое посеянное зерно взойдёт с одной и той же вероятностью p = 0,9.

Решение:

Имеем n = 600, p=0,9, g = 0,l. Решение найдём по интегральной теореме Лапласа: $P(k_1\,;\,k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x')$,

$P(520;570) = \Phi(x'') - \Phi(x')$.

Вычислим $x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{520 - 600\times0{,}9}{\sqrt{600\times0{,}9\times0{,}1}} = \frac{520-540}{\sqrt{54}} = \frac{-20}{7{,}3485} = -2{,}722$.

Ф(-2,72) = - 0,4967.

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{570 - 600\times0{,}9}{\sqrt{54}} = \frac{30}{7{,}3485} = 4{,}08 .$$

Ф(4,08) =0,49996 .

P(520;570)= Ф(x'') – Ф(x') ≈ Ф(4,08) — Ф(-2,72) =0,49996 – (-0,4967) =0,994.

Ответ: 0,994.

1.3.3. Формула Пуассона

Если количество испытаний **n** достаточно велико $n \to \infty$, а вероятность **p** появления события **А** в отдельно взятом испытании **весьма мала** (0,05 - 0,1 и меньше), то вероятность того, что в данной серии испытаний событие **А** появится **ровно k** раз, можно приближённо вычислить по формуле Пуассона:

$$\mathbf{p_n(k)} \approx \frac{a^k \cdot e^{-a}}{k!}, \quad \text{где} \quad \mathbf{a = np}.$$

0!=1,   формула имеет смысл и при k=0.

Задача 11. Вероятность того, что зерно пшеницы не прорастёт, принимается равной 0,01. Какова вероятность того, что из 500 посеянных семян не дадут всходов ровно 8 семян?

Решение:

Имеем n = 500, p = 0,01, k= 8. Вероятность наступления события *A* **k раз**, когда *n* велико, а *p* мало, определяют по формуле Пуассона:

$$p_n(k) \approx \frac{a^k \cdot e^{-a}}{k!}$$

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{n}\,\mathbf{p} = 500*0{,}01 = 5.$$

Находим

$$P_{500}(8) \approx \frac{5^8 e^{-5}}{8!} \approx 0{,}06528.$$

Ответ: 0,06528.

Задача 12. На базу отправлено 10000 изделий. Вероятность того, что изделие в пути получит повреждение, равна 0,0003. Найти вероятность того, что на базу прибудут 4 повреждённых изделия.

Решение:

По условию задачи n=10000, p=0,0003, k=4.

Находим **a**, **a= np**$=10000 \cdot 0{,}0003 = 3$,   а затем

$$p_n(k) \approx \frac{a^k \cdot e^{-a}}{k!}, \qquad p_{10000}(4) = \frac{3^4 \cdot e^{-3}}{4!} = 0{,}168.$$

Ответ: 0,168.

1.3.4. Распределение Пуассона

Закон распределения ***дискретной случайной величины****, когда вероятности возможных ее значений находятся по формуле Пуассона:*

$$p_n(k) \approx \frac{\boldsymbol{a^k e^{-a}}}{\mathbf{k!}},$$

называется **распределением Пуассона**.

Для случайной величины *X*, распределённой по закону Пуассона, ее *математическое ожидание равно дисперсии.* Это свойство применяется в статистике.

В случае биномиального распределения случайной величины, когда математическое ожидание мало отличается от дисперсии, т. е. когда **np ≈ npg**, при решении задач пользуются распределением Пуассона.

Вероятность того, что событие А произойдёт **не менее k_1 раз и не более k_2 раз**:

$$P(k_1 ;k_2) \approx e^{-a} \sum_{k=k1}^{k_2} \frac{a^k}{k!}$$

Вероятность того, что число появлений события *А* **не меньше некоторого заранее заданного числа a_0**, т. е. $P(a_0 ;+\infty)$

$$P(a_0 ;+\infty)= 1 - P(0;a_0) =1 - \sum_{k=0}^{a_0} \frac{a^k e^{-a}}{k!} = 1- e^{-a} \sum_{k=0}^{a_0} \frac{a^k}{k!}$$

Для функции $P(0;\ a_0) = e^{-a} \sum_{k=0}^{a_0} \frac{a^k}{k!}$ имеются таблицы с двумя вводами, где по числу a_0 и a находится сумма $\sum_{k=0}^{a_0} \frac{a^k e^{-a}}{k!}$.

1.3.5. Наивероятнейшее число наступления события

Число наступлений события А в независимых испытаниях, которому отвечает **наибольшая вероятность**, называют ***наивероятнейшим числом наступления события А***.

Если построен полигон распределения, то наивероятнейшее число наступления события – это абсцисса наиболее высокой точки полигона.

Пусть $\mathbf{k_0}$ – наивероятнейшее число наступления события А,

n – число испытаний,

p – вероятность наступления события,

q = 1- p – вероятность не наступления события.

Наивероятнейшее число определяется двойным неравенством:

$$np - q \le k_0 \le np + p$$

причём:

а) если число **np - q** – дробное, то существует одно наивероятнейшее число $\mathbf{k_0}$;

б) если число **np - q** – целое, то существуют два наивероятнейших числа $\mathbf{k_0}$ и $\mathbf{k_0+1}$;

в) если число **np** -целое, то наивероятнейшее число $\mathbf{k_0=np}$.

1.3.6. Модальная вероятность

Модальная вероятность – вероятность наступления события, которому отвечает наибольшая вероятность.

Задача 13. В некотором водоеме караси составляют 80 % от всего количества рыбы. Определить: а) наивероятнейшее число карасей в партии из 8 рыб, выловленных в водоеме; б) модальную вероятность.

Решение:

а) наивероятнейшее число $\mathbf{k_0}$ определим из неравенства

$$np - q \le k_0 \le np + p$$

По условию задачи p= 0,8, q= 1 — 0,8= 0,2, n =8. События вылова рыбы независимые.

$k_0 \ge np-q = 8 \cdot 0{,}8 - 0{,}2 = 6{,}4 - 0{,}2 = 6{,}2$

$k_0 \le np+p = 8 \cdot 0{,}8 + 0{,}8 = 6{,}4+0{,}8 = 7{,}2$

$\mathbf{k_0}$ **– число целое**, $6{,}2 \le k_0 \le 7{,}2$

и в данном случае $k_0 = 7$ – в данном водоёме с наибольшей вероятностью (наивероятнейшее число) можно выловить 7 карасей из 8 выловленных рыб.

б) модальная вероятность для этого случая – вероятность вылова 7 карасей в партии из 8 рыб – можно вычислить по формуле *Бернулли.*

Вероятность того, что в ***n*** **независимых** испытаниях **событие наступит ровно *k* раз**, по формуле Бернулли равна

$$\boldsymbol{P_n(k)} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}p^k q^{n-k}$$

$$\mathbf{P_8(7)} = \frac{8!}{7!\cdot(8-7)!}0{,}8^7 0{,}2^{8-7} = \frac{8!}{7!1!}0{,}8^7 \cdot 0{,}2^1 = 8 \cdot 0{,}8^7 \cdot 0.2 = 0{,}3355.$$

Ответ: а) наивероятнейшее число равно 7, б) модальная вероятность p=0,34.

Задача 14. Вероятность получения икры от самок осётров в искусственных условиях равна 0,75. Найти: а) наивероятнейшее число самок, отдавших икру в партии из 150 рыб; б) модальную вероятность; в) вероятность того, что икру отдадут ровно 80 самок; г) вероятность того, что икру отдадут не более 80 самок.

Решение:

По условию n= 150, p=0,75, q= 1- 0,75= 0,25,

а) наивероятнейшее число k_0 самок, отдавших икру из 150 рыб, находим из промежутка

$$np - q \le k_0 \le np + p$$

$$150 \cdot 0{,}75 - 0{,}25 \le k_0 \le 150 \cdot 0{,}75 + 0{,}75$$

$$112{,}25 \le k_0 \le 113{,}25$$

k_0 =113 – наивероятнейшее число (целое число из этого промежутка);

б) модальная вероятность – вероятность того, что ровно 113 самок из 150 отдадут икру. Вычисления удобнее произвести *по локальной формуле Лапласа*, так как по формуле Бернулли вычисления будут громоздкими.

Вероятность того, что в n независимых испытаниях событие наступит ровно k раз, приближённо равна

$$\boldsymbol{P_n(k)} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x2}{2}}$, $\quad \boldsymbol{x} = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

Находим $x = \frac{113-150\cdot 0{,}75}{\sqrt{150\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}} = \frac{0{,}5}{5{,}3} = 0{,}094$.

По таблице Приложения 1 определяем $\varphi(x) = \varphi(0{,}09) = 0{,}3973$,

$$P_{150}(113) = \frac{1}{\sqrt{150\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}} \cdot \varphi(0{,}09) = \frac{0{,}3973}{5{,}3} = 0{,}074;$$

в) вероятность появления события ровно 80 раз в 150 испытаниях найдём по локальной теореме Лапласа. Находим

$$x = \frac{80-150\cdot 0{,}75}{\sqrt{150\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}} = \frac{-32{,}5}{5{,}3} = -6{,}13.$$

$\varphi(x) = \varphi(-6{,}13) = 0$,

$\boldsymbol{\varphi}(-6{,}13) = \boldsymbol{\varphi}(6{,}13) = 0$ (В Приложении 1 по таблице).

$$P_{150}(80) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{150\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}} \cdot \varphi(-6{,}13) = \frac{1}{5{,}3}\ 0 = 0;$$

г) вероятность того, что икру отдадут не более 80 самок (может быть 0, 1, 2,…, 80 самок) из 150 найдём по интегральной теореме Лапласа:

$$P(k_1\,;k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x'),$$ где Ф(x) – функция Лапласа,

$$\boldsymbol{x'} = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\ ,\quad \boldsymbol{x''} = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

По условию задачи: $n = 150$; $p = 0{,}75$; $q = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$; $k_1 = 0$; $k_2 = 80$.

Вычисляем x' и x'':

$$\boldsymbol{x'} = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{0 - 150\cdot 0{,}75}{\sqrt{150\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}} = \frac{-112{,}5}{5.3} = -21{,}23,$$

$\Phi(x') = \Phi(-21{,}23) = -0{,}5$, значение нашли в таблице по Приложению 2.

$$\boldsymbol{x''} = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 150\cdot 0{,}75}{\sqrt{150\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}} = \frac{-32{,}5}{5.3} = -6{,}13.$$

$\Phi(x'') = \Phi(-6{,}13) = -0{,}5$.

$$P(0\,;80) = \Phi(x'') - \Phi(x') = -0{,}5 - (-0{,}5) = -0{,}5 + 0{,}5 = 0.$$

Ответ: а) $k_0 = 113$ – наивероятнейшее число; б) модальная вероятность $p=0{,}074$; в) вероятность того, что икру отдадут ровно 80 самок $P_{150}(80) = 0$; г) вероятность того, что икру отдадут не более 80 самок $P(0\,;80) = 0$.

1.3.7. Вероятность отклонения относительной частоты от теоретической вероятности

Классическое определение вероятности, как правило, оценивает вероятность **ДО** проведения испытаний и даже без их фактического проведения, но в реальной жизни подобные модели встречаются нечасто. В некоторых предыдущих задачах были даны значения вероятностей, а данные вероятности могли получиться только на основе ранее проведённых опытов.

Относительной частотой события А называют отношение числа испытаний **m**, в которых данное событие появилось, к общему числу **n** фактически проведённых испытаний:

$$W(A) = \frac{m}{n}$$

Вероятность того, что в **n** независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна **p**, абсолютная величина **отклонения относительной частоты** $\frac{m}{n}$ появления некоторого события ***A*** отклонится от вероятности его появления **p** не больше заданного числа **ε >0**, приближённо равна удвоенной функции Лапласа:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Можно найти вероятность того, что в серии из n независимых испытаний расхождение между относительной частотой и теоретической вероятностью $\left|\frac{m}{n}-p\right|$ будет не больше, чем заранее заданное число.

Задача 15. В некотором регионе в результате многолетнего статистического исследования установлена вероятность рождения мальчика p = 0,52. С какой вероятностью можно утверждать, что среди следующей тысячи новорожденных относительная частота появления мальчика отклонится от соответствующей вероятности не более чем на 0,02?

Решение:

Используем формулу $P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)$

По условию: $p=0{,}52; \quad n=1000; \quad \varepsilon=0{,}02$

Таким образом:

$P\left(\left|\frac{m}{1000}-0{,}52\right|\le 0{,}02\right)\approx 2\Phi\left(\frac{0{,}02\cdot\sqrt{1000}}{\sqrt{0{,}52\cdot 0{,}48}}\right)\approx 2\Phi(1{,}27)\approx 2\cdot 0{,}3980=0{,}796$ – искомая вероятность.

Значения функции Лапласа можно найти по соответствующей таблице Приложения 2.

Ответ: 0,796.

1.4. Случайные величины

Величина, которая в результате опыта в зависимости от различных, случайных обстоятельств может принимать различные числовые значения, называется ***случайной величиной***.

Случайная величина, которая может принимать лишь отдельные, изолированные друг от друга на числовой оси значения, называется ***дискретной***.

Случайная величина называется ***непрерывной***, если она может принимать все числовые значения, сплошь заполняющие некоторый промежуток на числовой оси.

Законом распределения случайной величины называется соотношение, устанавливающее связь между всеми возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Величины, в сжатой форме характеризующие основные особенности распределения случайной величины, называются его ***числовыми характеристиками***.

К числу важных числовых характеристик относят ***математическое ожидание***, ***дисперсию и среднее квадратическое отклонение***.

1.4.1. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины

Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины (ДСВ) – это соответствие между возможными значениями этой величины и их вероятностями. Чаще всего закон записывают таблицей (аналитическое задание закона распределения вероятностей).

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
	p_1	p_2	p_3	…	p_n

Довольно часто встречается термин «**ряд распределения**» вместо «*закон распределения*».

Поскольку случайная величина X обязательно примет одно из значений x_1, x_2, x_3 и т. д., то соответствующие события образуют *полную группу* и сумма вероятностей их наступления равна единице:

$$p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n=1.$$

Задача 16. Некоторая игра имеет следующий закон распределения выигрыша:

U	–5	2,5	10
	0,5	p_2	0,1

Найти p_2.

Решение:

Так как случайная величина U может принять только одно из трёх значений, то соответствующие события образуют полную группу, а значит, сумма их вероятностей равна единице:

$$p_1+p_2+p_3=1,$$

$$0{,}5+p_2+0{,}1=1,$$

$$p_2+0{,}6=1 \quad \Rightarrow \quad p_2=1-0{,}6.$$

Таким образом, вероятность выигрыша U_2 = 2,5 условных единиц составляет 0,4.

Контроль: $p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}5 + 0{,}4 + 0{,}1 = 1$.

Ответ: $p_2 = 0{,}4$.

1.4.2. Многоугольник распределения вероятностей дискретной случайной величины (полигон распределения)

Многоугольником распределения вероятностей **дискретной случайной** величины называют ломаную, звенья которой соединяют соседние точки (x_i; y_i).

Задача 17. Построить многоугольник распределения вероятностей случайной величины X

x_i	–2	0	3	6	7,5
p_i	0,2	0,1	0,2	0,3	0,2

Решение: чертим прямоугольную систему координат, в которой по оси абсцисс отсчитываются x_i – значения случайной величины, а по оси ординат p_i– их вероятности. Отмечаем на чертеже точки (x_i; y_i), в данном случае их пять, и соединяем «соседей» отрезками:

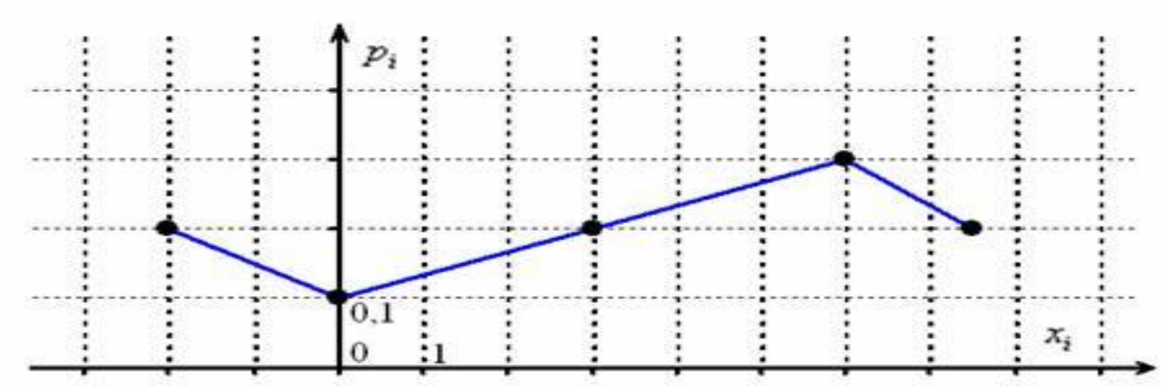


Рисунок 1

При выполнении чертежа от руки по возможности придерживайтесь следующего масштаба:

горизонтальная ось: 1 ед. = 2 тетрадные клетки (1 см);

вертикальная ось: 0,1 = 2 тетрадные клетки.

Если значения x_i достаточно велики, то ось абсцисс можно «разорвать» (не чертить её кусочек после единицы) и справа продолжить нумерацию, например с 20. На Рисунке 1 построен Многоугольник распределения вероятностей случайной величины X.

Иногда вместо многоугольника говорят о **полигоне распределения** вероятностей, но этот вариант больше применим в математической статистике.

1.4.3. Функция распределения вероятностей дискретной случайной величины. Построение графика функции распределения вероятностей дискретной случайной величины

Основными видами распределения случайной величины, наиболее часто применяемыми на практике, являются следующие виды законов распределения: биномиальный, Пуассона (для дискретных случайных величин); равномерный, экспоненциальный, нормальный (для непрерывных случайных величин).

Функция распределения вероятностей полностью характеризует случайную величину и является одной из форм закона распределения. И этот способ особо важен для непрерывной случайной величины (**НСВ**) по той причине, что её невозможно описать таблицей (ввиду бесконечного количества принимаемых значений).

Определение. Функцией распределения вероятностей случайной величины X называют **функцию** F (x), значение которой в точке x равно вероятности события X.

И для *дискретной*, и для *непрерывной* случайной величины *функция распределения* определяется одинаково:

$$F(X) = P(X < x),$$

где P (X < x) – вероятность того, что случайная величина X примет значение, **меньшее**, чем переменная x, которая «пробегает» все действительные значения (от «минус» до «плюс» бесконечности).

Функция распределения вероятностей случайной величины F(X) характеризует вероятность, она может принимать значения лишь из промежутка **$0 \le F(X) \le 1$** и никакие другие!

Функция распределения вероятностей *дискретной* случайной величины (**ДСВ**) является кусочной.

Задача 18. Построить функцию распределения ***F(X)*** дискретной случайной величины X

x_i	–2	0	3	7
p_i	0,4	0,1	0,3	0,2

Решение: рассмотрим формальный ***алгоритм построения функции распределения***, смотри Рисунок 2.

Сначала берём первое значение $x_1 = -2$ и составляем нестрогое неравенство $x \le -2$. На этом промежутке $F(x) = 0$.

На промежутке $-2 < x \le 0$ (между x_1 и x_2): $F(x) = 0{,}4$.

На промежутке $0 < x \le 3$ (между x_2 и x_3): $F(x) = 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}5$.

На промежутке $3 < x \le 7$ (между x_3 и x_4): $F(x) = 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}5 + 0{,}3 = 0{,}8$.

И, наконец, если x строго больше самого последнего значения $x_4 = 7$, то

$F(x) = 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}8 + 0{,}2 = 1$.

С увеличением «икс» идёт *накопление (суммирование) вероятностей*, и поэтому *функцию* ***распределения вероятностей*** F(x) также **называют интегральной функцией распределения.**

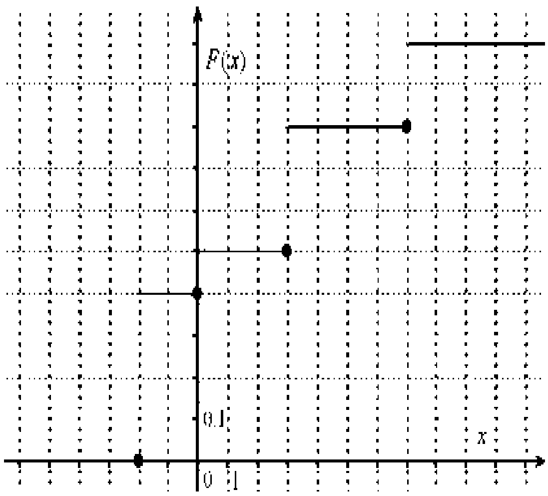


Рисунок 2

В практических задачах проведённые выше действия обычно выполняют в уме, а результат сразу записывают под единую скобку:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le -2 \\ 0{,}4, & \text{если} \quad -2 < x \le 0 \\ 0{,}5, & \text{если} \quad 0 < x \le 3 \\ 0{,}8, & \text{если} \quad 3 < x \le 7 \\ 1, & \text{если} \quad x > 7 \end{cases}$$

Проконтролируем правильность решения с помощью «скачков» графика: в точке $x_1 = -2$ «скачок» равен $p_1 = 0{,}4$,

в точках: $x_2 = 0 \Rightarrow p_2 = 0{,}1$, $x_3 = 3 \Rightarrow p_3 = 0{,}3$, $x_4 = 7 \Rightarrow p_4 = 0{,}2$.

1.4.4. Математическое ожидание дискретной случайной величины

М**атематическое ожидание** случайной величины иногда называют просто **средним значением** случайной величины. Математическое ожидание – это среднеожидаемое значение при многократном повторении испытаний.

Среднее значение случайной величины есть некоторое число, являющееся как бы ее «представителем» и заменяющее ее при грубо ориентировочных расчётах.

Когда мы говорим: «среднее время работы лампы равно 100 часам» или «средняя точка попадания смещена относительно цели на 2 м вправо», мы этим указываем определённую числовую характеристику случайной величины, описывающую ее местоположение на числовой оси, «характеристику положения», т. е. указывают некоторое среднее, ориентировочное значение, около которого группируются все возможные значения случайной величины.

Пусть случайная величина **X** принимает значения $\mathbf{x_1, x_2, x_3, .., x_n}$ с вероятностями $\mathbf{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n}$ соответственно.

Определение. Математическим ожиданием **дискретной случайной величины X** называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$\mathbf{M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n.}$$

или сокращённо

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

1.4.5. Дисперсия дискретной случайной величины

«*Рассеяние*» с латыни переводится как *дисперсия*.

Дисперсия случайной величины характеризует *степень разброса случайной величины около ее математического ожидания*, то есть её ***отклонения от математического ожидания***.

Дисперсией дискретной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[x - M(X)]^2.$$

Удобнее для вычисления дисперсии пользоваться формулой:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Дисперсия не может быть отрицательной.

Задача 19. Некоторая случайная величина имеет следующий закон распределения:

X	–5	2,5	10
	0,5	0,4	0,1

Найти математическое ожидание и дисперсию.

Решение: Находим математическое ожидание

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n.$$

$$M(X) = -5 \cdot 0{,}5 + 2{,}5 \cdot 0{,}4 + 10 \cdot 0{,}1 = -2.5 + 1 + 1 = -0{,}5$$

$M(X) = -0{,}5$.

Вычислим дисперсию по формуле:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Сначала найдём математическое ожидание $M(X^2)$ – квадрата случайной величины X.

$$M(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 + \ldots + x_n^2p_n.$$

В данном случае:

$M(X^2) = (-5)^2 \cdot 0{,}5 + (2{,}5)^2 \cdot 0{,}4 + 10^2 \cdot 0{,}1 = 12{,}5 + 2{,}5 + 10 = 25$.

$M(X) = -0{,}5$.

Вычисляем дисперсию:

$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 25 - (-0{,}5)^2 = 25 - 0{,}25 = 24{,}75$.

Ответ: M(X) = -0,5;   D(X) =24,75.

1.4.6. Среднее квадратическое отклонение непрерывной и случайной величины

Средним квадратическим отклонением дискретной и непрерывной случайной величины X называется корень квадратный из дисперсии

$$\boldsymbol{\sigma (X) = \sqrt{D(X)}}.$$

Иногда это значение называют *стандартным отклонением*. Обозначают **σ** – греческой буквой «сигма».

Для предыдущего примера D(X)=24,75 – дисперсия, а среднее квадратическое отклонение равно **σ (X)=** $\sqrt{24{,}75}$ =4,97.

В чём смысл среднего квадратического отклонения случайной величины? Например, если мы отклонимся от математического ожидания M(X) = -0,5 влево и вправо на среднее квадратическое отклонение σ(X)=5,

$$\big(M(X)-\sigma(X);\, M(X)+\sigma(X)\big)$$
$$(-0{,}5-5;\, -0{,}5+5)$$

то на интервале (- 5,5; 4,5) будут «сконцентрированы» *наиболее вероятные значения случайной величины*.

1.4.7. Функция распределения непрерывной случайной величины

Функцией распределения ***случайной величины X*** называется такая функция **F(x)**, которая определяется для каждого значения X, *как вероятность выполнения неравенства X < x, т. е. F(x)=P(X < x)*.

Геометрически это равенство понимается так: *F(x) есть вероятность того, что случайная величина примет значение, которое изображается на числовой оси точкой, лежащей левее точки x*.

Функция распределения обладает следующими свойствами:

1. Значения функции распределения принадлежат отрезку [0;1]:

$0 \le F(x) \le 1$.

2. Функция распределения – функция неубывающая, т. е.

$$F(x_2) \ge F(x_1), \text{ если } x_2 > x_1.$$

3. Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключённое в интервале (a; b), равна приращению функции распределения на этом интервале:

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$

4. Вероятность того, что непрерывная, случайная величина X примет одно определённое значение, равна нулю.

5. Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a; b), то:

1) $F(x)=0$; при $x \le a$;

2) $F(x)=1$; при $x \ge b$.

6. Если возможные значения непрерывной, случайной величины расположены на всей оси x, то справедливы следующие предельные соотношения:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0; \qquad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$

1.4.8. График функции распределения непрерывной случайной величины

Функция распределения непрерывной случайной величины X определяется точно так же, как и функция распределения дискретной случайной величины (ДСВ). С увеличением X функция распределения «накапливает» (суммирует) вероятности, а значит, является неубывающей и изменяется в пределах $0 \le F(x) \le 1$.

По этой причине её иногда называют ***интегральной функцией распределения.***

Задача 20. Построить график функции распределения непрерывной случайной величины

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0 \\ \dfrac{x^2}{9}, & \text{если} \quad 0 \le x \le 3 \\ 1, & \text{если} \quad x > 3 \end{cases}.$$

Решение: Важной особенностью является тот факт, что функция распределения непрерывной случайной величины *всегда и всюду непрерывна!* График может быть в «кусочном» виде, однако в точках «стыка» значения функции справа и слева должны быть одинаковы:

$$F(0) = \frac{0^2}{9} = 0, \quad F(3) = \frac{3^2}{9} = 1$$

$F(x < 0) = 0, \quad F(x > 3) = 1.$

Если в «точках стыка» получили разрыв, то вы имеете дело с опечаткой или откровенной ошибкой!

При построении чертежа целесообразно найти опорные точки; в нашем примере удобно взять и плавно-плавно провести карандашом кусочек параболы

$y = \frac{x^2}{9}$ $\quad F(1) = \frac{1^2}{9} \approx 0{,}11, \quad F(2) = \frac{2^2}{9} \approx 0{,}44$

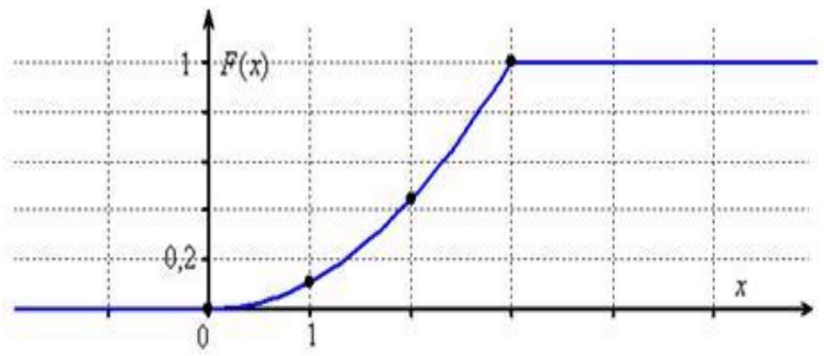


Рисунок 3

На Рисунке 2 построен график Функции распределения F(X) непрерывной случайной величины X.

Левый нижний луч следует прочертить жирно (чтобы он не сливался с осью ОХ), а правый верхний луч продолжить за остриё оси ОХ (т. к. график бесконечен). Также не забываем, что F(X) не может убывать, и если вдруг окажется, что какой-то кусок графика идёт «сверху вниз», то ищите ошибку или опять же – имеет место опечатка.

Масштаб выбирают по ситуации, чаще всего оптимальный масштаб составляет 1 ед. = 1 см (две клетки); в данном случае по оси ординат вышло примерно в 2 раза больше, чем по оси абсцисс.

Теперь вернёмся к смыслу функции распределения и рассмотрим несколько конкретных «икс»:

$F(-1) = P(X < -1) = 0$ – вероятность того, что случайная величина X примет значение, МЕНЬШЕЕ, чем –1.

$F(4) = P(X < 4) = 1$ – вероятность того, что случайная величина X примет значение, МЕНЬШЕЕ, чем 4.

F(0<X < 3) – рассматриваемая случайная величина принимает случайные, наперёд неизвестные значения из отрезка $[0;3]$.

Вероятность того, что случайная величина примет значение из некоторого промежутка, рассчитывается по формуле F(b) - F (a).

1.4.9. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины

По функции распределения вероятностей трудно судить *о характере распределения в небольшой окрестности точки числовой оси*. Для этого удобнее пользоваться плотностью распределения вероятностей непрерывной, случайной величины.

Плотность распределения *вероятностей непрерывной случайной величины или* ***дифференциальная функция распределения*** *представляет собой* ***производную функции распределения:***

$$f(x) = F'(x)$$

Вероятность того, что непрерывная, случайная величина X **примет значение**, **принадлежащее интервалу (a; b)**, равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b:

$$\mathbf{P(a < X < b) =} \int_a^b f\,(x)dx.$$

Плотность распределения обладает следующими свойствами:

1. Плотность распределения – неотрицательная функция:

$$f(x) \geq 0.$$

Геометрически, это свойство означает, что точки, принадлежащие графику плотности распределения, расположены либо над осью OX, либо на этой оси.

2. Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от - ∞ до ∞ равен единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\,(x)dx = 1.$$

3. Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a; b), то

$$\int_a^b f\,(x)dx = 1.$$

4. Если известна плотность распределения f(x), *то функция распределения F(x) находится по формуле:*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\,(x)dx.$$

1.5. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

1.5.1. Математическое ожидание непрерывной случайной величины X

Определение. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X*, возможные значения которой принадлежат отрезку [a; b], называется определенный интеграл:*

$$\mathbf{M(X)} = \int_a^b x \cdot f(x) \cdot dx,$$

где f(x) – функция плотности распределения этой случайной величины.

Если возможные значения принадлежат всей оси OX, то

$$\mathbf{M(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx.$$

1.5.2. Дисперсия непрерывной случайной величины X

Дисперсия вычисляется по формуле:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x) dx$$

В практических задачах гораздо удобнее применять формулу:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (M(X))^2.$$

Дисперсия не может быть отрицательной.

Глава 2. Элементы математической статистики

Математическая статистика разрабатывает способы сбора, группировки и анализа статистических данных, т. е. сведений, полученных в результате многократных наблюдений изучаемого явления.

Методы математической статистики позволяют решать многие задачи, которые возникают на практике. К их числу относится изучение большой совокупности объектов по небольшому числу случайно отобранных объектов (выборочный метод); нахождение приближенных значений параметров, которыми определяется распределение вероятностей изучаемого признака (статистическая оценка параметров распределения); установление формы и силы связи между случайными величинами (теория корреляции) и др.

В настоящее время методы математической статистики все шире и шире применяются в различных отраслях науки и техники, способствуя их прогрессу.

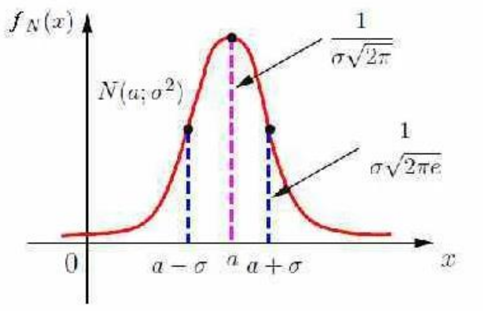
Например, статистические методы используются для правильной и целесообразной организации технологического процесса (предупредительный и приёмочный контроль качества продукции), содействуют созданию современной теории точности механизмов; использование этих методов в теоретических исследованиях привело к созданию ряда новых разделов науки (статистическая физика, теория ошибок и др.). Теоретической основой математической статистики является теория вероятностей.

2.1. Нормальное распределение

Определение. Нормальное распределение, или распределение Гаусса, – распределение вероятностей, которое в случае одной переменой задаётся функцией плотности вероятности, совпадающей с функцией Гаусса.

Считается, что большинство биологических параметров имеет именно нормальное распределение. Нормальность распределения означает следующее: существуют значения роста человека, массы рыбы одного вида и прочие, которые на интуитивном уровне воспринимаются как «нормальные» (а по сути – усреднённые), и они-то в достаточно большой выборке встречаются гораздо чаще, чем отличающиеся в большую или меньшую сторону.

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, *плотность* которого имеет вид:



$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}}$$

Рисунок 4

где a = M(X) – математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение X.

Вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α, β), определяется по формуле:

$$\boldsymbol{P(\alpha<x<\beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),}$$

где $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-x^2/2}\,dx$ – функция Лапласа.

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения меньше положительного числа δ, равна

$$P(|x - a| < \delta) = 2\Phi_0\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Если a = 0, то справедливо равенство:

$$P(|x| < \delta) = 2\Phi_0(\delta / \sigma).$$

Задача 21. Заданы математическое ожидание **a = 5** и среднее квадратическое отклонение **σ = 2** нормально распределенной случайной величины X. Найти: 1) вероятность того, что **x** примет значение, принадлежащее интервалу (8; 10); 2) вероятность того, что абсолютная величина отклонения **x - a** окажется меньше **δ = 0,5** .

Решение:

α = 8, β = 10, a = 5, σ= 2, δ = 0,5.

1) найдём вероятность того, что **x** примет значение, принадлежащее интервалу (8; 10). Воспользуемся формулой:

$$P(\alpha<x<\beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Получим:

$P(8 < x < 10) = \Phi\left(\frac{10-5}{2}\right) - \Phi\left(\frac{8-5}{2}\right)$,

$P(8 < x < 10) = \Phi(2{,}5) - \Phi(1{,}5)$.

По таблице Приложения 2 находим $\Phi(2{,}5) = 0{,}4938$ и $\Phi(1{,}5) = 0{,}4332$.

Вероятность того, что **x** примет значение, принадлежащее интервалу (8; 10), равна:

$$P(8 < X < 10) = 0{,}4938 - 0{,}4332 = 0{,}0606.$$

2) Определим вероятность того, что абсолютная величина отклонения **x - a** окажется меньше **δ = 0,5**. Воспользуемся формулой:

$$P(|x - a| < \delta) = 2\Phi_0\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Подставляем $a = 5$, $\sigma = 2$, $\delta = 0{,}5$, получим:

$P(|X - 5| < 0{,}5) = 2\Phi(0{,}5 / 2) = 2\,\Phi(0{,}25) = 2 \cdot 0{,}0987 = 0{,}1974$.

Ответ:

1) вероятность того, что X примет значения, принадлежащие интервалу (8; 10), равна 0,0606;

2) вероятность того, что абсолютная величина отклонения x - 5 окажется меньше $\delta = 0{,}5$, равна 0,1974.

2.2. Интервальные оценки

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала, покрывающего оцениваемый параметр.

Доверительным называют интервал, который с заданной надёжностью $\boldsymbol{\gamma}$ покрывает заданный параметр.

Интервальной оценкой математического ожидания $\boldsymbol{\alpha}$ нормально распределённого количественного признака X по выборочной средней $\bar{x}_в$ при известном среднем квадратическом отклонении $\boldsymbol{\sigma}$ генеральной совокупности служит **доверительный интервал**:

$$\bar{x}_b - \boldsymbol{\delta} < \boldsymbol{\alpha} < \bar{x}_b + \boldsymbol{\delta},$$

где $\boldsymbol{\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ – точность оценки; **n** – объем выборки; **t** – значение аргумента функции Лапласа Ф(t), $\mathbf{t} = \boldsymbol{\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}}$.

Значения функции Лапласа **Ф(t)** смотри в Приложении 2.

$$\boldsymbol{\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}}.$$

Из этого равенства можно выразить $\boldsymbol{\gamma}$:

$$\boldsymbol{\gamma = 2\Phi(t) = 2\Phi\left[\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right]}.$$

2.3. Точечные оценки. Выборочная средняя

Оценки параметров генеральной совокупности, полученные на основании выборки, называются статистическими.

Если статистическая оценка характеризуется одним числом, она называется **точечной**.

К числу таких оценок относится выборочная средняя и выборочная дисперсия.

Выборочная средняя определяется как среднее арифметическое полученных по выборке значений:

$$\bar{x}_b = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i x_i}{n}$$

где x_i – варианта выборки; $\mathbf{n_i}$ – частота варианты; $\mathbf{n} = \sum_{i=1}^{k}$ ni – объем выборки.

Замечание. Выборочная средняя может обозначаться и без нижнего индекса $\bar{x}$.

Выборочная средняя является оценкой математического ожидания случайной величины.

Дисперсия – это среднее арифметическое квадратов отклонений данной величины от ее среднего значения. Дисперсия показывает, насколько сильно данные отклоняются от их среднего значения. Чем больше дисперсия, тем больше разброс данных.

Дисперсия – в статистике это «среднее квадратов отклонений от среднего».

Выборочная дисперсия представляет собой среднюю арифметическую квадратов отклонений вариант от их выборочной средней:

$$D_b = \sum_{i=1}^{n} \frac{n_i}{n} (x_i - \bar{x}_b)^2.$$

Выборочная дисперсия оценивает дисперсию генеральной совокупности.

V. Методические указания по выполнению заданий контрольной работы

Для решения заданий № 1–10 работы необходимо изучить: Глава 1: темы 1.1–1.3 настоящего пособия.

Литература: [1], главы 1–5; [2], главы 1–3.

Вопросы самопроверки:

1. Что такое сумма событий?
2. Что означает термин «событие, противоположное событию А»?
3. Что называется произведением двух событий?

4. Какие события могут появиться в результате проведения эксперимента?

5. Что такое «полная группа событий»?

6. В каких пределах заключена вероятность события?

7. Что обозначает термин «условная вероятность»?

8. Как связаны вероятности противоположных событий?

9. Являются ли независимые события несовместными?

10. Какими должны быть гипотезы в формуле полной вероятности?

Для решения заданий № 11–20, 21–30 и 31–40 работы необходимо изучить:

Глава 1: темы 1.4.1–1.4.7 данного пособия.

Литература: [1], главы 6 –13; [2], главы 4–7.

Вопросы самопроверки:

1. Что такое «случайная величина»?

2. Что такое «дискретная случайная величина»?

3. Что такое «ряд распределения дискретной случайной величины»?

4. Что такое «непрерывная случайная величина»?

5. Как выражается функция распределения через плотность вероятности?

Для решения заданий № 41–50 работы необходимо изучить: Глава 2 настоящего пособия.

Литература: [1], главы 15–19; [2], главы 9–13.

Для полного изучения учебного материала «Глава 2. Элементы математической статистики» рекомендую изучить литературу: [3], главы 14–16.

VI. Решение типовых заданий контрольной работы

Задача 22. В партии 20 изделий. 5 изделий из партии имеют скрытый дефект. Какова вероятность того, что из взятых наугад восьми изделий два изделия являются дефектными?

Решение:

Обозначим событие А – среди отобранных восьми изделий два изделия являются дефектными.

В партии 20 изделий		Взяли 8 изделий	
5 с дефектом	в 15 нет дефекта	Надо взять 2 дефект	Надо взять 6 без дефекта

Вероятность события А найдём по формуле $P(A) = \frac{m}{n}$.

Общее число возможных элементарных исходов события **n** равно числу способов, которыми можно взять восемь изделий из двадцати, т. е. число сочетаний из двадцати элементов по восемь.

$$n = C_{20}^{8} = \frac{20!}{8!\,12!}$$

m – число исходов, благоприятствующих событию А, определяется как произведение $C_5^2 \cdot C_{15}^6$, где первый сомножитель указывает число комбинаций выбора двух деталей с дефектами из пяти с дефектами, но с каждой такой комбинацией могут встретиться детали без дефектов.

Число комбинаций деталей без дефекта будет C_{15}^6.

Деталей в партии 20, из них 20 - 5 = 15 без дефекта, из 15 деталей без дефекта надо взять 8 - 2 = 6 без дефекта (так как надо взять 8 деталей, в том числе 2 с дефектом и 6 без дефекта).

Вероятность вычисляем по формуле $P(A) = \frac{m}{n}$, подставим:

$$C_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!\cdot 2!}, \quad C_{15}^6 = \frac{15!}{(15-6)!\cdot 6!}, \; C_{20}^8 = \frac{20!}{8!12!}.$$

$$P(A) = \frac{C_5^2\ C_{15}^6}{C_{20}^8} = \frac{\frac{5!}{(5-2)!\cdot 2!}\ \frac{15!}{(15-6)!\cdot 6!}}{\frac{20!}{8!12!}} = \frac{5!\ 15!\ 8!\ 12!}{3!2!\ 9!6!20!} = 0{,}3973$$

Ответ: P (A) = 0,3973.

Задача 23. Три стрелка произвели залп, каждый по своей цели, и стреляли по одному разу. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,4, для второго и третьего стрелков эти вероятности соответственно равны 0,7 и 0,9. Найти вероятность того, что: 1) только два стрелка поразят цель; 2) все три стрелка поразят цель.

Решение:

События A_1, A_2, A_3 – попадания соответственно 1-го, 2-го и 3-го стрелков в мишень. Тогда $P(A_1) = 0{,}4$; $P(A_2) = 0{,}7$; $P(A_3) = 0{,}9$. Соответственно вероятности противоположных событий, т. е. промахи соответственно 1-го, 2-го и 3-го стрелков:

$P(A_1)=1-0{,}4=0{,}6$, $P(A_2)=1-0{,}7=0{,}3$, $P(A_3)=1-0{,}9=0{,}1$.

1) Событие А – только два стрелка поразят цель.

Это возможно:

- или если 1-й и 2-й попадут в цель, а 3-й промахнется;

- или 1-й промахнется, а 2-й и 3-й попадут;

- или 1-й попадет, 2-й промахнется, 3-й попадет.

Операция сложения вероятностей (союз «или»)

$$\mathrm{A} = A_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3.$$

Каждое из событий: 1-й и 2-й попадут в цель, а 3-й промахнется;

1-й промахнется, а 2-й и 3-й попадут;

1-й попадет, 2-й промахнется, а 3-й попадет – независимые, т. к. стрелки стреляют каждый по своим мишеням.

Применив теоремы сложения и умножения вероятностей, получим:

$$P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A_3})+P(A_1)\cdot P(A_3)\cdot P(\overline{A_2})+P(A_3)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A_1}),$$

Р(А) = 0,4 · 0,7 · 0,1 + 0,6· 0,7· 0,9 + 0,4·0,3·0,9 = 0,028 + 0,378 +0,108 = 0,514.

2) Событие С – все три стрелка поразят цель в одном испытании.

События A_1, A_2 *и* A_3 *независимые (союз «и» и 1-й и 2-й и 3-й попадет в мишень)*, *по формуле умножения вероятностей:*

$$P(C) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}252.$$

Ответ: Вероятность поражения цели двумя стрелками равна 0,514, тремя – 0,252.

Задача 24. Вероятность появления события в каждом из 625 независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,04.

Решение. По условию n=625; p=0,8; q=1- p= 0,2; ε=0,04.

Требуется найти вероятность $\mathrm{P}(\frac{m}{625} - 0{,}8) \le 0.04$.

Воспользуемся формулой:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right| \le \varepsilon\right)= 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Имеем:

$$P\left(\left|\frac{m}{625}-0{,}8\right| \le 0{,}04\right)=2\Phi\left(0{,}04\sqrt{\frac{625}{0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)=2\Phi(2{,}5).$$

По таблице Приложения 2 найдём Ф(2,5)=0,4938.

Следовательно, 2Ф(2,5)= 2·0,4938=0,9876.

Вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,04, приближённо равна 0,9876.

Ответ: 0,9876.

Задача 25. В городе имеются N=3 оптовых баз. Вероятность того, что требуемого сорта товар отсутствует на этих базах, одинакова и равна p=0,2. Требуется: 1) составить закон распределения числа баз, на которых искомый товар отсутствует в данный момент; 2) построить многоугольник распределения; 3) найти дисперсию и среднеквадратичное отклонение числа баз, на которых искомый товар отсутствует в данный момент.

Решение:

Вероятность того, что требуемого сорта товар отсутствует на этих базах, одинакова и равна p= 0,2. Вероятность того, что товар имеется на базе, равна q= 1 - p= 1- 0,2 = 0,8.

1. Составим закон распределения числа баз, на которых искомый товар отсутствует в данный момент. Рассмотрим варианты:

а) $x_1 = 0$ – рассмотрим случай, когда искомый товар отсутствует в каждой из трех баз в данный момент.

Вычисления будем проводить по формуле Бернулли:

$$\mathbf{P_n(k) = C^k_n \cdot p^k \cdot q^{n-k}}.$$

$$p_1 = P(x=0) = P_3(0) = C_3^0 \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^3 = \frac{3!}{(3-0)!\cdot 0!} 1 \cdot 0{,}512 = 0{,}512.$$

Замечание: 0! = 1.

б) $x_2 = 1$ – рассмотрим случай, когда искомый товар отсутствует в одной из трех баз в данный момент:

$$P_3(1) = C_3^1 \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^2 = \frac{3!}{(3-1)! \cdot 1!} 0{,}2 \cdot 0{,}64 = \frac{3!}{2!} \cdot 0{,}128 = 0{,}384.$$

в) $x_3 = 2$ – рассмотрим случай, когда искомый товар отсутствует в двух из трёх баз в данный момент:

$$P_3(2) = C_3^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^1 = \frac{3!}{(3-2)! \cdot 2!} 0{,}2^2 \cdot 0{,}8 = \frac{3!}{2!} \cdot 0{,}032 = 0{,}096.$$

г) $x_4 = 3$ - рассмотрим случай, когда искомый товар отсутствует в трех из трёх баз в данный момент:

$$P_3(3) = C_3^3 \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^0 = \frac{3!}{(3-3)! \cdot 3!} 0{,}2^3 \cdot 1 = \frac{3!}{3!} \cdot 0{,}008 = 0{,}008.$$

Проверка: проверим, $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$?

$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0{,}512 + 0{,}384 + 0{,}096 + 0{,}008 = 1$. Проверка получилась.

Тогда *закон распределения* числа баз, на которых искомый товар отсутствует в данный момент, примет вид:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,512	0,384	0,096	0,008

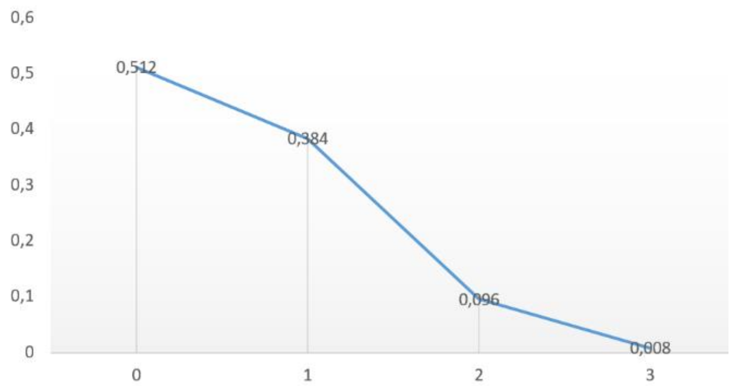


Рисунок 5

На Рисунке 5 построен Многоугольник распределения.

2. Находим дисперсию и среднеквадратичное отклонение числа баз, на которых искомый товар отсутствует в данный момент, используя закон распределения по полученному закону распределения:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,512	0,384	0,096	0,008

Вычислим математическое ожидание случайной величины M(X) и $M(X^2)$:

$$M(X)=x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 = 0 * 0,512 + 1*0,384 + 2 * 0,096 + 3* 0,008$$

$$M(X) = 0 + 0,384 + 0,192 + 0,024 = 0,6.$$

$$M(X^2) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + x_3^2 \cdot p_3 + x_4^2 \cdot p_4 = 0 \cdot 0,512 + 1^2 \cdot 0,384 + 2^2 \cdot 0,096 + 3^2 \cdot 0,008.$$

$$M(X^2) = 0 + 0,384 + 0,384 + 0,072 = 0,84.$$

Определим дисперсию по формуле:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2,$$

$$D(X) = 0,84 - (0,6)^2 = 0,84 - 0,36 = 0,48.$$

Среднеквадратичное отклонение равно $\boldsymbol{\sigma (X) = \sqrt{D(X)}}$.

$$\sigma (X) = \sqrt{0,48} = 0,693.$$

Ответ: закон распределения числа баз, на которых искомый товар отсутствует в данный момент, задан таблицей:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,512	0,384	0,096	0,008

Дисперсия $D(X) = 0,48$ и среднеквадратичное отклонение $\sigma (X) = 0,693$ числа баз, на которых искомый товар отсутствует в данный момент.

Задача 26. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения: x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1 возможного значения x_1, математическое ожидание M(X) =3,9 и дисперсия D(X) = 0,09. Составить закон распределения этой случайной величины.

Решение. Составим таблицу закона распределения.

Так как $p_1 + p_2 = 1$, то $p_2 = 1 - p_1 = 1 - 0,1 = 0,9$. Следовательно, $p_2 = 0,9$.

xi	x_1	x_2
Pi	0,1	0,9

По условию задачи математическое ожидание M(X)=3,9 и дисперсия D(X)=0,09.

Математическое ожидание вычисляется по формуле:

$$\mathbf{M(X) = x_1p_1 + x_2p_2.}$$

Подставим M(X) = 3,9 и $M(X) = 0{,}1 \cdot x_1 + 0{,}9 \cdot x_2$:

$$0{,}1 \cdot x_1 + 0{,}9 \cdot x_2 = 3{,}9$$

Дисперсия вычисляется: $\mathbf{D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2}$.

Подставим D(X)=0,09 и $D(X) = 0{,}1 \cdot (x_1)^2 + 0{,}9 \cdot (x_2)^2 - 3{,}9^2$,

$$0{,}1 \cdot (x_1)^2 + 0{,}9 \cdot (x_2)^2 - 3{,}9^2 = 0{,}09.$$

Для вычисления x_1 и x_2 решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 0{,}1 \cdot x_1 + 0{,}9 \cdot x_2 = 3{,}9 \\ 0{,}1 \cdot (x_1)^2 + 0{,}9 \cdot (x_2)^2 - 3{,}9^2 = 0{,}09 \end{cases}$$

$0{,}1 \cdot x_1 + 0{,}9 \cdot x_2 = 3{,}9$ умножим первое равенство на 10:

$x_1 + 9x_2 = 39$

$x_1 = -9x_2 + 39$

Второе уравнение системы упрощаем:

$0{,}1 \cdot (x_1)^2 + 0{,}9 \cdot (x_2)^2 - 3{,}9^2 = 0{,}09$
$0{,}1 \cdot (x_1)^2 + 0{,}9 \cdot (x_2)^2 = 0{,}09 + 3{,}9^2$
$0{,}1 \cdot (x_1)^2 + 0{,}9 \cdot (x_2)^2 = 0{,}09 + 15{,}21$
$0{,}1 \cdot (x_1)^2 + 0{,}9 \cdot (x_2)^2 = 15{,}3$ умножаем на 10:

$(x_1)^2 + 9 \cdot (x_2)^2 = 153$

Подставим x_1, из первого уравнения системы $x_1 = -9x_2 + 39$ в полученное:

$(-9x_2 + 39)^2 + 9 \cdot (x_2)^2 = 153.$

По формуле $(а + в)^2 = а^2 + 2ав + в^2$ упрощаем:

$81x_2^2 - 2 \cdot 9 \cdot 39 \cdot x_2 + 1521 + 9 \cdot (x_2)^2 = 153$

$90x_2^2 - 2 \cdot 9 \cdot 39 \cdot x_2 + 1521 - 153 = 0$

$90x_2^2 - 2 \cdot 9 \cdot 39 \cdot x_2 + 1368 = 0$

Разделим это уравнение на 18:

$5x_2^2 - 39x_2 + 76 = 0$

Решаем квадратное уравнение по формуле:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-39) \pm \sqrt{(-39)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 76}}{2 \cdot 5} = \frac{39 \pm \sqrt{1521 - 1520}}{10} = \frac{39 \pm 1}{10}$$

Получаем два значения для x_2:

1) $x_2 = \frac{39+1}{10} = 4,$

2) $x_2 = \frac{39-1}{10} = 3{,}8.$

Вычисляем значения для x_1, зная, что $x_1 = -9x_2 + 39$:

1) $x_2 = \frac{39+1}{10} = 4.$

Тогда получим $x_1 = -9 \cdot 4 + 39 = -36 + 39 = 3.$

По условию задачи $x_1 < x_2$, следовательно, эти найденные значения подходят.

2)

$x_2 = \frac{39-1}{10} = 3{,}8.$

$x_1 = -9 \cdot 3{,}8 + 39 = -34{,}2 + 39 = 4{,}8.$

По условию задачи $x_1 < x_2$, следовательно, эти значения не подходят.

Выполним проверку правильности вычислений. Получили уточнённый закон распределения:

x_i	3	4
P_i	0,1	0,9

По условию M(X) =3,9; проверяем M(X) = $3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}9 = 0{,}3 + 3{,}6 = 3{,}9.$

Ответ: закон распределения этой случайной величины:

x_i	3	4
P_i	0,1	0,9

Задача 27. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения вероятностей (интегральной функцией) F(X):

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<0\\ \frac{1}{10}(x^3+x), & \text{если} \quad 0\le x\le 2\\ 1, & \text{если} \quad x>2\end{cases}$$

Требуется: а) построить графики функции распределения F(X); б) найти плотность вероятности (дифференциальную функцию) f(X) и построить графики плотности вероятностей f(X); в) вычислить математическое ожидание M(X); г) вычислить дисперсию D(X); д) вычислить среднее квадратическое отклонение σ (X).

Решение:

а. Построим график функции распределения F(x).

Для построения кубической параболы F(x) $=\left(\frac{1}{10}\right)(x^3+x)$ вычислим несколько значений F(x) из отрезка (0; 2), например, F(0), F(1) и F(2):

F(0)=0, F(2)=1,

$$F(1)=\frac{1}{10}(1^3+1)=0,2$$

и аккуратно строим кусок кубической параболы $y=\frac{1}{10}(x^3+x)$ и строим прямые F(x)= 0 на промежутке x <0 и F(x)=1 для всех x >2, по условию задано F(x <0)=0, F(x >2)=1.

На Рисунке 6 построен график заданной функции распределения.

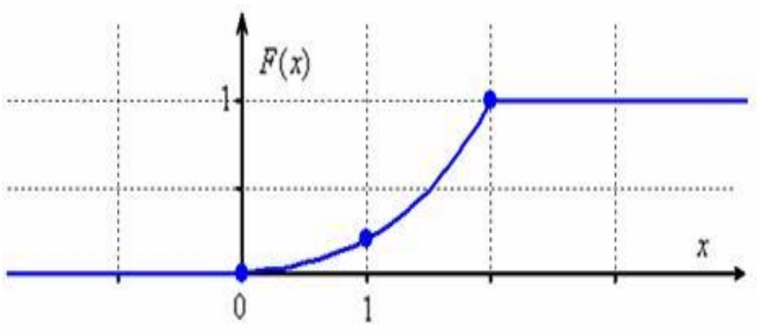


Рисунок 6

Функция распределения $F(x) = P(X < x)$ описывает вероятность того, что случайная величина X примет значение, *меньшее*, чем переменная x, «пробегающая» все значения от $-\infty$ до $+\infty$. Данная функция изменяется в пределах $0 \le F(x) \le 1$ и не убывает (т. к. «накапливает» вероятности), а также является непрерывной.

б. Случайная величина X принимает случайные значения из отрезка [0; 2], и какие из них более вероятны, а какие – менее, наглядно показывает *функция плотности распределения вероятностей*:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0 \\ \frac{1}{10}(3x^2+1), & \text{если} \quad 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{если} \quad x > 2 \end{cases}$$

Строим график функции плотности распределения вероятностей f(x) непрерывной случайной величины. Смотри Рисунок 7.

$f(x) = \frac{1}{10}(3x^2 + 1)$ на отрезке $0 \le x \le 2$:

$$f(0) = \frac{1}{10},\ f(1) = \frac{4}{10},\ f(2) = \frac{13}{10}.$$

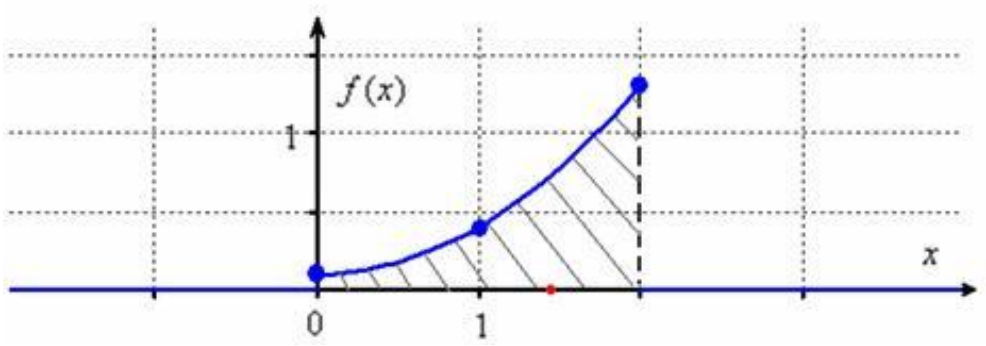


Рисунок 7

В отличие от функции распределения F(X) функция плотности f(X) **может быть разрывной** и может принимать значения больше единицы (как и в нашем случае); может как убывать, так и возрастать. Однако f(X) неотрицательна:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$f(X) \geq 0$ и обладает свойством, которое лучше всегда проверять:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \frac{1}{10}\int_{0}^{2}(3x^2+1)dx + \int_{2}^{+\infty} 0 \cdot dx =$$
$$= 0 + \frac{1}{10}(x^3+x)\Big|_0^2 + 0 = \frac{1}{10}(8+2-0-0) = \frac{1}{10}\cdot 10 = 1$$

Данный результат равен заштрихованной площади и с вероятностной точки зрения означает тот факт, что случайная величина X достоверно примет одно из значений отрезка [0; 2].

Причём по рисунку 7 хорошо видно, что значения из части отрезка (1; 2) гораздо более вероятны, чем значения из части отрезка (0; 1). И эти вероятности оцениваются кусками площади, а не значениями функции f(X).

Для проверки вычислим вероятность того, что случайная величина X примет значение из промежутка [0; 1]:

$$P(0 \leq X \leq 1) = \int_{0}^{1} f(x)dx = F(x)\Big|_0^1 = \frac{1}{10}(x^3+x)\Big|_0^1 = \frac{1}{10}(1+1-0-0) = \frac{1}{5}$$

$P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 \left(\frac{1}{10}(3x^2+1)\right)dx = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ – вероятность того, что случайная величина X примет значение из промежутка [1; 2].

Вычисления подтверждают вывод, выполненный при помощи графика f(X), убеждаемся, $\frac{4}{5} > \frac{1}{5}$.

в. Математическое ожидание (среднеожидаемое значение) случайной величины X должно находиться в промежутке [0; 2], причём ближе к его правому концу (поскольку там выше плотность вероятности).

Убедимся в этом аналитически. По формуле вычисления математического ожидания случайной величины $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x) \cdot dx$:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x\cdot 0 \cdot dx + \frac{1}{10}\int_{0}^{2} x(3x^2+1)dx + \int_{2}^{+\infty} x \cdot 0 \cdot dx = 0 + \frac{1}{10}\int_{0}^{2}(3x^3+x)dx + 0 =$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{3x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^2 = \frac{1}{10} \cdot (12 + 2 - 0 - 0) = \frac{14}{10} = \frac{7}{5} = 1{,}4$$

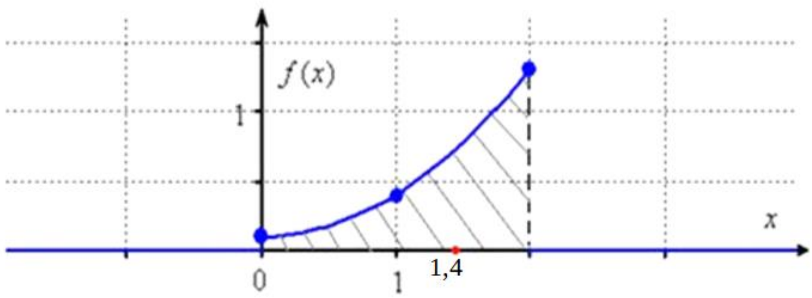


Рисунок 8

На Рисунке 8 математическое ожидание на графике функции плотности вероятностей отмечено точкой x = 1,4.

Если промежуток конечен, то можно сразу записывать, что математическое ожидание равно определенному интегралу:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \frac{1}{10} \int_0^2 x(3x^2 + 1) dx = \ldots = \frac{7}{5}$$

M(X) = 7/5 = 1,4.

г. Дисперсию (меру рассеяния случайных значений относительно математического ожидания вычислим по формуле:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (M(X))^2,$$

где $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \frac{1}{10} \int_0^2 x^2 (3x^2 + 1) dx = \frac{1}{10} \int_0^2 (3x^4 + x^2) dx =$

$$= \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{3x^5}{5} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{96}{5} + \frac{8}{3} - 0 - 0 \right) = \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{288 + 40}{15} \right) = \frac{1}{10} \cdot \frac{328}{15} = \frac{164}{75},$$

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0 \\ \frac{1}{10}(3x^2 + 1), & \text{если} \quad 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{если} \quad x > 2 \end{cases}$$

Для удобства сначала нашли интеграл. M(X) = 7/5 = 1,4 (вычислили в предыдущем пункте).

Подставляем в формулу дисперсии:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M(X))^2$$

и получим:

$$D(X) = \frac{164}{75} - \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{164}{75} - \frac{49}{25} = \frac{164}{75} - \frac{147}{75} = \frac{17}{75} \approx 0,23.$$

д. Среднее квадратическое отклонение:

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$,

σ (X) = $\sqrt{D(X)}$= $\sqrt{0,23}$≈ 0,48.

Ответ: $M(X) = \frac{7}{5}, \quad D(X) = \frac{17}{75}, \quad \sigma(X) = \sqrt{\frac{17}{75}} \approx 0,48$.

Задача 28. Заданы среднее квадратическое отклонение σ=3 нормально распределённой случайной величины X, выборочная средняя $\bar{x}_в$ = 18,21, объем выборки n = 100. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания α с заданной надёжностью γ = 0,95.

Решение:

Воспользуемся формулой $\gamma = 2\Phi(t) = 2\Phi\left[\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right]$.

Тогда 0,95 = 2Φ(t), Φ(t) = 0,95/2 = 0,475.

Найдём **t** для значения Φ(t) = 0,475 из таблицы Приложения 2.
Получаем t =1,96.
Вычислим точность оценки: $\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1.96\cdot 3}{10} = 0{,}59$.

Найдём доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания с заданной надёжностью γ =0,59:

$$\bar{x} - \delta < \alpha < \bar{x} + \delta\ ,$$

выборочная средняя $\bar{x}_в$ = 18,21 и среднее квадратическое отклонение σ =3 заданы.

$$18{,}21-0{,}59 < \alpha < 18{,}21+0{,}59;$$

$$17{,}62 < \alpha < 18{,}80.$$

Ответ: доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания α с заданной надёжностью γ = 0,95 равен (17,62; 18,80).

VII. Список рекомендуемой литературы

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 12-е изд. – Москва : Юрайт, 2014. – 479 с. – Текст : непосредственный.

2. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 11-е изд., перераб. и доп. – Москва : Юрайт, 2014. – 404 с. – Текст : непосредственный.

3. Антипов, Ю. Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие / Ю. Н. Антипов, Ж. И. Виницкая, Т. А. Кутузова. – Калининград, 2021. – 196 с.

4. Зайцев, И. А. Высшая математика : учеб. для вузов. – 3-е изд., испр. – М. : Дрофа, 2004. – 400 с.

VIII. Приложения

Приложение 1. Таблица значений функции φ(x)

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

Таблица 2: Таблица значений функции φ(x)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3508	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1.2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1.3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0978	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0868	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1.9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551

Окончание Приложения 1

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0839	0332	0325	0317	0310	0803	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0008	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 2. Таблица значений функции Ф(x)

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

Таблица 3: Таблица значений функции Ф(x)

x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)
0,00	0,0000	0,23	0,0910	0,46	0,1772	0,69	0,2549
0,01	0,0040	0,24	0,0948	0,47	0,1808	0,70	0,2580
0,02	0,0080	0,25	0,0987	0,48	0,1844	0,71	0,2611
0,03	0,0120	0,26	0,1026	0,49	0,1879	0,72	0,2642
0,04	0,0160	0,27	0,1064	0,50	0,1915	0,73	0,2673
0,05	0,0199	0,28	0,1103	0,51	0,1950	0,74	0,2703
0,06	0,0239	0,29	0,1141	0,52	0,1985	0,75	0,2734
0,07	0,0279	0,30	0,1179	0,53	0,2019	0,76	0,2764
0,08	0,0319	0,31	O1217	0,54	0,2054	0,77	0,2794
0,09	0,0359	0,32	0,1255	0,55	0,2088	0,78	0,2823
0,10	0,0398	0,33	0,1293	0,56	0,2123	0,79	0,2852
0,11	0,0438	0,34	0,1331	0,57	0,2157	0,80	0,2881
0,12	0,0478	0,35	0,1368	0,58	0,2190	0,81	0,2910
0,13	0,0517	0,36	0,140б	0,59	0,2224	0,82	0,2939
0,14	0,0557	0,37	0,1443	0,60	0,2257	0,83	0,2967
0,15	0,0596	0,38	0,1480	0,61	0,2291	0,84	0,2995
0,16	0.0636	0,39	0,I5I7	0,62	0,2324	0,85	0,3023
0,17	0,0675	0,40	0,1554	0,63	0,2357	0,86	0,3051
0,18	0,0714	0.41	0,1591	0,64	0,2389	0,87	0,3078
0,19	0,0753	0,42	0,1628	0,65	0,2422	0,88	0,3106
0,20	0,0793	0,43	0,1664	0,66	0.2454	0,89	0,3133
0,21	0,0832	0,44	0,1700	0,67	0,2486	0,90	0,3159
0,22	0,0871	0,45	0,1736	0,68	0,2517	0,91	0,3186

x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)
0,92	0,3212	1,18	0,3810	1,44	0,4251	1,70	0.4554
0,93	0,3238	1,19	0,3830	1,45	0.4265	1,71	0,4564
0,94	0,3264	1,20	0,3849	1.46	0,4279	1,72	0,4573
0,95	0,3289	1,21	0.3869	1,47	0,4292	1.73	0,4582
0.96	0,3315	1,22	0,3883	1,48	0,4306	1.74	0.4591
0,97	0,3340	1,23	0,3907	1,49	0,4319	1,75	0.4599
0.98	0,3365	1,24	0,3925	1,50	0,4332	1,76	0.4608
0,99	0,3389	1,25	0,3944	1,51	0,4345	1,77	0,4616
1,00	0,3413	1,26	0,3962	1,52	0,4357	1,78	0,4625
1,01	0,3438	1,27	0,3980	1,58	0,4370	1.79	0,4633
1,02	0,3461	1,28	0,3997	1,54	0,4382	1,80	0,4641
1,03	0,3485	1,29	0,4015	1.55	0,4394	1,81	0,4649
1,04	0,3508	1.30	0,4032	1,56	0,4406	1.82	С,4656
1,05	0,3531	1.31	0,4049	1,57	0,4418	1.83	0,4664
1,06	0,3554	1,32	0,4066	1,58	0,4429	1.84	0,4671
1,07	0,3577	1,33	0,4082	1,59	0,4441	1,85	0,4678
1,08	0,3599	1,34	0,4099	1,60	0,4452	1.86	0,4686
1,09	0,3621	1,35	0,4115	1,61	0,4463	1,87	0,4693
1,10	0,3643	1,36	0,4131	1,62	0,4474	1,88	0,4699
1,11	0,3665	1,37	0,4147	1,63	0,4484	1.89	0,4706
1.12	0,3686	1.38	0,4162	1,64	0.4495	1,90	0.4713
1,13	0,3708	1,39	0,4177	1,65	0,4505	1,91	0,4719
1,14	0,3729	1,40	0,4192	1,66	0,4515	1,92	0.4726
1.15	0.3749	1,41	0,4207	1,67	0,4525	1,93	0.4732
1,16	0,3770	1,42	0.4222	1,68	0.4585	1,94	0,4738
1,17	0,3790	1,43	0.4236	1,69	0,4545	1.95	0,4744

Окончание Приложения 2

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
1,96	0,4750	2,24	0,4875	2,56	0,4948	2,88	0,4980
1,97	0,4756	2,26	0.4881	2,58	0,4951	2,90	0,4981
1,98	0,4761	2,28	0,4887	2,60	0,4953	2,92	0,4982
1,99	0,4767	2,30	0.4893	2,62	0,4956	2,94	0,4984
2,00	0,4772	2,32	0,4898	2,64	0,4959	2,96	0 ,4985
2,02	0,4783	2,34	0,4904	2,66	0,4961	2,98	0,4986
2,04	0,4793	2,36	0,4959	2,68	0,4963	3,00	0,49865
2,06	0.4803	2.38	0,4913	2,70	0,4965	3,20	0,49931
2,08	0,4812	2,40	0,4918	2,72	0,4967	3,40	0,49966
2,10	0,4821	2,42	0,4922	2,74	0,4969	3,60	0,499841
2,12	0,4830	2,44	0,4927	2,76	0,4971	3,80	0,499928
2,14	0,4838	2,46	0,4981	2,78	0,4973	4,00	0,499968
2,16	0,4846	2,48	0,4934	2,80	0,4974	4,50	0,499997
2,18	0,4854	2,50	0,4938	2,82	0,4976	5,00	0,499997
2,20	0,4861	2,52	0,4941	2,84	0,4977		
2,22	0,4868	2,54	0,4945	2,86	0,4979		

Приложение 3. Образец титульного листа контрольной работы студента

ФГБОУ ВО «КГТУ»

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

ВЫПОЛНИЛ СТУДЕНТ

____

ГРУППА ______________________

ВАРИАНТ________

СДАНО НА ПРОВЕРКУ_________________

ПРОВЕРИЛ _____________

_________________________ «Зачтено»

Калининград 2023

Локальный электронный методический материал

Надежда Петровна Зубарева

Теория вероятностей и математическая статистика

Учебно-методическое пособие по выполнению контрольной работы
для студентов очно-заочной формы обучения по направлению подготовки
08.03.01 – Строительство

Редактор М. А. Дмитриева

Уч.-изд. л. 3,2. Печ. л. 4,4.

Издательство федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Калининградский государственный технический университет».
236022, Калининград, Советский проспект, 1.