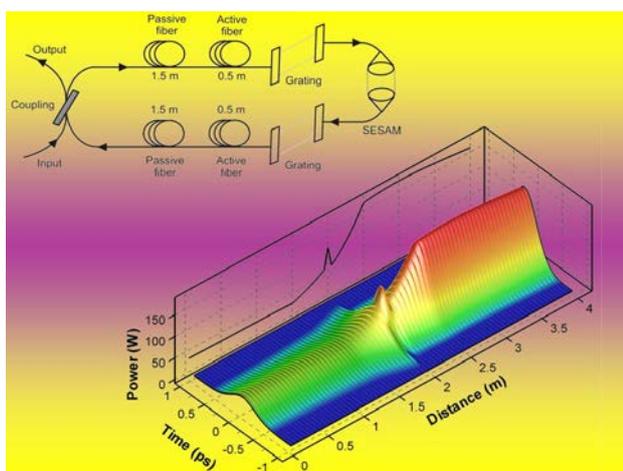


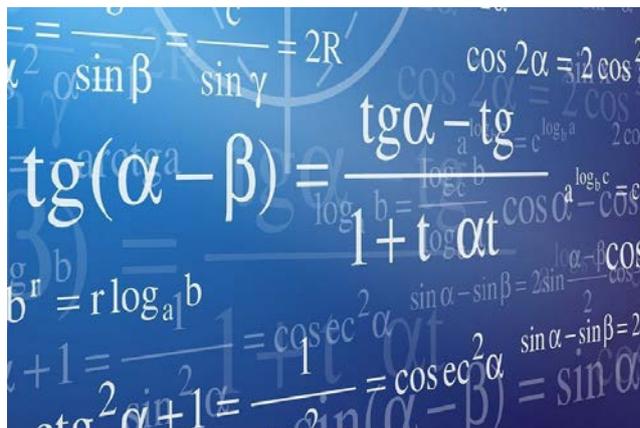
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Калининградский государственный технический университет»

О. Я. МЕЗЕНОВА, Н. Ю. МЕЗЕНОВА

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПИЩЕВОЙ БИОТЕХНОЛОГИИ



Учебно-методическое пособие  
для лабораторных работ по дисциплине  
«Математическое моделирование»  
для студентов бакалавриата по направлению  
19.03.01 «Биотехнология»  
(профиль – «Пищевая биотехнология»)



Калининград  
Издательство ФГБОУ ВО «КГТУ»  
2021

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Калининградский государственный технический университет»

**О. Я. МЕЗЕНОВА, Н. Ю. МЕЗЕНОВА**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
В ПИЩЕВОЙ БИОТЕХНОЛОГИИ**

Учебно-методическое пособие для лабораторных работ по дисциплине  
«Математическое моделирование»  
для студентов бакалавриата по направлению подготовки  
**19.03.01 «Биотехнология» (профиль – «Пищевая биотехнология»)**

Калининград  
Издательство ФГБОУ ВО «КГТУ»

2021

Рецензент

зав. кафедрой технологии продуктов питания ФГБОУ ВО «Дальневосточный государственный технический рыбохозяйственный университет (Дальрыбвтуз)», профессор, доктор технических наук С.Н. Максимова

**Мезенова, О. Я., Мезенова, Н. Ю.**

Математическое моделирование в пищевой биотехнологии / О. Я. Мезенова, Н. Ю. Мезенова. – Калининград: Издательство ФГБОУ ВО «КГТУ», 2021. – 103 с.

В учебно-методическом пособии представлены материалы по организации и проведению лабораторных работ по дисциплине «Математическое моделирование», направленные на формирование у обучающихся компетенций по формализации объектов пищевой биотехнологии. Лабораторные работы посвящены математическому моделированию рецептур пищевых смесей, графическому моделированию органолептической оценки пищевых продуктов, проектированию продуктов пищевой биотехнологии по энергетической ценности, аппроксимации экспериментальных данных математическими функциями с применением метода наименьших квадратов, планированию эксперимента и оптимизация биотехнологического процесса и рецептур продуктов. В каждой лабораторной работе приведены цель, задания, методические указания и справочно-теоретический материал, пример выполнения задания, перечень индивидуальных заданий, литература и вопросы для самопроверки. Лабораторный практикум предназначен для студентов направления подготовки 19.03.01 Биотехнология (профиль «Пищевая биотехнология»); он также будет полезен студентам смежных направлений, занимающихся формализацией, моделированием и проектированием в пищевых производствах.

Табл. 33, рис. 16, список лит. – 47 наименований.

Учебно-методическое пособие рассмотрено на учебно-методической комиссии механико-технологического факультета ФГБОУ ВО «КГТУ», протокол № 6 от 28.01. 2021.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

	ВВЕДЕНИЕ.....	5
1	Лабораторная работа № 1 ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА МОДЕЛИРОВАНИЯ РЕЦЕПТУР СМЕСЕЙ КАК ОБЪЕКТОВ ПИЩЕВОЙ БИОТЕХНОЛОГИИ .....	7
2	Лабораторная работа № 2 МОДЕЛИРОВАНИЕ ОРГАНОЛЕПТИЧЕСКОЙ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ПИЩЕВЫХ ПРОДУКТОВ.....	24
3	Лабораторная работа № 3 МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЦЕПТУР ПРОДУКТОВ ПИЩЕВОЙ БИОТЕХНОЛОГИИ ПО ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ЦЕННОСТИ.....	41
4	Лабораторная работа № 4 АППРОКСИМАЦИЯ ДАННЫХ ПИЩЕВОЙ СИСТЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ.....	57
5	Лабораторная работа № 5 ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА И ОПТИМИЗАЦИЯ БИОТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА С ПРИМЕНЕНИЕМ ОРТОГОНАЛЬНОГО ЦЕНТРАЛЬНОГО КОМПОЗИЦИОННОГО ПЛАНА ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ДВУХ ФАКТОРОВ.....	70
6	Лабораторная работа № 6 МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ РЕЦЕПТУР ПИЩЕВЫХ БИОПРОДУКТОВ ПО ТРЕМ ФАКТОРАМ .....	92

## ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Математическое моделирование» является важной дисциплиной при подготовке кадров в бакалавриате по направлению «Биотехнология» по профилю «Пищевая биотехнология», поскольку формирует у выпускников компетенции, связанные с моделированием, планированием, оптимизацией и проектированием биотехнологических процессов и продуктов пищевой биотехнологии.

Анализ развития пищевой и биотехнологической промышленности показывает, что система технологий является осью, вокруг которой формируются новые производства. Основными методологическими принципами анализа прикладных биотехнологий являются системный анализ, моделирование и прогнозирование.

В основе системных исследований пищевых биотехнологий, как правило, лежат классификационные схемы технологий и их признаков. Научный подход к исследованию сложного объекта, каким является пищевая биотехнология, должен основываться на определении состояний этого объекта, описании этих состояний в динамике, прогнозе этой динамики и на их основе – выработке управляющих воздействий.

Для моделирования пищевых биотехнологий необходимо учитывать объективную информационную неопределенность, обусловленную нечеткостью характеристик сырьевых компонентов, отсутствием надежных и недорогих экспресс-анализаторов для определения качественных показателей в цикле «сырье - полуфабрикат - готовый продукт», большой размерностью технологических задач.

Математическое моделирование пищевых биотехнологий нужно рассматривать как процесс построения и изучения иерархической системы автономных математических моделей. Выбор уровня абстрагирования при математическом моделировании биотехнологий предусматривается теми задачами, которые

должны быть решены с помощью построенной модели, информации, а также конечной целью исследования.

В данном пособии приведены лабораторные работы, направленные на развитие знаний, умений и навыков по формализации некоторых аспектов в сложных процессах формирования заданного качества продуктов пищевой биотехнологии: моделирование рецептур, органолептической оценки качества, аппроксимации экспериментальных данных, оптимизации технологических режимов и компонентного состава.

Выполнение всех лабораторных работ позволит студентам-биотехнологам в дальнейшем использовать полученные знания в научных исследованиях при проведении экспериментальных работ, необходимых в процессе проектирования продуктов и производств пищевой биотехнологии.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов бакалавриата 19.03.01 «Биотехнология» (профиль «Пищевая биотехнология»), но оно будет полезно и студентам смежных направлений и специальностей, занимающихся моделированием, проектированием, оптимизацией и формализацией в пищевой промышленности.

# **Лабораторная работа № 1**

## **ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА МОДЕЛИРОВАНИЯ РЕЦЕПТУР СМЕСЕЙ КАК ОБЪЕКТОВ ПИЩЕВОЙ БИОТЕХНОЛОГИИ**

**Цель занятия:** формирование знаний, умений и навыков у обучающихся по формализации процесса моделирования рецептур смесей на примере детского питания путем обоснования методологии разработки модели заданного объекта пищевой биотехнологии.

**Задание:** Построить методологическую схему модели рецептуры смеси детского питания (варианты объектов моделирования приведены в п. 4). Проверить адекватность модели по согласованию полученных по модели и заданных целевых характеристик. Усовершенствовать модель (при необходимости). Сделать вывод по результатам выполнения работы.

### **1.1 Методические указания по выполнению лабораторной работы**

1. Для подготовки к лабораторному занятию необходимо изучить справочно-теоретический материал, касающийся основных определений и понятий, связанных с лабораторной работой (п. 2).

2. Для самоконтроля приобретенных теоретических знаний необходимо руководствоваться вопросами, представленными в конце данной работы.

3. Ознакомиться с примером формализации методологии моделирования рецептуры фруктово-овощного пюре для детского питания (п. 3).

4. Построить схему моделирования рецептуры смеси детского питания по одному из предлагаемых объектов моделирования (п. 4):

- Выбрать объект моделирования пищевой биотехнологии из предложенного перечня (см. п. 4. Пищевые смеси для детского питания).
- Обосновать вид и состав объекта моделирования.

- Изобразить графически составляющие элементы объекта моделирования.
- Определить цель моделирования и выразить ее конкретными характеристиками.
- Описать взаимодействие составляющих объекта моделирования.
- Провести моделирование рецептурных смесей с учетом взаимодействия и потенциальных помех.
- Апробировать функционирование модели рецептуры по предложенному алгоритму.
- Получить и интерпретировать результаты моделирования в терминах реального времени (соответствует ли результат ожиданиям и насколько).
- Проверить модель на адекватность, т. е. обосновать, как результат моделирования согласуется с ожиданиями и следствиями из модели. Если согласование достигнуто, то модель считаем адекватной.
- Если модель не соответствует ожиданиям (не адекватна), то она модифицируется (усложняется или упрощается), совершенствуется алгоритм моделирования (добавляются или убираются факторы).
- Проверка адекватности усовершенствованной модели повторяется.
- Сделать вывод по результатам моделирования.

5. Оформить отчет о лабораторном занятии, который должен содержать ход и результаты работы, а также письменные ответы на вопросы для самопроверки.

## 1.2 ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Введем основные определения, необходимые для выполнения лабораторной работы [1].

**Модель** – это упрощенный аналог реального объекта или явления, представляющий законы поведения входящих в объект частей и их связи.

**Моделирование** – построение модели и ее анализ. Моделирование состоит из трех этапов: анализ реального явления и построение (синтез) его описания; анализ построенного описания формальными средствами (например, с помощью компьютера); интерпретация результатов, полученных на модели, в терминах реального явления.

**Система** – совокупность частей (компонентов или ингредиентов), которая обладает как их свойствами, так и новыми свойствами, не присущими каждой из частей.

**Биотехнологическая система** – совокупность взаимосвязанных подсистем (животная ткань, продукты переработки, аппараты, процессы переработки и т. п.), в которых осуществляется или осуществлена определенная последовательность превращений (химических, биологических, механических, технологических). Каждую подсистему, например, пищевое сырье, продуктовую массу, готовый продукт можно рассматривать как самостоятельную биотехнологическую систему со своей структурой.

**Система технологий** – целостная система процессов с присущей ей структурой, взаимосвязями и организацией отдельных операций, стабильностью, целостностью, устойчивостью и другими свойствами.

**Технологическая система** – это «совокупность функционально связанных средств технологического оснащения, предметов производства и исполнителей для выполнения в регламентированных условиях производства заданных технологических процессов или операций».

**Системы информационные** – совокупность программно-аппаратных средств, предназначенных для приема/передачи, хранения и обработки информации.

**Пищевая ценность** продуктов для детского питания – совокупность свойств пищевых продуктов, при наличии которых удовлетворяются физиологические потребности детского организма в необходимых веществах и энергии.

**Продукты для детского питания** – пищевые продукты, предназначенные для питания детей в возрасте до 14 лет, отвечающие соответствующим физиологическим потребностям детского организма и не причиняющие вред здоровью ребенка.

**Виды продуктов детского питания:** сухие молочные смеси; пюре из овощей, фруктов, злаков, мяса, рыбы и их смесей; молочная продукция (творожки, йогурты, кефир и т. д.); крупы и каши (в том числе, быстрорастворимые); чай, соки, компоты, морсы; консервы, готовые супы; кондитерская продукция – хлебобулочная, печенье, шоколад, конфеты и т. д.

**Диетические (лечебные и профилактические) пищевые продукты** – пищевые продукты, предназначенные для включения в рационы лечебного и профилактического питания с целью замены традиционных продуктов, не рекомендуемых для отдельных лиц по медицинским показаниям. Они отличаются от традиционных пищевых продуктов по химическому составу, энергетической ценности или физическим свойствам.

**Дети раннего возраста** – дети в возрасте от рождения до 3 лет.

**Дети дошкольного возраста** – дети в возрасте от 3 до 6 лет.

**Дети школьного возраста** – дети в возрасте от 6 до 14 лет.

**Детские травяные чаи** – пищевые продукты, изготовленные на основе трав и экстрактов трав.

**Безопасность продуктов для детского питания** – состояния обоснованной уверенности в том, что пищевые продукты при обычных условиях их использования не являются вредными и не представляют опасности для здоровья нынешнего и будущих поколений.

**Адаптированные молочные смеси (заменители женского молока)** – пищевые продукты в жидкой или порошкообразной форме, изготовленные на основе коровьего молока, молока других сельскохозяйственных животных, белков сои, предназначенные для использования в качестве заменителей жен-

ского молока и максимально приближенные к нему по химическому составу с целью удовлетворения физиологических потребностей детей раннего возраста;

**Продукты прикорма** – пищевые продукты, вводимые в рацион детям первого года жизни в качестве дополнения к женскому молоку, его заменителям или последующим смесям, изготовленные на основе продуктов животного и/или растительного происхождения с учетом возрастных физиологических особенностей;

**Пищевые продукты для питания детей раннего возраста** – продукты, предназначенные для использования в качестве продуктов прикорма или в качестве самостоятельных пищевых продуктов для детского питания, и включают в себя следующие группы:

**а) зерновые** – пищевые продукты, изготовленные из различных видов муки и крупы, в том числе с добавлением незерновых ингредиентов в количестве не более 15 %;

**б) зерно-молочные** – пищевые продукты, изготовленные из различных видов муки и крупы с добавлением молока в количестве не менее 25 % от массы продукта, в том числе с добавлением незерновых ингредиентов в количестве не более 15 %;

**в) фруктово-овощные** – пищевые продукты, изготовленные из фруктов, овощей, ягод, в том числе с добавлением иных ингредиентов, в количестве не более 20 % от массы продукта;

**г) фруктово-молочные** – пищевые продукты, изготовленные из фруктовых, ягодных и фруктово-овощных пюре с добавлением молочных продуктов в количестве не более 25 % от массы продукта, а также других ингредиентов в количестве не более 15 %;

**д) фруктово-зерновые** – пищевые продукты, изготовленные из фруктовых, ягодных и фруктово-овощных пюре с добавлением различных видов муки, круп и хлопьев в количестве не более 25 % от массы продукта;

**е) мясные** – пищевые продукты, изготовленные из различных видов мяса животных и птиц, содержащие не менее 40 % мясного компонента от общей массы продукта;

**ж) продукты из рыбы и нерыбных объектов промысла** – пищевые продукты, изготовленные из рыбы и нерыбных объектов промысла, содержащие не менее 40 % компонента от общей массы продукта;

**з) мясо-растительные и рыбо-растительные** – пищевые продукты, изготовленные из различного вида мяса или рыбы с добавлением растительных компонентов (плодов, овощей, круп, муки), содержащие не менее 20 % мясного или рыбного компонента от общей массы продукта;

**и) растительно-мясные и растительно-рыбные** – пищевые продукты, изготовленные из растительных компонентов (плодов, овощей, круп, муки) с добавлением мяса или рыбы, содержащие не менее 8 % мясного или рыбного компонента от общей массы продукта;

**к) молочные** – пищевые продукты, изготовленные из коровьего молока и молока других сельскохозяйственных животных, в том числе с добавлением немолочных ингредиентов в количестве не более 20 % от общей массы продукта;

**л) комбинированные** – пищевые продукты, сочетающие в себе свойства различных групп пищевых продуктов, при этом не относящиеся ни к одной из вышеперечисленных групп.

**Продукты для питания детей дошкольного (с 3 до 6 лет) и школьного (от 6 до 14 лет) возраста** – пищевые продукты, предназначенные для питания детей указанных возрастных групп, которые отвечают соответствующим требованиям к показателям безопасности.

**Пюре фруктовое (фруктово-овощное):** пищевой продукт, несброженный, но способный к брожению, полученный путем измельчения и (или) протирания цельных или очищенных от кожуры свежих, или сохраненных свежими, или быстрозамороженных фруктов и овощей, одного или нескольких видов, предварительно подвергнутых термической обработке (шпарке или варке), без

отделения сока и избыточной мякоти, консервированное физическими способами, кроме обработки ионизирующим излучением, предназначенный для непосредственного употребления в пищу.

**Специализированные продукты для лечебного питания детей раннего возраста** – пищевые продукты диетического (лечебного и профилактического) питания, химический состав которых соответствует особенностям метаболизма при соответствующей патологии у ребенка, в том числе:

- **антирефлюксные продукты** – продукты, содержащие загуститель для предотвращения срыгивания у детей;

- **безглютеновые продукты** – продукты из натуральных ингредиентов, изначально не содержащих глютен, уровень глютена в которых не превышает 20 мг/кг продукта.

- **безлактозные пищевые продукты** – продукты, в которых содержание лактозы не превышает 0,1 г на 1 л готового к употреблению продукта;

- **низколактозные пищевые продукты** – продукты, в которых содержание лактозы не превышает 10 г на 1 л готового к употреблению продукта;

- **продукты на основе полных или частичных гидролизатов белка** – продукты, изготовленные из белков молока коровьего, сои, подвергнутых полному или частичному гидролизу (соответственно);

- **продукты со сниженным содержанием фенилаланина** – продукты из гидролизатов белков, освобожденных от фенилаланина или из смеси аминокислот без фенилаланина;

- **продукты для энтерального питания** – продукты, предназначенные для питания детей, не способных к самостоятельному питанию.

**Целевые характеристики объектов моделирования – пищевых смесей**

- совокупность физико-химических, реологических, оптических, электрофизических, органолептических и других характеристик системы.

**Компоненты (ингредиенты)** – это независимые составные части системы. Число компонентов может изменяться от одного до бесконечности. В зави-

симости от числа компонентов системы подразделяются на одно-, двух-, трех- и многокомпонентные.

**Смесь** – это система, независимые составные части которой не вступают в физико-химические реакции при отсутствии внешних воздействий, приводящих к образованию новых компонентов или изменению массовых долей исходных компонентов. Составные части (элементы) системы объединены различными связующими силами (физическими, химическими и др.). Взаимодействие между частицами компонентов может осуществляться, например, посредством сил поверхностной активности. Смеси подразделяются также на *однородные* и *неоднородные*.

**Рецептурная смесь** – смесь, составленная в соответствии с заданными пропорциями по массовым долям (определяемыми технологическими условиями – рецептом).

**Моделирование рецептурных смесей** – составление системы уравнений вида:

$$Y_k = f_k(\{M_i\}, \{X_{ki}\}, \{P_{ki}\}) + N_k; k = 1, 2, \dots, K, \quad (1.1)$$

где  $\sum M_i = 1$ ;  $\sum M_i \geq 0$ ;  $i = 1, 2, \dots, I$ , где  $f_k(\{M_i\}, \{X_{ki}\}, \{P_{ki}\})$  – некоторая функциональная зависимость с настраиваемыми параметрами  $P_{ki}$ , описывающая  $k$ -ю характеристику смеси;  $M_i$  – массовая доля  $i$ -го компонента;  $X_{ki}$  –  $k$ -я характеристика  $M_i$ -го компонента;  $N_k$  – помеха, обусловленная как неидеальностью модели, ошибкой эксперимента, так и случайными отклонениями характеристик компонентов  $X_{ki}$  от стандартных значений.

Данное уравнение устанавливает зависимость между характеристиками системы и характеристиками ее компонентов, а также массовыми долями ее компонентов. В общем случае, как видно из (1), для синтеза моделей смесей необходимо задать конкретный вид функциональных зависимостей  $f_k(\{M_i\}, \{X_{ki}\}, \{P_{ki}\})$  и характер помех  $N_k$ . Обычно в качестве функциональных зависимостей задают полиномиальные зависимости (как в методах планирования эксперимента) или зависимости в виде разложений по ортогональным функциям

(как в методах аппроксимации зависимостей). В любом случае уточнение зависимостей сводится к проблеме параметрической идентификации модели (1) при известных функциях  $f_k$ .

**Основные принципы**, которым должна удовлетворять модель:

1. *Адекватность*. Этот принцип предусматривает соответствие модели целям исследования по уровню сложности и организации, а также соответствие реальной системе относительно выбранного множества свойств. До тех пор, пока не решен вопрос правильно ли отображает модель исследуемую систему, ценность модели незначительна.

2. *Соответствие модели решаемой задаче*. Модель должна строиться для решения определенного класса задач или конкретной задачи исследования системы. Попытки создания универсальной модели, нацеленной на решение большого числа разнообразных задач, приводят к такому усложнению, что она оказывается практически непригодной. Опыт показывает, что при решении каждой конкретной задачи нужно иметь свою модель, отражающую те аспекты системы, которые являются наиболее важными в данной задаче. Этот принцип связан с принципом адекватности.

3. *Упрощение при сохранении существенных свойств системы*. Модель должна быть в некоторых отношениях проще прототипа – в этом смысл моделирования. Чем сложнее рассматриваемая система, тем по возможности более упрощенным должно быть ее описание, умышленно утрирующее типичные и игнорирующее менее существенные свойства. Этот принцип может быть назван принципом абстрагирования от второстепенных деталей.

4. *Соответствие между требуемой точностью результатов моделирования и сложностью модели*.

Модели по своей природе всегда носят приближенный характер. Возникает вопрос, каким должно быть это приближение. С одной стороны, чтобы отразить все сколько-нибудь существенные свойства, модель необходимо детализировать. С другой стороны, строить модель, приближающуюся по сложности к реальной системе, очевидно, не имеет смысла. Она не должна быть настолько сложной, чтобы нахождение решения оказалось слишком затруднительным. Компромисс между этими двумя требованиями достигается нередко путем проб и ошибок. Практическими рекомендациями по уменьшению сложности моделей являются: изменение числа переменных, достигаемое либо исключением несущественных переменных,

либо их объединением. Нелинейная зависимость заменяется обычно линейной, дискретная функция распределения вероятностей – непрерывной. При снятии ограничений получается оптимистичное решение, при введении – пессимистичное. Варьируя ограничениями можно найти возможные граничные значения эффективности. Такой прием часто используется для нахождения предварительных оценок эффективности решений на этапе постановки задач.

5. *Баланс погрешностей различных видов.* В соответствии с принципом баланса необходимо добиваться, например, баланса систематической погрешности моделирования за счет отклонения модели от оригинала и погрешности исходных данных, точности отдельных элементов модели, систематической погрешности моделирования и случайной погрешности при интерпретации и осреднении результатов.

6. *Многовариантность реализаций элементов модели.* Разнообразие реализаций одного и того же элемента, отличающихся по точности (а следовательно, и по сложности), обеспечивает регулирование соотношения «точность/сложность».

7. *Блочное строение.* При соблюдении принципа блочного строения облегчается разработка сложных моделей и появляется возможность использования накопленного опыта и готовых блоков с минимальными связями между ними. Выделение блоков производится с учетом разделения модели по этапам и режимам функционирования системы.

### **1.3 ПРИМЕР МОДЕЛИРОВАНИЯ РЕЦЕПТУР ПИЩЕВЫХ СМЕСЕЙ**

**Задание:** *формализовать моделирование рецептуры фруктово-овощного пюре в форме консервов, предназначенных для детей дошкольного возраста (от 3 до 6 лет)*

1. Принимаем вид и состав объекта моделирования. Это: гомогенизированная однородная термообработанная тонкоизмельченная масса из фруктов (яблоки, сливы), овощей (тыква, морковь), крупы (рисовая), пищевых добавок

(сахароза, пектин), расфасованная в стерильную стеклянную тару и герметично укупоренная.

2. Представляем графически схему составляющих объекта моделирования – рецептуры фруктово-овощные пюре (рис. 3.1):

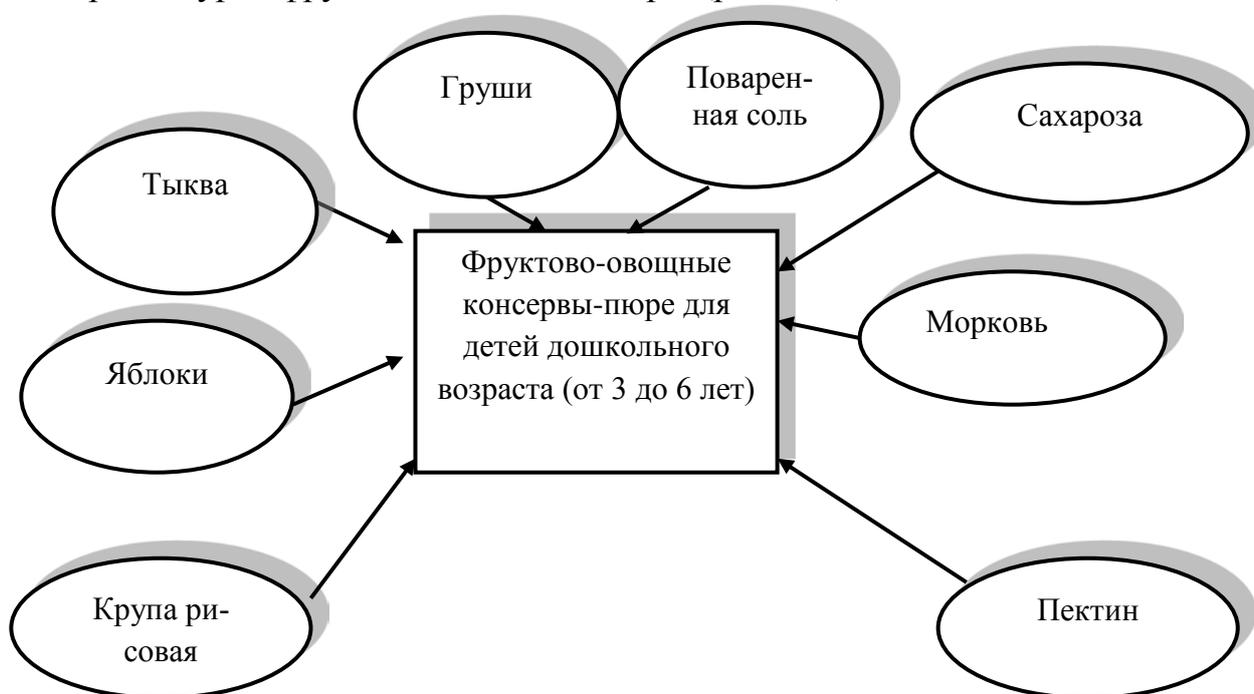


Рисунок 1.1 – Схема рецептуры фруктово-овощные пюре

3. Формулируем цель моделирования – создание фруктово-овощного пюре с привлекательными органолептическими показателями, безопасного для детей от 3 до 6 лет, обладающего показателями пищевой ценности и безопасности, приведенными в табл. 1.1 и 1.2.

Таблица 1.1 – Показатели пищевой ценности фруктово-овощного пюре для детей дошкольного возраста (от 3 до 6 лет) (в 100 г продукта)\*

Критерии и показатели	Единицы измерения	Допустимые уровни
Массовая доля сухих веществ	г	5-20
Общая кислотность	%, не более	1,3
Углеводы, в том числе добавленные сахара	г, не более	10
Поваренная соль	г, не более	0,6
<i>Витамины:</i> аскорбиновая кислота (витамин С)	мг, не более	75,0

\*Из требований ФЗ Технический регламент (проект) «О безопасности продуктов детского питания» выбираем относящиеся к моделируемому объекту (раздел 2 «Объекты для питания дошкольников и школьников», раздел 2.4. «Фруктовые и овощные консервы (соки, нектары, напитки, морсы, пюре; фруктово-молочные и фруктово-зерновые пюре; комбинированные продукты»)

4. Описываем взаимодействия составляющих объекта моделирования компонентов смеси по предложенному алгоритму:

- тыква и морковь очищаются, режутся на куски размером 1x1 см, бланшируются в небольшом количестве воды;
- яблоки и груши очищаются и нарезаются на куски размером 1x1 см;
- рисовая крупа проваривается в небольшом количестве воды;
- все компоненты смешиваются в устройстве с подогревом и мешалкой, в смесь добавляются пищевые добавки (сахароза, пектин, поваренная соль), смесь тщательно перемешивается до полной гомогенизации с одновременным провариванием при температуре 90 °С в течение 15 мин, деаэрируется (удаляется кислород);
- смесь расфасовывается в стеклянную стерильную тару емкостью 50–100 мл, которая герметично укупоривается.

5. Моделирование рецептуры фруктово-овощной смеси сводим к системе уравнений (1.2)– (1.5):

$$M_{\text{сух.в-ва}} = (M_{\text{тык}} \cdot m_{\text{тык}} + M_{\text{ябл}} \cdot m_{\text{ябл}} + M_{\text{гр}} \cdot m_{\text{гр}} + M_{\text{мор}} \cdot m_{\text{мор}} + M_{\text{рис}} \cdot m_{\text{рис}} + M_{\text{пек}} \cdot m_{\text{пек}} + M_{\text{сах}} \cdot m_{\text{сах}} + M_{\text{соль}} \cdot m_{\text{соль}}) + \text{Нк}, \quad (1.2)$$

$$U_{\text{углев.}} = (U_{\text{тык}} \cdot u_{\text{тык}} + U_{\text{ябл}} \cdot u_{\text{ябл}} + U_{\text{гр}} \cdot u_{\text{гр}} + U_{\text{мор}} \cdot u_{\text{мор}} + U_{\text{рис}} \cdot u_{\text{рис}} + U_{\text{пек}} \cdot u_{\text{пек}} + U_{\text{сах}} \cdot u_{\text{сах}} + U_{\text{соль}} \cdot u_{\text{соль}}) + \text{Нк}, \quad (1.3)$$

$$K_{\text{кисл}} = K_{\text{тык}} \cdot k_{\text{тык}} + K_{\text{ябл}} \cdot k_{\text{ябл}} + K_{\text{гр}} \cdot k_{\text{гр}} + K_{\text{мор}} \cdot k_{\text{мор}} + K_{\text{рис}} \cdot k_{\text{рис}} + K_{\text{пек}} \cdot k_{\text{пек}}) + \text{Нк}, \quad (1.4)$$

$$B_c = B_{\text{тык}} \cdot v_{\text{тык}} + B_{\text{ябл}} \cdot v_{\text{ябл}} + B_{\text{гр}} \cdot v_{\text{гр}} + B_{\text{мор}} \cdot v_{\text{мор}} + B_{\text{рис}} \cdot v_{\text{рис}}) + \text{Нк}, \quad (1.5)$$

где  $M$  и  $m$  – соответственно массовая доля сухих веществ в компоненте (г в 100 г) и его доля в смеси (в долях единицы);  $U$  и  $u$  – соответственно массовая доля углеводов в компоненте (г в 100 г) и его доля в смеси (в долях единицы);  $K$  и  $k$  – соответственно массовая доля органических кислот в компоненте (%) и их доля в смеси (в долях единицы);  $B$  и  $v$  – соответственно массовая доля витамина С в компоненте (мг в 100 г) и его доля в смеси (в долях единицы);  $\text{Нк}$  – потери компонента в результате термообработки и в виде остатков на оборудовании (принимается по результатам эксперимента или справочной литературе).

6. Проводим апробацию функционирования предложенной модели рецептуры фруктово-овощного пюре по следующему алгоритму (в условиях лаборатории):

- Подготовка компонентов рецептуры (мойка, очистка, резка на куски, проварка, дозирование). Принимаем следующую рецептуру пюре (табл. 1.2).

Таблица 1.2 – Рецептура смоделированного фруктово-овощного пюре, предназначенного для детского питания

Составляющая модели (пищевой компонент рецептуры)	Целевая характеристика (нормируемый показатель в компоненте)	Единицы измерения	Содержание в компоненте	Доля компонента в смеси, доли единицы
Тыква	Сухие вещества	г на 100 г	7,1	0,20
	Углеводы	г на 100 г	2,4	
	Кислоты	%	0,3	
	Витамин С	мг на 100 г	45	
Морковь	Сухие вещества	г на 100 г	6,7	0,20
	Углеводы	г на 100 г	4,2	
	Кислоты	%	0,2	
	Витамин С	мг на 100 г	38	
Яблоки	Сухие вещества	г на 100 г	4,6	0,20
	Углеводы	г на 100 г	3,8	
	Кислоты	%	0,5	
	Витамин С	мг на 100 г	55	
Груши	Сухие вещества	г на 100 г	5,2	0,20
	Углеводы	г на 100 г	4,1	
	Кислоты	%	0,1	
	Витамин С	мг на 100 г	21,1	
Рис	Сухие вещества	г на 100 г	91,1	0,15
	Углеводы	г на 100 г	22,3	
	Витамин С	мг на 100 г	7,1	
Поваренная соль	Сухие вещества	г на 100 г	92,0	0,002
Пектин	Сухие вещества	г на 100 г	92,3	0,018
Сахар	Сухие вещества	г на 100 г	93,2	0,03
	Углеводы	г на 100 г	100	

- Смешивание компонентов в устройстве с подогревом и мешалкой.
- Термообработка смеси при температуре 90 °С в течение 15 мин.
- Расфасовывание смеси в стеклянную стерильную тару емкостью 50 мл и ее герметичное укупоривание.

7. Реализуем модель путем изготовления смоделированного продукта и определения его химического состава по обоснованной системе уравнений

(1.2)–(1.5). В результате получаем следующие целевые характеристики фруктово-овощного пюре (табл. 1.3):

Таблица 1.3 – Показатели пищевой ценности фруктово-овощного пюре для детей дошкольного возраста, в 100 г продукта

Целевые характеристики	Единицы измерения	Значение характеристики по модели	Допустимые уровни
Массовая доля сухих веществ	г	24,07	5–20
Общая кислотность	%, не более	0,2	1,3
Углеводы, в том числе добавленные сахара	г, не более	9,25	10
Поваренная соль	г, не более	0,2	0,6
Аскорбиновая кислота (витамин С)	мг, не более	35,77	75,0

*Вывод:* табл. 1.3 следует, что смоделированное пюре не соответствует целевым характеристикам по показателю «массовая доля сухих веществ ( $23,03 > 20$  г /100 г – допустимого верхнего предела).

8. В результате того, что модель рецептуры не согласуется с целевыми характеристиками по показателю «массовая доля сухих веществ» (более 20 г/ 100 г), полученную модель считаем не адекватной.

9. Совершенствование алгоритма моделирования ведем добавлением в рецептуру воды и уменьшением количества риса в период формирования гомогенизированной термообработанной смеси. Усовершенствованная рецептура фруктово-овощного пюре приведена в табл. 1.4.

Таблица 1.4 – Усовершенствованная рецептура модели фруктово-овощного пюре, предназначенного для детского питания

Составляющая модели (пищевой компонент рецептуры)	Целевая характеристика (нормируемый показатель в компоненте)	Единицы измерения	Содержание в компоненте	Доля компонента в смеси, доли единицы
1	2	3	4	5
Тыква	Сухие вещества	г на 100 г	7,1	0,20
	Углеводы	г на 100 г	2,4	
	Кислоты	%	0,3	
	Витамин С	мг на 100 г	45	
Морковь	Сухие вещества	г на 100 г	6,7	0,20
	Углеводы	г на 100 г	4,2	
	Кислоты	%	0,2	
	Витамин С	мг на 100 г	38	
Яблоки	Сухие вещества	г на 100 г	4,6	0,20
	Углеводы	г на 100 г	3,8	
	Кислоты	%	0,5	
	Витамин С	мг на 100 г	55	

Окончание табл. 1.4

1	2	3	4	5
Груши	Сухие вещества	г на 100 г	5,2	0,20
	Углеводы	г на 100 г	4,1	
	Кислоты	%	0,1	
	Витамин С	мг на 100 г	21,1	
Рис	Сухие вещества	г на 100 г	91,1	0,08
	Углеводы	г на 100 г	22,3	
	Витамин С	мг на 100 г	7,1	
Поваренная соль	Сухие вещества	г на 100 г	92,0	0,002
Пектин	Сухие вещества	г на 100 г	92,3	0,018
Сахар	Сухие вещества	г на 100 г	93,2	0,03
	Углеводы	г на 100 г	100	
Вода питьевая	Сухие вещества	г на 100 г	0	0,07

10. Проверка адекватности усовершенствованной модели проводится путем расчета целевых характеристик – показателей качества, регламентированных для детского фруктово-овощного пюре (табл. 1.5).

Таблица 1.5 – Показатели пищевой ценности усовершенствованной рецептуры фруктово-овощного пюре для детей дошкольного возраста, в 100 г продукта

Целевые характеристики	Единицы измерения	Значение характеристики по модели с учетом потерь	Допустимые уровни
Массовая доля сухих веществ	г	17,69	5–20
Общая кислотность	%, не более	0,2	1,3
Углеводы, в том числе добавленные сахара	г, не более	7,68	10
Поваренная соль	г, не более	0,2	0,6
Аскорбиновая кислота (витамин С)	мг, не более	35,77	75,0

*Вывод:* из табл. 1.5 следует, что разработанная модель адекватна, поскольку с ее применением усовершенствована рецептура фруктово-овощного пюре для детей дошкольного возраста (от 3 до 6 лет), позволяющая получать продукт, полностью соответствующий заданным нормативным характеристикам показателей качества для этой группы продуктов.

#### **1.4 ПЕРЕЧЕНЬ ОБЪЕКТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ (ПРИМЕРЫ):**

1. Мучные кондитерские изделия для детей раннего возраста.
2. Мучные кондитерские изделия для детей раннего дошкольного возраста.
3. Мучные кондитерские изделия для детей школьного возраста.
4. Хлебобулочные изделия для школьников.
5. Фруктово-овощные консервы для детей раннего возраста.

6. Фруктово-овощные консервы для детей дошкольного возраста.
7. Мясо-растительные консервы для детей раннего возраста.
8. Мясо-растительные консервы для детей дошкольного возраста.
9. Растительно-мясные консервы для детей раннего возраста.
10. Растительно-мясные консервы для детей дошкольного возраста.
11. Растительно-мясные консервы для детей школьного возраста.
12. Рыбо-растительные консервы для детей раннего возраста.
13. Рыбо-растительные консервы для детей дошкольного возраста.
14. Рыбо-растительные консервы для детей школьного возраста.
15. Растительно-рыбные консервы для детей дошкольного возраста.
16. Творожные изделия с овощными наполнителями для детей раннего возраста.
17. Творожные изделия с овощными наполнителями для детей дошкольного возраста.
18. Творожные изделия с овощными наполнителями для детей школьного возраста.
19. Творожные изделия с фруктовыми наполнителями для детей раннего возраста.
20. Творожные изделия с фруктовыми наполнителями для детей дошкольного возраста.
21. Травяные чаи для детей раннего возраста.
22. Травяные чаи для детей дошкольного возраста.
23. Травяные чаи для детей школьного возраста.
24. Адаптированные молочные смеси (заменители женского молока).
25. Смеси для детей раннего возраста на основе частичных гидролизатов белков.
26. Безглютеновые продукты для детского питания для детей школьного возраста.

27. Безлактозные пищевые продукты для детского питания для детей школьного возраста.

28. Низколактозные пищевые продукты для детей школьного возраста

### Литература

1. Технический регламент Таможенного союза «О безопасности пищевой продукции». ТР ТС 021/2011 [Электронный ресурс]. – URL <http://www.tsouz.ru/db/techreglam/Documents/TR%20TS%20PishevayaProd.pdf>

2. ФЗ Технический регламент (проект) «О безопасности продуктов детского питания» [Электронный ресурс]. – URL: <http://docs.cntd.ru/document/1200057795>.

3. Технический регламент Таможенного союза «О безопасности отдельных видов специализированной пищевой продукции, в том числе диетического лечебного и диетического профилактического питания ТР ТС 027/2012 [Электронный ресурс]. – URL: <https://rostest.net/wp-content/uploads/2014/10/TR-TS-027-2012-O-bezopasnosti-otdelnyh-vidov-pishevoi-produktzii.pdf>

4. Моделирование рецептур пищевых продуктов и технологий их производства: теория и практика: учеб. пособие / О. Н. Красуля [и др.]. – Санкт-Петербург: ГИОРД, 2015. – 320 с.

5. ГОСТ 32218-2013 Консервы на фруктовой основе для питания детей раннего возраста. Общие технические условия [Электронный ресурс]. – URL: <http://docs.cntd.ru/document/1200105454>

### Вопросы для самопроверки

1. Что такое модель, моделирование, система, биотехнологическая система?
2. На какие группы делятся дети по возрасту?
3. Какие пищевые продукты относятся к продуктам для детей раннего возраста?
4. Какие продукты относятся к специализированным продуктам для лечебного питания детей раннего возраста?
5. Какие нормативные документы устанавливают обязательные для применения и исполнения требования к детскому питанию?
6. Как устанавливают целевые характеристики объектов моделирования – пищевых смесей для детского питания?
7. Каким образом ведут моделирование рецептурных смесей?
8. Перечислите основные принципы, которым должна удовлетворять формализованная модель.
9. Что такое графическая модель рецептуры смеси и каким образом принимаются ее составляющие?
10. Как проверяется адекватность модели рецептуры смеси?

**Лабораторная работа № 2**  
**МОДЕЛИРОВАНИЕ ОРГАНОЛЕПТИЧЕСКОЙ ОЦЕНКИ**  
**КАЧЕСТВА ПИЩЕВЫХ ПРОДУКТОВ**

**Цель занятия:** формирование знаний, умений и навыков у обучающихся по формализации органолептической оценки качества продуктов пищевой биотехнологии.

**Задание:** разработать модель органолептической оценки качества заданного продукта и его основных показателей – внешнего вида, аромата, вкуса, текстуры и консистенции – в форме профилограмм, балльной шкалы и диаграмм органолептической оценки без учета и с учетом коэффициентов значимости отдельных показателей качества, а также в форме математической зависимости балльной оценки от ее составляющих.

**2.1 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ**  
**ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ**

1. Изучить справочно-теоретический материал (п. 2.2), касающийся темы лабораторной работы.

2. Получить от преподавателя индивидуальное задание (вид продукта пищевой биотехнологии, см. п. 2.4).

3. В лабораторных условиях провести органолептическую оценку заданного продукта, используя специальную литературу и техническую действующую документацию по проведению дегустационного анализа и регламентированию показателей качества на данный вид продукта [1–26].

4. Ознакомиться с примером формализации и моделирования органолептической оценки качества пищевого продукта («Шоколад с морской солью», см. п. 2.3).

5. На основе теоретических знаний и собственных ощущений выбрать показатели качества для формализации органолептической оценки заданного вида продукта.

6. По каждому показателю качества выбрать дескрипторы, характеризующие их оттенки, специфические особенности, степень проявления и другие признаки.

7. Выбрать и обосновать количественно-качественную шкалу для дифференцированной оценки показателей качества и соответствующих дескрипторов.

8. Провести оценку качества каждого показателя по выбранной балльной шкале.

9. Провести анализ положительных и отрицательных показателей качества продукта.

10. Определить характерные признаки (дескрипторы) выбранных показателей качества описательно-количественным методом.

11. Формализовать дифференцированные по дескрипторам и количеству баллов основные показатели качества в виде профилограмм.

12. Разработать модель органолептической оценки качества в виде диаграммы, отражающей балльную оценку качества, без учета и с учетом значимости отдельных показателей качества.

13. Предложить математическую модель органолептической оценки продукта с учетом коэффициентов значимости отдельных показателей качества.

14. Оценить адекватность математической модели

15. Сделать вывод по результатам выполнения работы.

## **2.2 СПРАВОЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ**

**Качество продукта** – совокупность свойств и характеристик продукта, которая свидетельствует о его способности удовлетворять выраженные или подразумеваемые потребности.

**Органолептическая оценка качества пищевого продукта (сенсорный или дегустационный анализ)** – оценка ответной реакции органов чувств человека (высокоспецифических рецепторных органов) на свойства продукта питания, определяемая с помощью качественных и количественных методов и обеспечивающая организму получение информации об окружающей среде с помощью зрения, слуха, обоняния, вкуса, осязания, вестибулярной рецепции и интерорецепции.

Для оценки органолептических свойств пищевых продуктов широко используют дегустационные методы, основанные на анализе ощущений органов чувств человека. Органолептические свойства продукта гораздо больше, чем химический состав и пищевая ценность, влияют на выбор потребителей и формирование спроса.

Органолептическая (сенсорная) оценка или дегустационный анализ, проводимый с помощью органов чувств человека, – наиболее древний и широко распространенный способ определения качества пищевых продуктов. Существующие методы лабораторного анализа более сложны и трудоемки по сравнению с приемами органолептической оценки, при этом они позволяют характеризовать только частные признаки качества. Дегустационный анализ позволяет быстро и при проведении с формализацией оценок отдельных показателей объективно дать общее впечатление о качестве продуктов.

Дегустационный анализ позволяет решать различные задачи на протяжении всего жизненного цикла продуктов: от создания продукта до его внедрения и отслеживания качества продукта в процессе производства и хранения, выявления дрейфа и фальсификации [14, 46, 50]. Знание и правильное применение методов дегустационного анализа – залог объективности его результатов.

Профессионально организованный дегустационный анализ по чувствительности превосходит многие приемы лабораторного исследования, особенно в отношении таких показателей, как вкус, запах и консистенция. Ошибки в сен-

сорном анализе чаще всего возникают при непрофессиональном подходе к этому методу оценки.

Органолептическая оценка качества пищевых продуктов складывается из нескольких основных показателей:

- *внешний вид* – органолептическая характеристика, отражающая общее зрительное впечатление или совокупность видимых параметров пищевой продукции и включающая в себя такие показатели, как цвет, форма, прозрачность, блеск, вид на разрезе и др.;

- *запах* – органолептическая характеристика, воспринимаемая органом обоняния при вдыхании летучих ароматических компонентов пищевой продукции;

- *вкус* – органолептическая характеристика, которая отражает ощущения, возникающие в результате взаимодействия различных химических веществ на вкусовые рецепторы;

- *текстура* – макроструктура пищевого продукта, обусловленная взаимным расположением его структурных элементов, органолептически характеризуемая комплексом зрительных, слуховых и осязательных ощущений, возникающих при разжевывании продукта;

- *консистенция* – представляет собой совокупность структурно-механических (реологических) характеристик пищевой продукции, которые воспринимаются механическими и тактильными рецепторами.

**Балльная шкала оценки качества** – упорядоченная совокупность последовательных значений баллов (чисел и качественных характеристик), применяемая для отражения уровня качества органолептической характеристики, в которой баллы приводятся в соответствие с дифференцированными уровнями по каждому оцениваемому признаку.

На практике пользуются различными балльными системами для оценки качества вырабатываемой продукции. Качество чая оценивают по 5-балльной, кондитерских изделий – по 30-балльной, сыры, жиры, безалкогольные напитки –

по 100-балльной системе и т. д. Это зависит от особенностей оцениваемых продуктов и сложившихся традиций.

Балльная оценка качества пищевого продукта может определяться как сумма баллов отдельных показателей качества с учетом или без учета коэффициентов их значимости.

**Коэффициент значимости показателя качества продукции** – количественная характеристика весомости данного показателя качества среди других показателей, отражающая уровень влияния на общее впечатление от качества продукции. Коэффициенты значимости могут определяться социологическим или экспертным методами, а также на основе анализа влияния показателя на качество продукции.

Для объективного отражения органолептической оценки качества применяются **дескрипторы** – описательные характеристики показателей качества (вкуса, запаха и т. д.) и/или количественное выражение органолептических признаков, оцениваемых в баллах или графически.

**Основные показатели органолептической оценки качества пищевого продукта** – внешний вид, вкус, запах, консистенция, текстура.

*Механизм оценки вкуса* включает в себя совокупность восприятия всех его оттенков с помощью языка, ощущаемых разными зонами (рис. 2.1)

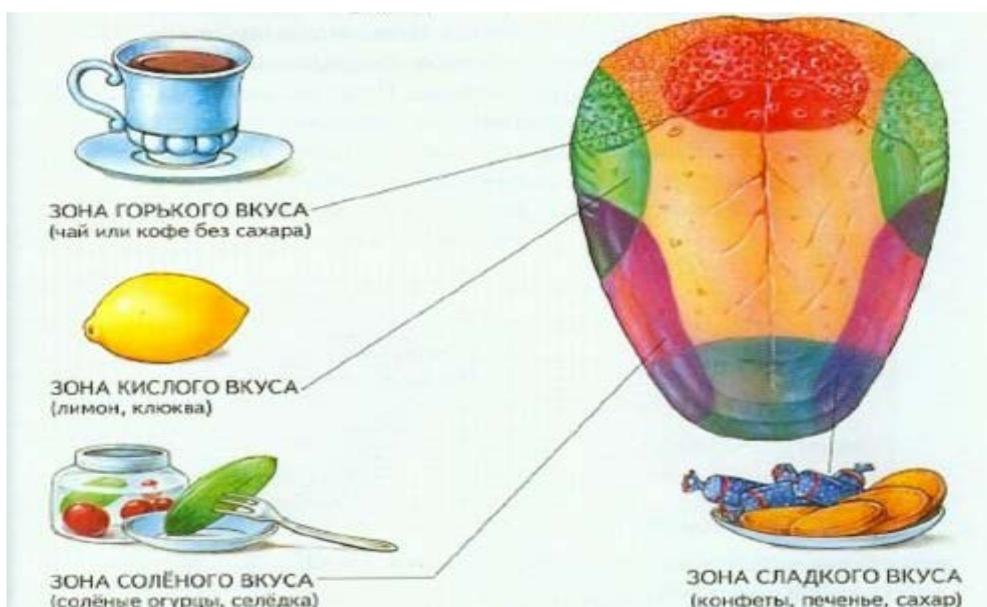


Рисунок 2.1 – Схема основных вкусовых зон языка человека

Механизма оценки запаха заключается в восприятии через нос – основной орган обоняния – всех летучих веществ, попадающих на обонятельный эпителий в верхней части носоглотки, с последующей передачей сигнала в головной мозг по нервным клеткам (рис. 2.2)

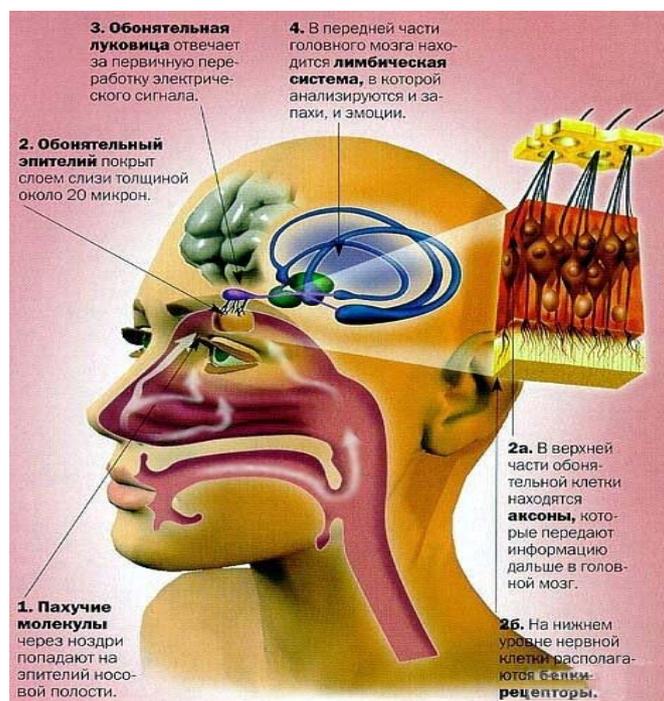


Рисунок 2.2 – Схема восприятия запахов через нос человека

В научной практике при формализации органолептической оценки качества пищевых продуктов часто используют **профильный метод**, который заключается в представлении сложного понятия органолептической оценки или одного из ее показателей (вкуса, запаха, консистенции и др.) в виде совокупности простых составляющих – профилей.

**Профиль продукта** оценивается испытателем по следующим составляющим: характерные оттенки признаков, их интенсивность, порядок проявления оттенков, последствие. Выделение наиболее характерных для данного продукта профилей позволяет изучить влияние различных факторов (технологических режимов, условий хранения, вида сырья) на формирование показателя ор-

ганолептической оценки. Сначала определяют профиль внешнего вида, запаха, потом вкуса, консистенции и текстуры.

При выполнении профильного анализа используют балльные шкалы для оценки интенсивности отдельных составляющих органолептического свойства, последовательно определяют интенсивность проявления ощущений и результаты графически изображают в виде **профилограммы** (вкуса, запах и т. д.). При использовании профильного метода от испытателя требуется умение выделить отдельные составляющие показателя качества, его особенности, интенсивность проявления признака. Для оценки интенсивности ощущений, вызываемых каждым составляющим органолептического свойства, как правило, используют 5-балльные либо другие шкалы (10-, 20-, 100-балльные и т. д.). Уровни баллов откладывают на осях, число которых соответствует числу выделенных баллов. Например, при оценке профиля интенсивности (вкуса или запаха) можно пользоваться следующей 5-балльной шкалой:

- 1 – едва узнаваемый или слабо ощущаемый признак;
- 2 – четкая интенсивность проявления признака;
- 3 – умеренная интенсивность;
- 4 – сильная интенсивность;
- 5 – очень сильная интенсивность.

При соединении отложенных на осях точек-оценок образуется характерная фигура – **профилограмма**, которая представляет собой графическую модель органолептической оценки качества продукта или его отдельного признака. Они могут быть в виде профилей прямоугольников, профилей полуокружностей или в виде профилей полной окружности (рис. 2.1–2.5).

## 2.3 ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

**Задание:** смоделировать органолептическую оценку качества продукта «Шоколад с морской солью»

1. В лабораторных условиях проводим органолептическую оценку шоколада, пользуясь ГОСТ 31721-2012 «Шоколад. Общие технические условия» и ГОСТ 5897-90 «Изделия кондитерские. Методы определения органолептических показателей качества, размеров, массы нетто и составных частей».

Вывод: образец шоколада «Шоколад с морской солью» соответствует требованиям ГОСТ 31721-2012.

2. На основе полученных знаний и сенсорных ощущений выбираем следующие показатели органолептической оценки качества шоколада: внешний вид, запах, вкус, консистенция, текстура.

3. По каждому показателю качества шоколада выбираем дискрипторы, характеризующие их оттенки, специфические особенности, степень проявления:

- *внешний вид*: свойственный шоколаду, цвет, наличие поверхностного налета, четкость рисунка, блестящая поверхность;

- *запах*: аромат какао, сладкий, ореховый, ванильный, не свойственный шоколаду;

- *вкус*: свойственный шоколаду, соленый, горький, ванильный, посторонние привкусы;

- *консистенция*: твердая, однородная, пористая, ломкая, вязкая во рту;

- *текстура*: свойственная шоколаду, правильность формы, хрупкость, таяние во рту, наличие повреждений.

4. Выбираем 5-балльную шкалу для дифференцированной оценки показателей качества и соответствующих дискрипторов.

5. Проводим оценку основных показателей качества по 5-балльной шкале, руководствуясь следующими уровнями по каждому баллу (5 – «отличный»; 4 – «хороший»; 3 – «удовлетворительный»; 2 – «неудовлетворительный»; 1 – «неприемлемый»):

- внешний вид – 4 балла;
- запах – 4 балла;
- вкус – 5 баллов;

- консистенция – 3 балла;
- текстура – 3 балла.

6. Проводим анализ положительных и отрицательных показателей качества продукта, дифференцируя их по признакам «понравилось», «не понравилось» (табл. 2.1).

Таблица 2.1 – Положительные и отрицательные показатели качества шоколада

Понравилось	Не понравилось
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Внешний вид</li> <li>• Запах</li> <li>• Вкус</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Консистенция</li> <li>• Текстура</li> </ul>

7. Описательно-количественным методом определяем характерные признаки (дискрипторы) выбранных показателей качества – внешнего вида, вкуса и запаха, консистенции и текстуры.

Внешний вид:

- *свойственный шоколаду*: поверхность ровная, без повреждений (5 баллов);
- *цвет*: коричневый, ярко выраженный (5 баллов);
- *четкость рисунка*: рисунок четкий, без повреждений (5 баллов);
- *блестящая поверхность*: блеск практически отсутствует, выражен нечетко (1 балл);
- *поверхностный налет*: отсутствует (0 баллов).

Запах:

- *аромат какао*: приятный, ярко выраженный, сбалансированный с остальными ароматами (5 баллов);
- *не свойственный шоколаду*: имеются слабые оттенки запаха, не свойственные шоколаду (2 балла);
- *ванильный*: умеренно выраженный (3 балла);
- *ореховый*: умеренно выраженный (3 балла);

- *сладкий*: хорошо выраженный, но с некоторыми посторонними оттенками (4 балла).

Вкус:

- *свойственный шоколаду*: характерен для данного продукта, сбалансированный и насыщенный, с ореховыми нотками (5 баллов);

- *соленый*: солоноватый привкус ярко выражен, при этом не перебивает основной вкус продукта (4 балла);

- *ванильный*: ощущается с умеренной интенсивностью (3 балла);

- *горечь*: ярко выражена, насыщенная, забирает на себя всю вкусовую палитру послевкусия (5 баллов);

- *посторонние привкусы*: отсутствуют (0 баллов).

Консистенция:

- *Твердая*: признак твердости интенсивно выражен (5 баллов);

- *однородная*: признак однородности интенсивно выражен (5 баллов);

- *ломкая*: признак ломкости умеренно выражен (3 балла);

- *пористая*: признак пористости слабо выражен (1 балл);

- *вязкость во рту*: признак вязкости во рту хорошо выражен (4 балла).

Текстура:

- *свойственная шоколаду*: ярко выражена (5 баллов);

- *правильность формы*: правильная, без отклонений и нарушений формы (5 баллов);

- *хрупкость*: признак едва выражен (1 балл);

- *таяние во рту*: признак хорошо выражен (4 балла);

- *наличие повреждений*: имеются незначительные повреждения (1 балл).

8. Формализуем дифференцированные по дескрипторам и количеству баллов основные показатели качества в виде профилограмм (рис. 2.3– 2.7).

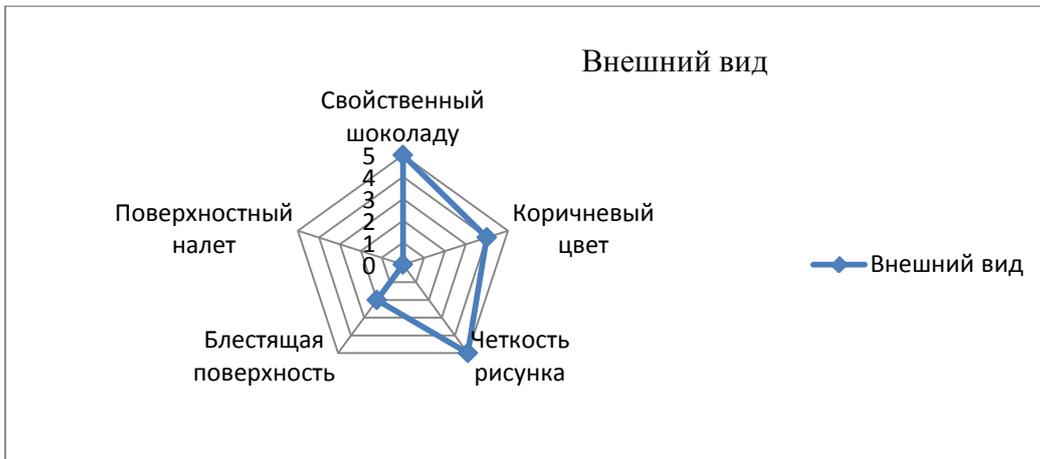


Рисунок 2.3 – Профилограмма внешнего вида шоколада

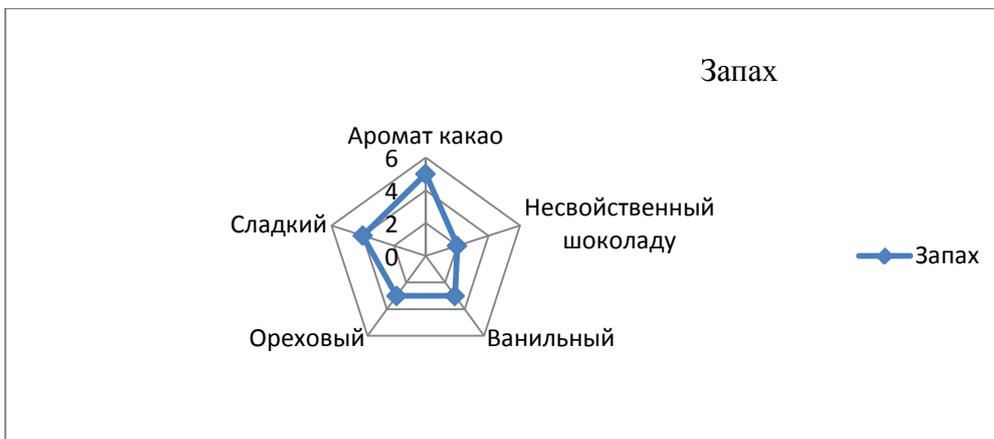


Рисунок 2.4 – Профилограмма запаха шоколада

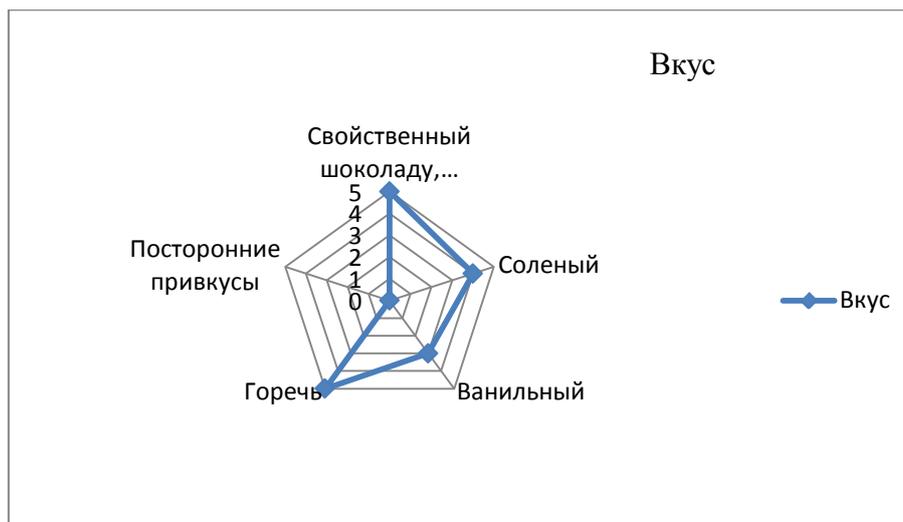


Рисунок 2.5 – Профилограмма вкуса шоколада

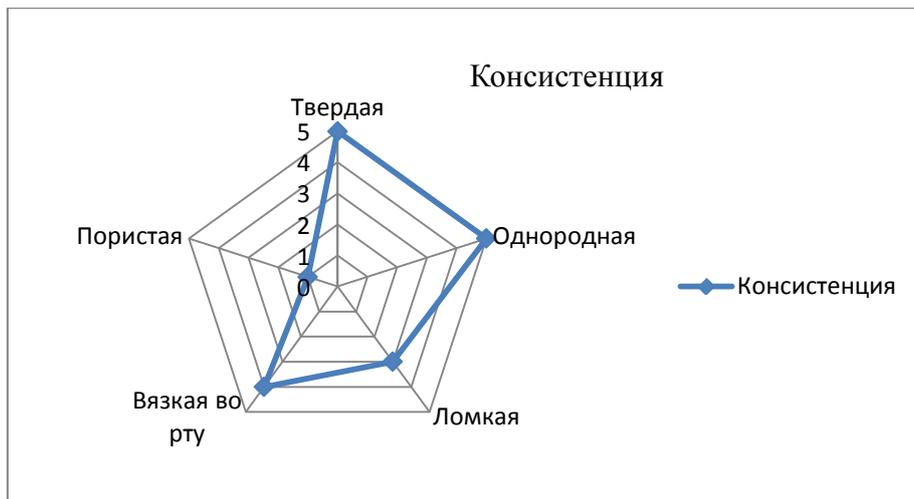


Рисунок 2.6 – Профилограмма консистенции шоколада

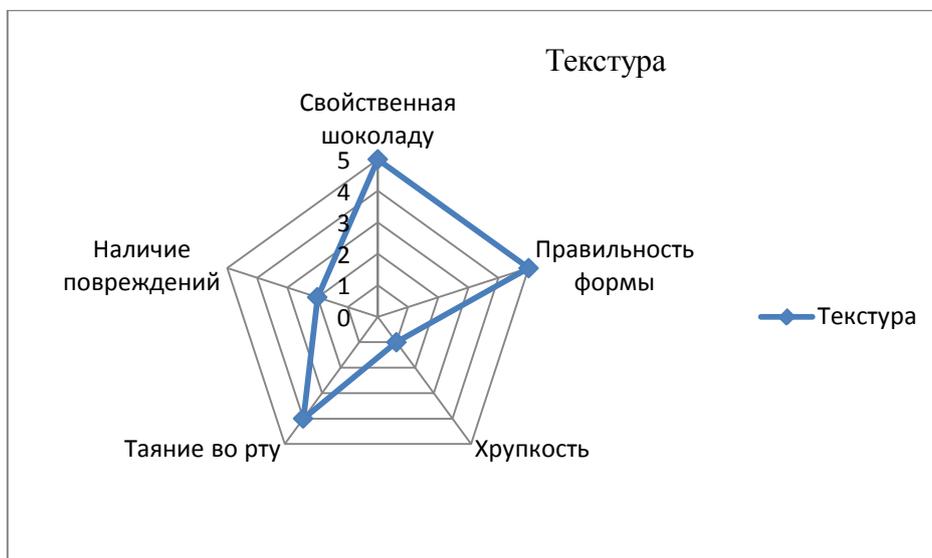


Рисунок 2.7– Профилограмма текстуры шоколада

9. Разрабатываем графическую модель органолептической оценки качества в виде диаграммы, отражающей балльную оценку качества без учета (рис. 2.8) и с учетом значимости отдельных показателей качества. Для этого определяем показатели качества по 5-балльной шкале и их коэффициенты значимости экспертно-социальным методом (с помощью справочной литературы, опроса специалистов, собственных ощущений). Далее определяем суммарную оценку качества (максимальную и фактическую) и проводим сравнение с выводом о соответствии фактической оценки качества предложенной шкале уровней качества (табл. 2.2, рис. 2.9).

Таблица 2.2 – Количественная органолептическая оценка качества шоколада с учетом коэффициентов значимости отдельных показателей качества (органолептическая 5 – балльная шкала, суммарная оценка 20 баллов)\*

Показатель качества	Значение по 5-балльной шкале	Коэффициент значимости показателя качества	Оценка показателя с учетом коэффициента значимости	Максимальная оценка показателя с учетом коэффиц. значимости
Внешний вид	4	0,8	3,2	4,0
Запах	4	0,9	3,6	4,5
Вкус	5	1,0	5,0	5,0
Консистенция	3	0,7	2,1	3,5
Текстура	3	0,6	1,8	3,0
Итого:	19	4,0	15,7	20

\* 16,0–20,0 баллов – отличный продукт; 12,0–15,9 баллов – хороший продукт; 8,0–11,9 – удовлетворительный продукт; 4,0–7,9 – неудовлетворительный продукт; 0–3,9 – неприемлемый продукт.

**Вывод:** суммарная органолептическая оценка оцениваемого шоколада 15,7 баллов, что соответствует «отличному» уровню качества.

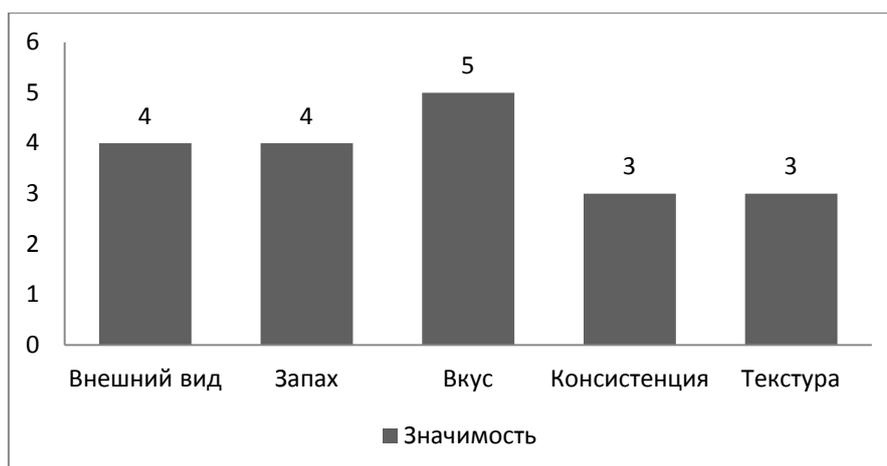


Рисунок 2.8 – Диаграмма органолептической оценки показателей качества шоколада без учета их коэффициентов значимости

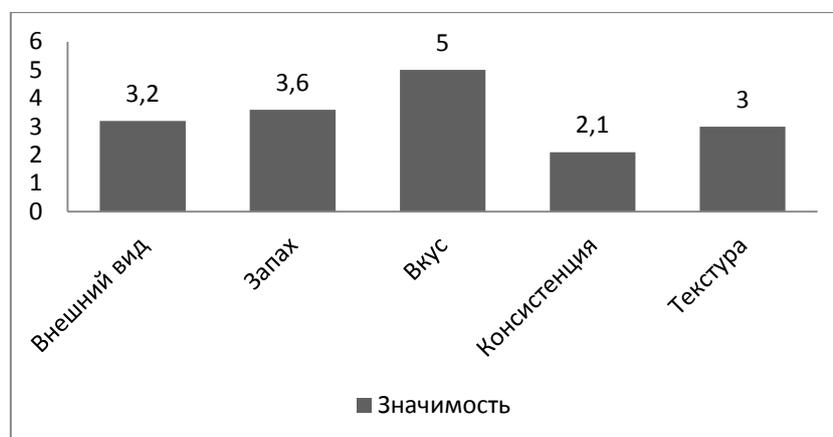


Рисунок 2.9 – Диаграмма органолептической оценки показателей качества шоколада с учетом их коэффициентов значимости

10. С учетом полученных данных предлагаем следующую математическую модель определения органолептической оценки шоколада  $O_{\text{ш.ок.}}$  в виде ее зависимости от количества показателей качества ( $k$ ) и коэффициентов их значимости ( $m$ ):

$$O_{\text{ш.ок.}} = \sum (k \cdot m), \text{ баллы.}$$

11. Оцениваем адекватность модели, определив расчетным методом органолептическую оценку качества шоколада и сравнив полученный результат с данными сенсорной оценки, проведенной по техническому документу (ГОСТ 31721-2012):

$$O_{\text{ш.ок.расч.}} = \sum (4 \cdot 0,8) + (4 \cdot 0,9) + (5 \cdot 1,0) + (3 \cdot 0,7) + (3 \cdot 0,6) = 15,7 \text{ баллов.}$$

Сенсорная оценка шоколада с учетом показателей, регламентированных в ГОСТ 31721-2012 «Шоколад. Общие технические условия», определенных по 5-балльной шкале с учетом коэффициентов значимости (суммарная оценка 20 баллов) составляет 16,6 баллов (табл. 2.3).

Таблица 2.3 – Органолептическая оценка шоколада по ГОСТ31721-2012

№ п/п	Показатели качества по ГОСТ	Оценка показателя по 5-балльной шкале, баллы	Коэффициенты значимости показателя	Суммарная оценка качества шоколада, баллы
1	Вкус и запах	5	1,0	5,0
2	Внешний вид	5	0,8	4,0
3	Форма	4	0,7	2,8
4	Консистенция	4	0,9	3,6
5	Структура	2	0,6	1,2
			4,0	$O_{\text{ш.ок.факт.}}$ 16,6

Предложенная модель адекватна, поскольку значение формализованной оценки качества шоколада  $O_{\text{ш.ок.расч.}} = 15,7$  баллов близко полученному фактическому значению, определенному по действующему стандарту на качество шоколада ГОСТ31721-2012:  $O_{\text{ш.ок.факт.}} = 16,6$  баллов.

12. Вывод по работе: проведена формализация органолептической оценки шоколада «Шоколад с морской солью» в виде профилограмм отдельных показателей качества, балльной шкалы оценки качества, диаграмм органолептиче-

ской оценки без учета и с учетом коэффициентов значимости отдельных показателей качества, адекватной математической зависимости.

## **2.4 ПЕРЕЧЕНЬ ОБЪЕКТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ (ПРИМЕРЫ):**

1. Мучные кондитерские изделия (в ассортименте).
2. Шоколад и шоколадные изделия (в ассортименте).
3. Хлебобулочные изделия (в ассортименте).
4. Чипсы с пищевыми добавками (в ассортименте).
5. Фруктовая пастила (в ассортименте).
6. Творожные изделия с наполнителями (в ассортименте).
7. Травяные чаи (в ассортименте).
8. Жевательный мармелад (в ассортименте).
9. Конфеты (в ассортименте).
10. Соки и соковая продукция (в ассортименте).
11. Напитки сокосодержащие.
12. Кисломолочная продукция (в ассортименте).
13. Экструдированные зерновые завтраки (в ассортименте).
14. Сыры плавленые (в ассортименте).

## **Литература**

1. ГОСТ ISO 6658-2016 Органолептический анализ. Методология. Общее руководство. [Электронный ресурс]. – URL: <http://docs.cntd.ru/document/1200139405>
2. Органолептика пищевых продуктов: учеб. пособие / под общ. ред. О. В. Сычевой. – Ставрополь: Ставропольский государственный аграрный университет, 2016. – 128 с. (ЭБС «Университетская библиотека онлайн»).
3. Сенсорный анализ продуктов из гидробионтов: учеб. пособие / Г. Н. Ким [и др.]. – Москва: Колос, 2008. – 552 с.
4. Медведев, П. В. Сенсорный анализ продовольственных товаров: учеб. пособие / П. В. Медведев, В. А. Федотов. – Оренбург: Оренбургский государственный университет, 2017. – 98 с. (ЭБС «Университетская библиотека онлайн»).

5. Матисон, В. А. Органолептический анализ продуктов питания: учебник / В. А. Матисон. – Москва: Изд-во МСХА им. К. А. Тимирязева, 2010. – 294 с.
6. ГОСТ Р ИСО 5492-2005. Национальный стандарт Российской Федерации. Органолептический анализ. Словарь [Электронный ресурс]. – Режим доступа: Справочная правовая система «КонсультантПлюс».
7. ГОСТ 5897-90 Изделия кондитерские. Методы определения органолептических показателей качества, размеров, массы нетто и составных частей. [Электронный ресурс]. – URL: <http://docs.cntd.ru/document/1200022442>
8. ГОСТ 5667-65 Хлеб и хлебобулочные изделия. Правила приемки, методы отбора образцов, методы определения органолептических показателей и массы изделий. [Электронный ресурс]. – URL: <http://docs.cntd.ru/document/1200022321>
9. ГОСТ 32572-2013 Чай. Органолептический анализ. [Электронный ресурс]. – URL: <http://docs.cntd.ru/document/1200109598>.
10. ГОСТ 6442-2014 Мармелад. Общие технические условия. [Электронный ресурс]. – URL: <http://docs.cntd.ru/document/1200114235>
11. ГОСТ 4570-2014 Конфеты. Общие технические условия. [Электронный ресурс]. – URL: <http://docs.cntd.ru/document/1200114248>.
12. ГОСТ 31721-2012 Шоколад. Общие технические условия. [Электронный ресурс]. – URL: <https://docinfo.ru/gost/gost-31721-2012>
13. ГОСТ 5897-90 Изделия кондитерские. Методы определения органолептических показателей качества, размеров, массы нетто и составных частей [Электронный ресурс]. – URL: <http://docs.cntd.ru/document/1200022321>
14. ГОСТ 32100-2013 Консервы. Продукция соковая. Соки, нектары и сокосодержащие напитки овощные и овощефруктовые. Общие технические условия. [Электронный ресурс]. – URL: <http://docs.cntd.ru/document/1200105315>
15. ГОСТ 32101-2013 Консервы. Продукция соковая. Соки фруктовые прямого отжима. Общие технические условия. [Электронный ресурс]. – URL: <http://docs.cntd.ru/document/1200105318>
16. ГОСТ 32102-2013 Консервы. Продукция соковая. Соки фруктовые концентрированные. Общие технические условия. [Электронный ресурс]. – URL: <https://star-pro.ru/gost/32102-2013>
17. ГОСТ 32103-2013 Консервы. Продукция соковая. Соки фруктовые и фруктово-овощные. Общие технические условия. [Электронный ресурс]. – URL: <http://docs.cntd.ru/document/1200104862>
18. ГОСТ 32876-2014 Продукция соковая. Сок томатный. Технические условия. [Электронный ресурс]. – URL: <http://docs.cntd.ru/document/1200115757>
19. ГОСТ 33630-2015 Сыры и сыры плавленые. Методы контроля органолептических показателей. [Электронный ресурс]. – URL: <http://docs.cntd.ru/document/1200127756>.

## Вопросы для самопроверки

1. Что представляет собой процесс моделирования органолептической оценки качества пищевой продукции?
2. Что такое органолептическая оценка качества пищевой продукции и из каких показателей она складывается?
3. Какие технические документы регламентируют органолептическую оценку пищевых продуктов?
4. Что такое балльная шкала оценки качества, дескрипторы, коэффициенты весомости показателей качества?
5. Опишите механизм оценки вкуса и запаха пищевого продукта?
6. Что такое профильный метод оценки качества, профилограмма?
7. Как строятся профилограммы вкуса и запаха пищевого продукта?
8. Как строятся профилограммы консистенции и внешнего вида пищевого продукта?
9. Как формализуется органолептическая оценка качества пищевой продукции с помощью математической зависимости?
10. Как проверить адекватность математической модели?

**Лабораторная работа № 3**  
**МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЦЕПТУР ПРОДУКТОВ ПИЩЕВОЙ**  
**БИОТЕХНОЛОГИИ ПО ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ЦЕННОСТИ**

*Цель занятия:* формирование знаний, умений и навыков у обучающихся по моделированию рецептур продуктов пищевой биотехнологии с заданной энергетической ценностью.

*Задание:* разработать рецептуру поликомпонентного пищевого продукта с заданной (пониженной /повышенной) энергетической ценностью.

**3.1 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ**  
**ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ**

1. Изучить справочно-теоретический материал (п. 3.2), касающийся темы лабораторной работы.

2. Получить от преподавателя индивидуальное задание (вид продукта пищевой биотехнологии с заданной энергетической ценностью, см. п. 3.4).

3. Спроектировать основную рецептуру продукта, пользуясь технической документацией и справочной литературой, после чего предложить рецептуру того же продукта, но с повышенной и/или пониженной энергетической ценностью, за счет введения соответствующих компонентов, без снижения органолептических показателей.

5. Обосновать математическую модель рецептуры, с использованием которой можно было бы изготавливать продукцию с заданной энергетической ценностью.

6. Изготовить заданный продукт по базовой и модифицированной рецептуре и сделать вывод об изменении энергетических и органолептических показателей.

Решение поставленной цели осуществляется в несколько этапов:

- первый этап – формируется информационный банк данных, который включает химический состав ингредиентов;
- второй этап – на основе информационного банка данных составляются балансовые линейные уравнения: по химическому составу конечного продукта (например, по содержанию жира, воды, углеводам);
- третий этап – определяются технологические ограничения на использование отдельных видов ингредиентов (соли, специй и т.д.) согласно нормативно-технической документации;
- четвертый этап – выбирается критерий (функция цели) оптимизации энергетической ценности продукта;
- пятый этап – решается поставленная задача, желательно в компьютерной математической системе;
- шестой этап – проводится анализ вариантов, разработанных многокомпонентных пищевых продуктов с технологической и экономической точек зрения и выбирают тот, который наиболее полно отвечает поставленной цели.

### 3.2 СПРАВОЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

**Энергетическая ценность продуктов питания (калорийность)** – расчетное количество тепловой энергии (измеряемое в калориях или джоулях), которое вырабатывается организмом человека или животных при усвоении (катаболизме) съеденных продуктов. Зависит от химического состава пищи (количества белков, жиров, углеводов и других веществ).

Энергетическая ценность, как правило, указывается на упаковке пищевых продуктов, изготавливаемых промышленностью, из расчёта на 100 г продукта, либо на 100 мл напитков, при этом сведения дополняются количеством трёх основных компонентов – белков, жиров, углеводов.

Энергетическую ценность (калорийность) выражают в ккал и кДж (1 ккал = 4,1868 кДж).

Калорийность пищи и отдельных компонентов рассчитывают посредством их сжигания в специальном калориметре с помощью калориметрической бомбы Бертло. Последняя представляет собой герметически замкнутый сосуд, погруженный в воду. В бомбе под большим давлением кислорода производят сжигание исследуемого вещества и определяют количество освобождаемого тепла (по нагреванию известного объема воды, окружающей бомбу). При этом калорийность одного и того же продукта может отличаться. Это связано с разными климатическими условиями и методами выращивания растений и животных.

Калорические коэффициенты пищевых веществ, определенные методом сжигания в калориметре, приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1 – Калорические коэффициенты пищевых веществ

Компонент пищи	Энергетическая ценность	
	ккал/г	кДж/г
Жиры	9,29	38,9
Белки	4,1	17,2
Углеводы	4,1	17,2
Карбоновые кислоты (лимонная кислота и др.)	2,2	9,2
Многоатомные спирты (глицерин, подсластители)	2,4	10
Этиловый спирт	7,1	29,7
Пищевые волокна	1,9	8

При расчете энергетической ценности продукта необходимо учитывать, что компонент не полностью усваивается организмом, этот факт учитывается через так называемые коэффициенты Рубнера.

При определении калорийности различают величины «брутто» и «нетто». Калорийность «брутто» – это общая калорийность продукта, рассчитанная по калорическим коэффициентам (табл. 3.1). Калорийность «нетто» вычисляется с поправкой на усвояемость (коэффициенты Рубнера) и выражается количеством энергии, которое реально получает организм при приеме данного пищевого продукта.

В РФ в МР 2.3.1.2432-08 «Нормы физиологических потребностей в энергии и пищевых веществах для различных групп населения Российской Федерации» для расчетов энергетической ценности продуктов приняты следующие количества энергии, выделяемые при окислении [1]:

- 1 г жира – 9,0 ккал;
- 1 г углеводов – 4 ккал;
- 1 г белков – 4,0 ккал;
- 1 г органических кислот – 2,0 ккал/г;
- 1 г этилового спирта – 7,0 ккал/г;
- 1 г пищевых волокон – 1,8 ккал/г.

**Способы повышения энергетической ценности продукта** сводятся к увеличению в его составе содержания сухих веществ, прежде всего, жиров (липидов), а также белков и углеводов. При этом количественными критериями являются ограничения, регламентированные действующими техническими документами на данный вид продукта, в которых прописаны требования к химическому составу.

**Способы понижения энергетической ценности продукта** заключаются в уменьшении содержания в нем жиров (липидов), белков и углеводов и/или замене их компонентами с пониженной энергетической ценностью (водой, пищевыми волокнами, сахарозаменителями и др.) в пределах допустимого уровня.

*Категории людей, которым необходимы продукты с пониженной энергетической ценностью:* люди, страдающие ожирением, которые, как правило, в 2–3 раза чаще страдают гипертонической болезнью, в 3–4 – стенокардией и ишемической болезнью сердца, чем лица с нормальным весом. Практически любые заболевания, даже такие, как ОРВИ, грипп и воспаление легких, у людей, страдающих ожирением, протекают длительнее и тяжелее, имеют больший процент развития осложнений.

Для контроля массы тела рекомендуется рассчитывать индекс массы тела ИМТ, формула которого была предложен бельгийским ученым А. Кетле:

$$\text{ИМТ} = m/h^2, \text{ кг/м}^2,$$

где  $m$  – масса тела в килограммах;  $h$  – рост в метрах.

Для интерпретации значений рассчитанных ИМТ рекомендуются пользоваться следующими показателями (табл. 3.2).

Таблица 3.2 – Классификация степени дефицита или избыточности массы тела в зависимости от индекса массы тела

Индекс массы тела ИМТ кг/м <sup>2</sup>	Классификация:
Меньше 16	Выраженный дефицит массы тела
16–18,5	Недостаточная масса тела
18,5–25	Нормальная масса тела
25–30	Избыточная масса тела (предожирение)
30–35	Ожирение 1-й степени
35–40	Ожирение 2-й степени
Больше 40	Ожирение 3-й степени

Следует отметить, что индекс массы тела рекомендуется рассчитывать для мужчин и женщин в возрасте 20–65 лет. Не рекомендуется использовать ИМТ для оценки телосложения профессиональных спортсменов или подростков (до 18 лет).

Основные болезни, потенциально вызываемые ожирением: гипертония, атеросклероз, одышка, диабет, бесплодие, онкологические заболевания, дистрофия печени, болезни костно-мышечного аппарата и др.

*Категории людей, которым необходимы продукты с повышенной энергетической ценностью:* страдающие анорексией – стремлением к снижению веса путём целенаправленного длительного самоограничения в еде, обусловленного страхом перед ожирением и прибавлением массы тела. На фоне анорексии часто наблюдают гормональные, обменные нарушения и функциональные расстройства. Заболевание нередко приводит к опасным для жизни осложнениям: снижение массы тела, атрофия мышц, сухость и шелушение кожи, ломкость ногтей, выпадение волос, кариес и выпадение зубов, гастрит, атония кишечника, анемия, понижение артериального давления (гипотония), отёки, сердечно-сосудистая недостаточность, разрежение костной ткани, судороги и др.

Современные ученые выделяют несколько типов недостатка веса (особенно при определении этого заболевания у детей). Дефицит массы тела первой степени, рассчитанный в процентах, предполагает отклонение от нормы на 10–15 %, второй – на 15–30 %, третьей – более чем на 30 %.

У взрослых недостаток веса констатируется, когда индекс массы тела (ИМТ) снижается менее 18,5 кг/м<sup>2</sup>.

Симптомы недостатка массы тела чаще всего бывают визуальными: наблюдается выраженная потеря жировой прослойки на груди, животе, конечностях, а также на лице (на поздних стадиях болезни). У пациентов может наблюдаться слабость, в том числе мышечная, быстрая утомляемость, раздражительность, склонность к депрессиям.

Для поддержания массы тела в физиологической норме рекомендуется в питании придерживаться **энергетического баланса** – равновесного состояния между поступающей с пищей энергией и ее затратами на все виды физической активности, на поддержание основного обмена, роста, развития, а также дополнительные затраты у женщин при беременности и грудном вскармливании [1].

Для поддержания энергетического баланса организма необходимо употреблять пищевые продукты в соответствии с **нормами физиологических потребностей в энергии и пищевых веществах**. Это – усредненные величины необходимого поступления пищевых и биологически активных веществ, обеспечивающие оптимальную реализацию физиолого-биохимических процессов, закрепленных в генотипе человека [1].

Для поддержания массы тела в физиологической норме и сохранения энергетического баланса рекомендуется потребителям пищевых продуктов рассчитывать **суточные энерготраты** – сумму суточных энерготрат организма, состоящую из энерготрат основного обмена, затрат энергии на физическую активность, специфическое динамическое действие пищи (пищевой термогенез), холодовой термогенез, рост и формирование тканей у детей и дополнительных затрат энергии у беременных и кормящих грудью женщин. Суточные энер-

готраты должны компенсироваться равнозначной суточной калорийностью пищевого рациона.

**Физиологические потребности в энергии для взрослых** – от 2100 до 4200 ккал/сут для мужчин и от 1800 до 3050 ккал/сут для женщин.

**Потребность в белке** – эволюционно сложившаяся доминанта в питании человека, обусловленная необходимостью обеспечивать оптимальный физиологический уровень поступления незаменимых аминокислот. При положительном азотистом балансе в периоды роста и развития организма, а также при интенсивных репаративных процессах потребность в белке на единицу массы тела выше, чем у взрослого здорового человека. *Усвояемость белка* – показатель, характеризующий долю абсорбированного в организме азота от общего количества, потребленного с пищей. *Биологическая ценность* – показатель качества белка, характеризующий степень задержки азота и эффективность его утилизации для растущего организма или для поддержания азотистого равновесия у взрослых. *Качество белка* определяется наличием в нем полного набора незаменимых аминокислот в определенном соотношении как между собой, так и с заменимыми аминокислотами.

*Физиологическая потребность в белке для взрослого населения* – от 65 до 117 г/сут для мужчин, и от 58 до 87 г/сут для женщин.

*Физиологические потребности в белке детей* до года – 2,2–2,9 г/кг массы тела, детей старше одного года от 36 до 87 г/сут.

**Потребность в жирах (липидах)** обусловлена необходимостью обеспечения организма концентрированным источником энергии, а также поступления на физиологическом уровне жирных кислот, фосфолипидов и других жироподобных веществ. Жиры растительного и животного происхождения имеют различный состав жирных кислот, определяющий их физические свойства и физиолого-биохимические эффекты. Жирные кислоты подразделяются на два основных класса – насыщенные и ненасыщенные.

*Физиологическая потребность в жирах* – от 70 до 154 г/сут для мужчин и от 60 до 102 г/сут для женщин.

***Потребность в углеводах*** обусловлена необходимостью обеспечения организма быстрой энергией, полисахаридами (крахмал) и моно-, ди- и олигосахаридами [1].

*Физиологическая потребность в усвояемых углеводах для взрослого человека* составляет 50–60 % от энергетической суточной потребности (от 257 до 586 г/сут).

Для обеспечения здорового питания с учетом необходимости корректирования массы тела проектируются диетические **продукты с измененным составом и энергетической ценностью**.

*Продукты с измененной энергетической ценностью* делятся на:

- *гипокалорийные продукты* (производители часто их называют «легкие»), которые могут использоваться для снижения массы тел, а также входить в повседневный рацион здорового (функционального, специализированного) питания;

- *гиперкалорийные продукты*, которые используются для повышения массы тела, а также для питания спортсменов. В лечебном питании они могут применяться при лечении белково-энергетической недостаточности.

**Метод проектирования многокомпонентных пищевых продуктов с различной энергетической ценностью** основан на варьировании их состава в части энергетических компонентов (белков, жиров, углеводов, органических кислот, спиртов). При этом необходимо учитывать ограничения по содержанию данных компонентов с учетом требований технической документации. С учетом данных ограничений составляются системы уравнений, решаемых линейным программированием.

Метод отличается простотой, наглядностью и информативностью и может быть использован в практической деятельности инженеров-технологов пищевой промышленности, а также при проектировании многокомпонентных

пищевых продуктов питания нового поколения с заданной энергетической ценностью. С использованием современных информационных компьютерных технологий сложные задачи проектирования рецептур многокомпонентных продуктов питания с заданными энергетическими и функциональными свойствами решаются без потери оперативности управления производством.

### 3.3 ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

**Задание 1:** разработать рецептуру мясного печеночного паштета с различной энергетической ценностью:

1. Рецептуру базового печеночного паштета берем из действующих справочников рецептур [3]. Ингредиенты, используемые в качестве компонентов паштета (на 100 г кг смеси паштета): соли – 1,0; лука – 0,5; стабилизатора – 0,5; специй – 1,0; фиксатора окраски – 0,5 кг (табл. 3.3).

2. В табл. 3.3 также сформирована информационная матрица данных для проведения оптимизации рецептуры паштета, которая включает в себя пять элементных блоков: ингредиенты, химический состав ингредиентов, оптовые цены, индексированные переменные (обозначены через X).

Таблица 3.3 – Информационная матрица данных для проектирования рецептуры печеночного паштета

№ п/п	Ингредиенты	Индекс $X_i$	Массовая доля, %						Оптовая цена, руб./кг
			жи-ра	белка	зола	угле-водо-в	воды	сухого вещества	
1	Печень говяжья	$X_1$	3,1	17,4	1,3	0	78,2	21,8	111,00
2	Жир говяжий	$X_2$	96,0	0	0	0	4,0	96,0	89,0
3	Белок животный	$X_3$	0,0	25,0	1,0	0	74,0	26,0	100,0
4	Белок соевый	$X_4$	2,6	90,0	1,0	5,6	0,8	99,2	86,0
5	Мука пшеничная	$X_5$	1,1	10,3	0,5	71,8	16,3	83,7	15,0
6	СОМ	$X_6$	1,0	38,0	7,0	50,0	4,0	96,0	125,0
7	Молоко	$X_7$	3,2	2,8	0,7	4,7	88,6	11,4	20,0
8	Питьевая вода	$X_8$	0	0	0	0	100	0	0,06
9	Соль	$X_9$							
10	Лук	$X_{10}$							
11	Стабилизатор	$X_{11}$							
12	Специи	$X_{12}$							
13	Фиксатор окраски	$X_{13}$							

3. На основании информационной матрицы данных (табл. 3.1) формируется система линейных балансовых уравнений – по жиру, белку, золе, углеводам, воде и сухим веществам (табл. 3.4).

Таблица 3.4 – Система балансовых линейных уравнений при проектировании печеночного паштета заданной калорийности

Баланс по:	Уравнения и ограничения
жиру	$0,031X_1 + 0,96X_2 + 0,026X_4 + 0,011X_5 + 0,01X_6 + 0,032X_7$
белку	$0,174X_1 + 0,25X_3 + 0,90X_4 + 0,103X_5 + 0,38X_6 + 0,028X_7$
золе	$0,013X_1 + 0,01X_3 + 0,01X_4 + 0,005X_5 + 0,07X_6 + 0,007X_7$
углеводам	$0,056X_4 + 0,718X_5 + 0,50X_6 + 0,047X_7$
воде	$0,782X_1 + 0,04X_2 + 0,74X_3 + 0,008X_4 + 0,163X_5 + 0,04X_6 + 0,886X_7 + X_8$
сухому веществу	$0,218X_1 + 0,96X_2 + 0,26X_3 + 0,992X_4 + 0,837X_5 + 0,96X_6 + 0,114X_7$
ограничения	$X_9 = 1; X_{10} = 0,50; X_{11} = 0,5; X_{12} = 1; X_{13} = 0,5$
масса паштета, кг	$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} + X_{13} = 100,0$

4. Принимаем функцию цели – энергетическую ценность проектируемого паштета, которая определяется, как сумма энергетической ценности составных частей белка, жира и углеводов, количества которых определяются из рецептуры паштета (табл. 3.3):

$$\mathcal{E} = 4,0 \cdot \text{Б} + 9,0 \cdot \text{Ж} + 4,0 \cdot \text{У},$$

где  $\mathcal{E}$  – энергетическая ценность продукта, ккал; Ж – массовая доля жира в продукте, %; Б – массовая доля белка в продукте, %; У – массовая доля углеводов в продукте, %.

На этапе технологической операции – формирование рецептуры проектируемого продукта с максимальной энергетической ценностью – дается научное обоснование количества вносимых ингредиентов, что позволяет вырабатывать продукт с заданными свойствами.

Решение системы линейных балансовых уравнений проводим в программе Microsoft EXCEL с использованием функции «Поиск решения». После запуска функции «Поиск решения» выбираем ячейку целевой функции (O20). Устанавливаем ее равной максимальному значению. Выбираем изменяющиеся параметры – это ячейки, содержащие массы ингредиентов (C4:C11). После ввода параметров нажимают кнопку «Выполнить» в окне «Поиск решений». При

выборе критерия оптимизации – максимальная энергетическая ценность продукта, достаточно выбрать соответствующую ячейку в окне надстройки «Поиск решения».

5. Получаем следующие рассчитанные варианты рецептов паштета с четырьмя вариантами энергетической ценности (табл. 3.5).

Таблица 3.5 – Варианты рецептов паштета с различной энергетической ценностью (на 100 кг паштета)

Ингредиенты	Индекс, $X_i$	Варианты рецептов паштета с различной энергетической ценностью, расход сырья кг, на 100 кг (без учета потерь)			
		1	2	3	4
Печень говяжья	$X_1$	60,00	60,00	60,00	60,00
Жир говяжий	$X_2$	27,50	14,43	2,86	0,00
Белок животный	$X_3$	0,00	0,00	0,00	0,00
Белок соевый	$X_4$	0,00	0,00	0,00	0,00
Мука пшеничная	$X_5$	0,00	0,00	0,00	0,00
СОМ	$X_6$	4,00	4,00	4,00	4,00
Молоко	$X_7$	5,00	5,00	5,00	5,00
Питьевая вода	$X_8$	0,00	13,07	24,64	27,50
Соль	$X_9$	1,00	1,00	1,00	1,00
Лук	$X_{10}$	0,50	0,50	0,50	0,50
Стабилизатор	$X_{11}$	0,50	0,50	0,50	0,50
Специи	$X_{12}$	1,0	1,0	1,0	1,0
Фиксатор окраски	$X_{13}$	0,5	0,5	0,5	0,5
Химический состав рецептов, %					
Жир		28,46	15,91	4,80	2,06
Белок		12,10	12,10	12,10	12,10
Углеводы		2,24	2,24	2,24	2,24
Вода		56,1	68,7	79,8	82,5
Энергетическая ценность, ккал		312,92	200,00	100,00	75,32
Себестоимость 100 кг рецептуры паштета, руб.		9647,50	8485,09	7455,69	7201,65

6. Изготавливаем паштеты по рецептурам 1 и 4 [3] и оцениваем их по калорийности и органолептическим свойствам.

*Вывод:* получен ряд рецептов печеночного паштета с максимальной и минимальной энергетической ценностью проектируемого продукта. Так, рецептура 1 имеет энергетическую ценность равной 312,92 ккал, а рецептура 4 – 75,32 ккал. Соответственно варьируется и себестоимость 100 кг паштета. Дан-

ные могут быть использованы в производстве паштетов, рекомендуемых для различных групп населения.

**Задание 2:** *Разработать рецептуру функционального по содержанию пищевых волокон хлебобулочного изделия с пониженной энергетической ценностью*

1. Выбираем базовую рецептуру хлебобулочного изделия («Булочка сдобная», масса 200 г) и принимаем ее за основу при проектировании функционального по пищевым волокнам хлебобулочного изделия с пониженной энергетической ценностью [9].

2. Описываем состав и энергетическую ценность базового продукта (табл. 3.6).

Таблица 3.6 – Рецептура и энергетическая ценность «Булочки сдобной»

Ингредиенты рецептуры	Масса, кг	Энергетическая ценность, ккал
Мука пшеничная 1-го сорта	70	234150
Сахар	4,2	16758
Соль	1,4	0
Дрожжи	1,4	1526
Вода	23	0
Итого	100	252434

3. При условии, что масса проектируемого изделия равна 200 г, то в базовом рецептурном составе замеса ее энергетическая ценность будет равна 504,9 ккал.

4. Понижаем калорийность продукта за счет введения 20 % от массы состава пищевых волокон (пшеничные отруби, введение которых нормируется в хлебобулочные изделия – не более 20 %) при одновременном уменьшении пшеничной муки. Введение пищевых волокон будет не только способствовать понижению калорийности продукта, но и обеспечит функциональность булочки по данному признаку.

5. Рассчитываем модифицированную рецептуру 100 кг замеса для приготовления хлебобулочных изделий «Булочка сдобная» пониженной энергетической ценности (табл. 3.7).

Таблица 3.7 – Рецептура замеса хлебобулочного изделия «Булочка сдобная с отрубями» с пониженной энергетической ценностью

Ингредиенты рецептуры	Масса, кг	Энергетическая ценность, ккал
Мука пшеничная 1-го сорта	60	200700
Сахар	4,2	16758
Соль	1,4	0
Дрожжи	1,4	1526
Вода	23	0
Отруби пшеничные	20	360
Итого	100	219344

6. При условии применения модифицированной рецептуры с пшеничными отрубями и изготовлении из нее булочки массой в замесе 200 г калорийность «Булочки сдобной с отрубями» составит 439,4 ккал.

7. Рассчитываем уменьшение калорийности Булочки сдобной с отрубями:  $504,9 - 439,4 = 65,5$  (ккал), что составляет 13%.

8. Рассчитываем функциональность Булочки сдобной с отрубями по содержанию пищевых волокон, поскольку пищевые волокна по ГОСТ Р 54059-2010 ) [2] считаются функциональными пищевыми ингредиентами:

- в 1000 кг замеса содержится 20 кг пищевых волокон, следовательно, в 200 г булочки (суточная порция) содержится 40 г пищевых волокон;

- при суточной норме потребления продукта «Булочка сдобная с отрубями» массой 200 г и суточной норме потребления пищевых волокон 20 г/сут [2], их поступление с новой булочкой составляет 200 %.

9. Предлагаем математическую модель энергетической ценности булочки:

$$\mathcal{E} = 4,0 \cdot B + 4,0 \cdot Y + 1,8 \cdot PV,$$

где  $\mathcal{E}$  – энергетическая ценность продукта, ккал; B – массовая доля белка в продукте, %; Y – массовая доля углеводов в продукте, %; PV – массовая доля пищевых волокон, %.

Изготавливаем «Булочку сдобную с отрубями» по разработанной рецептуре и оцениваем ее органолептические свойства.

*Вывод:* получена рецептура хлебобулочного изделия «Булочка сдобная с отрубями» с уменьшенной энергетической ценностью на 13 %. Продукт является функциональным по содержанию пищевых волокон, поскольку в суточной дозе булочки содержится 20 г пищевых волокон (составляет более 15 % суточной нормы). Данная рецептура может быть использованы в производстве хлебобулочных изделий пониженной энергетической ценности и рекомендоваться для здорового питания людей, а также специализированного питания различных групп населения, страдающих ожирением и сопутствующими заболеваниями.

### **3.4 ПЕРЕЧЕНЬ ОБЪЕКТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ (ПРИМЕРЫ):**

1. Батончики для людей, страдающих диабетом 2-го типа.
2. Вафли для людей с ожирением 1-й степени
3. Вафли для людей с недостаточной массой тела
4. Заварные трубочки с кремом для людей с ожирением 2-й степени
5. Зефир, глазированный шоколадом, для людей с дефицитом массы тела
6. Конфеты шоколадные для людей с диабетом 2-го типа
7. Конфеты в шоколадной глазури низкокалорийные
8. Крекеры для людей с ожирением 3-й степени
9. Жевательный мармелад для людей с ожирением 1-й степени
10. Мороженое пониженной калорийности
11. Пастила глазированная для людей с недостаточной массой тела.
12. Печенье сдобное для людей, страдающих диабетом 2-го типа.
13. Печенье овсяное для людей с дефицитом массы тела.
14. Пирожное бисквитное для людей с ожирением 1-й степени
15. Пирожное песочное для людей с недостаточной массой тела
16. Пряники заварные с пониженной калорийностью.

17. Халва для людей с недостаточной массой тела.
18. Йогурт для людей с ожирением 3-й степени
19. Йогурт для людей с недостаточной массой тела.
20. Мороженое для людей с ожирением 1-й степени
21. Мороженое для людей, страдающих диабетом 2-го типа
22. Сыр плавленый для людей с ожирением 1-й степени
24. Сыр плавленый для людей с недостаточной массой тела.
25. Творожная масса для людей с ожирением 2-й степени.
26. Творожная масса для людей с дефицитом массы тела.
27. Колбаса вареная для людей с недостаточной массой тела.
28. Колбаса вареная для людей с ожирением 1-й степени.
29. Рыбное мороженое ассорти для людей с недостаточной массой тела.
30. Рыбное мороженое ассорти для людей с ожирением 2-й степени.

### Литература

1. МР 2.3.1.2432—08 Нормы физиологических потребностей в энергии и пищевых веществах для различных групп населения Российской Федерации. [Электронный ресурс]. – URL: [https://www.rospotrebnadzor.ru/documents/details.php?ELEMENT\\_ID=4583](https://www.rospotrebnadzor.ru/documents/details.php?ELEMENT_ID=4583)
2. ГОСТ Р 54059-2010 Продукты пищевые функциональные. Ингредиенты пищевые функциональные. Классификация и общие [Электронный ресурс]. – URL: <http://docs.cntd.ru/document/1200085998>
3. Юхневич, К. П. Сборник рецептур мясных изделий и колбас / К. П. Юхневич. – Санкт-Петербург: Профессия, 2001. – 321 с.
4. Забашта, А. Г. Справочник по производству фаршированных и вареных колбас, сарделек, сосисок и мясных хлебов / А. Г. Забашта, И. А. Подвойская, М. В. Молочников. – Москва, 2001. – 701 с.
5. Колесникова, Н. В. Компьютерное моделирование рецептур многокомпонентных продуктов / Н. В. Колесникова, С. Ю. Лескова, К. М. Миронов. – УланУдэ: ВСГТУ, 2008. – 63 с.
6. Колесникова, Н. В. Оптимизация ассортимента и рецептур продуктов животного происхождения / Н. В. Колесникова, И. А. Вторушина, С. В. Мелихова. – Улан-Удэ: ВСГУТУ, 2014.
7. Лепешкин, А. И. Проектирование состава продуктов питания с заданными свойствами / А. И. Лепешкин, Л. А. Надточий, А. Ю. Чечеткина. – Санкт-Петербург: Университет ИТМО, 2020. – 46 с.

8. ГОСТ Р 55972-2014 Изделия хлебобулочные. Рецептатура и технологическая инструкция. Общие требования к оформлению, построению и содержанию. [Электронный ресурс]. – URL: <http://docs.cntd.ru/document/1200109645>

9. Сборник рецептов на хлеб и хлебобулочные изделия / под ред. В. Кочергина. – Москва: ВНИИ хлебопекарной промышленности, 1986. – Ч. 1.

10. Химический состав российских пищевых продуктов: справочник / под ред. член-корр. МАИ, проф. И. М. Скурихина и академика РАМН, проф. В. А. Тутельяна. – Москва: ДеЛи принт, 2002. - 236 с.

### **Вопросы для самопроверки**

1. Дайте определения терминам «энергетическая ценность», «энергетический баланс», «суточные энерготраты».

2. Как рассчитывается энергетическая ценность (калорийность) пищевого продукта?

3. Назовите способы повышения/понижения энергетической ценности пищевого продукта?

4. Каким категориям людей следует употреблять продукты с повышенной/пониженной калорийностью?

5. Назовите нормы физиологических потребностей для взрослых людей в белках, жирах, углеводах, пищевых волокнах.

6. На какие группы делятся продукты питания с измененной энергетической ценностью?

7. На каких принципах основан метод проектирования поликомпонентных пищевых продуктов по энергетической ценности?

8. Какие ограничения в химическом составе необходимо учитывать при моделировании пищевой продукции по энергетической ценности?

9. Приведите примеры математических моделей пищевых продуктов, рекомендованных для изготовления продукции с заданной калорийностью.

10. В каких отраслях пищевой промышленности особенно востребованы математические модели, с применением которых возможно создавать продукты с заданной калорийностью (без ухудшения органолептических показателей)?

**Лабораторная работа № 4**  
**АППРОКСИМАЦИЯ ДАННЫХ ПИЩЕВОЙ СИСТЕМЫ**  
**МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА**  
**НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ**

**Цель занятия:** формирование знаний, умений и навыков у обучающихся по аппроксимации полученных в ходе экспериментов данных в виде линейной функции с оценкой ее адекватности.

**Задание:** аппроксимировать количественные данные, полученные в экспериментальных исследованиях различных пищевых систем, в виде линейной и квадратичной функций. Оценить адекватность моделей. Использовать модель для прогнозирования показателей пищевой системы. Сделать вывод о наиболее рациональной зависимости для данных заданной пищевой системы.

**4.1 Методические указания по выполнению**  
**Лабораторной работы**

1. Для подготовки к лабораторному занятию необходимо изучить справочно-теоретический материал (п. 4.2).
2. Получить индивидуальное задание по аппроксимации экспериментальных данных пищевых систем (п. 4.4).
3. Графически представить данные, проанализировать визуально вид экспериментальной зависимости.
4. Аппроксимировать экспериментальные данные в виде линейной и квадратичной зависимости.
5. Проверить адекватность моделей, рассчитав среднее отклонение расчетных значений от фактических (невязку  $Q$ ).

6. Выбрать модель с наименьшей неувязкой и использовать ее для прогнозирования результатов без применения экспериментов.

7. Сделать вывод по работе.

## 4.2 СПРАВОЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

**Аппроксимация** – приближение – это научный метод, состоящий в замене одних объектов другими, в каком-то смысле близкими к исходным, но более простыми.

Аппроксимация позволяет исследовать числовые характеристики и качественные свойства объекта, сводя задачу к изучению более простых или более удобных объектов (например, пищевых систем, характеристики которых аналитически определяются или уже известны).

**Задача аппроксимации (задача о приближении)** сводится к подбору наиболее точной формулы, описывающей объект, которую подбирают по известным данным, применяя метод наименьших квадратов.

**Условия задачи:** пусть  $y = f(x)$  является функцией аргумента  $x$ . Нередко эта зависимость задается в табличном виде. В контрольных по математике на аппроксимацию также часто требуется найти некоторую аналитическую функцию, которая приближенно описывает заданную табличную зависимость. Кроме того, требуется определить значения функции в других точках, отличных от заданных табличных значений. Этой цели служит задача о приближении (аппроксимации). В этом случае находят некоторую функцию  $f(x)$ , такую, чтобы отклонения ее от заданной табличной функции было наименьшим. Функция  $f(x)$  называется **аппроксимирующей**.

Вид аппроксимирующей функции существенным образом зависит от исходной табличной функции. В разных случаях функцию  $f(x)$  выбирают в виде экспоненциальной, логарифмической, степенной, синусоидальной и т. д. В

каждом конкретном случае выбирают таким образом, чтобы достичь максимальной близости аппроксимирующей и табличной функций.

**Метод наименьших квадратов** – математический метод, применяемый для решения различных задач, основанный на минимизации суммы квадратов отклонения некоторых функций от искомых переменных. Сущность метода наименьших квадратов состоит в том, чтобы сумма квадратов отклонений значений функции, полученных по искомой приближенной аналитической формуле, от экспериментальных значений (экспериментальная зависимость) должна быть минимальна.

Метод наименьших квадратов применяется для *аппроксимации* (приближенного представления) экспериментальных данных математической функцией (аналитической формулой). Конкретный вид формулы выбирается, как правило, из физических соображений. Такими формулами могут быть:

$$y = ax + b,$$

$$y = ax^2 + bx + c,$$

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

$$y = ae^{bx} + c, y = \frac{a}{x} + b \text{ и др.}$$

Методу наименьших квадратов можно дать следующее геометрическое истолкование: среди бесконечного семейства линий данного вида отыскивается одна линия, для которой сумма квадратов разностей ординат экспериментальных точек и соответствующих им ординат точек, найденных по уравнению этой линии, будет наименьшей.

**Проверка адекватности математической модели** означает установление, насколько хорошо модель описывает реальные процессы, происходящие в системе, настолько качественно она будет прогнозировать развитие данных процессов.

Проверка адекватности модели осуществляется с помощью средней ошибки аппроксимации (неувязки Q), т. е. среднего отклонения расчетных зна-

чений от фактических, величина которой не должна превышать 10–12 % (рекомендовано)

$$\varepsilon_i = \frac{1}{n} \sum \left| \frac{y_i - y_x}{y_i} \right| * 100 \% , \quad (4.1)$$

где  $y_i$  и  $y_x$  – экспериментальное и расчетное значение по уравнению.

**Пример аппроксимации результатов эксперимента**

Пусть результаты измерений представлены в табл. 4.1.

Таблица 4.1 – Экспериментальные данные некоторой системы

x	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	...	x <sub>n</sub>
y	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	...	y <sub>n</sub>

Изображаем зависимости графически (рис. 4.1) Будем считать, что вид *аппроксимирующей* (приближающей) *зависимости* выбран, и её можно записать в виде

$$y = f(x, a_0, a_1, \dots, a_m), \quad m \leq n - 1, \quad (4.2)$$

где  $f$  – известная функция;  $a_0, a_1, \dots, a_m$  – неизвестные постоянные параметры, значения которых надо найти.

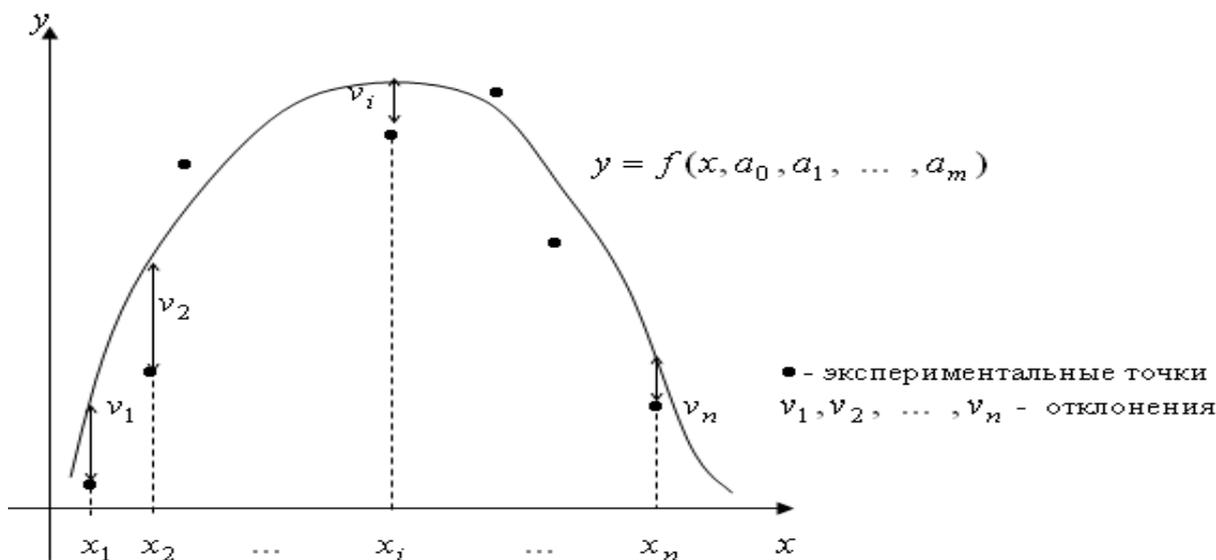


Рисунок 4.1 – Графическая зависимость  $y = f(x)$

В методе наименьших квадратов приближение функции (4.2) к экспериментальной зависимости считается наилучшим, если выполняется условие

$$Q = Q(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^n v_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i, a_0, a_1, \dots, a_m))^2 = \min. \quad (4.3)$$

Функция  $Q$  называется *невязкой*.

Так как невязка  $Q$  равна сумме квадратов отклонений, которая должна стремиться к наименьшим значениям, записываем ее таким образом:

$$Q(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^n v_i^2 \geq 0.$$

**Необходимым условием минимума функции** нескольких переменных является равенство нулю всех частных производных этой функции по параметрам.

Таким образом, отыскание наилучших значений параметров аппроксимирующей функции (4.2), т. е. таких их значений, при которых  $Q = Q(a_0, a_1, \dots, a_m)$  минимальна, сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial a_0} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial a_1} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial Q}{\partial a_m} = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

### **Нахождение параметров линейной функции**

Пусть экспериментальные данные надо представить линейной функцией:

$$y = ax + b.$$

Требуется подобрать такие значения  $a$  и  $b$ , для которых функция

$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 \quad (4.5)$$

будет минимальной.

Необходимые условия минимума функции (4.5) сводятся к системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) \cdot (-x_i) = -2 \sum_{i=1}^n (x_i y_i - ax_i^2 - bx_i) = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) \cdot (-1) = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) = 0 \end{cases}$$

После преобразований получаем систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + bn = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases} \quad (4.6)$$

Решаем систему (4.6) и находим искомые значения параметров  $a$  и  $b$ .

### ***Нахождение параметров квадратичной функции***

Если аппроксимирующей функцией является квадратичная зависимость:

$$y = ax^2 + bx + c,$$

то её параметры  $a$ ,  $b$ ,  $c$  находят из условия минимума функции:

$$Q(a, b, c) = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i^2 + bx_i + c))^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2. \quad (4.7)$$

Условия минимума функции (4.7) сводятся к системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) \cdot (-x_i^2) = -2 \sum_{i=1}^n (x_i^2 y_i - ax_i^4 - bx_i^3 - cx_i^2) = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) \cdot (-x_i) = -2 \sum_{i=1}^n (x_i y_i - ax_i^3 - bx_i^2 - cx_i) = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial c} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) \cdot (-1) = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) = 0 \end{cases}$$

После преобразований получаем систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + cn = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases} \quad (4.8)$$

При решении данной системы находим искомые значения параметров  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

При *аппроксимации экспериментальных данных в виде линейной однофакторной модели  $y = ax + b$*  рекомендуется пользоваться следующими формулами, вытекающими из метода наименьших квадратов:

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n * \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i}{n},$$

где  $a$  и  $b$  – коэффициенты линейного уравнения регрессии;  $n$  – количество измерений;  $i$  – порядок измерения.

Полученные коэффициенты подставляем в уравнение прямой линии  $y = ax + b$  и получаем формулу, которая является оценкой для теоретической линии регрессии.

Для расчета коэффициентов линейной модели и адекватности через показатель средней ошибки аппроксимации (неувязки  $Q$ ) рекомендуется пользоваться таблицей:

№	$x_i$	$x_i^2$	$y_i$	$x_i y_i$	$x_i^2$	$y_x$	$y_i - y_x$	$(y_i - y_x)/ y_i$
1								
...								
...								
$n$								
$\Sigma$	$\Sigma x_i$	$\Sigma x_i^2$	$\Sigma y_i$	$\Sigma x_i y_i$	$\Sigma x_i^2$			$\Sigma  (y_i - y_x)/ y_i $

### 4.3 ПРИМЕР АППРОКСИМАЦИИ ДАННЫХ ПИЩЕВОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ И КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИЯМИ

**Задание:** в результате эксперимента получена серия коллоидных растворов агары с концентрацией  $x_i$ , при органолептической оценке которых установлены следующие обобщенные значения  $x$  и  $y$ , представленные в табл. 4.2 (максимальная оценка 1 балл).

Таблица 4.2 – Экспериментальные данные зависимости органолептической оценки пищевого раствора агары от его содержания

$x_i$ , содержание агары	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2
$y_i$ , органолептическая оценка	0,705	0,495	0,426	0,357	0,368	0,406	0,549	0,768

Требуется аппроксимировать экспериментальные данные линейной и квадратичной функциями и установить значения невязки, по величине которой сделать вывод о наилучшем виде функции, обеспечивающей наименьшие расхождения между расчетными и экспериментальными данными.

**Решение.** Отыскание параметров аппроксимирующих функций сводится к решению систем линейных уравнений (4.5) и (4.7). Для решения задачи воспользуемся процессором электронных таблиц Excel.

1. Сначала сцепим листы 1 и 2. Занесём экспериментальные значения  $x_i$  и  $y_i$  в столбцы А и В, начиная со второй строки (в первой строке поместим заголовки столбцов). Затем для этих столбцов вычислим суммы и поместим их в десятой строке.

В столбцах С – G разместим соответственно вычисление и суммирование:

$$x_i^2, x_i^3, x_i^4, x_i y_i, x_i^2 y_i.$$

2. Расцепим листы. Дальнейшие вычисления проведём аналогичным образом для линейной зависимости на Листе 1 и для квадратичной зависимости на Листе 2.

3. Под полученной таблицей сформируем матрицу коэффициентов и вектор-столбец свободных членов. Решим систему линейных уравнений по следующему алгоритму:

$$AX = B \rightarrow X = A^{-1}B.$$

Для вычисления обратной матрицы и перемножения матриц воспользуемся Мастером функций и функциями МОБР и МУМНОЖ.

4. В блоке ячеек Н2:Н9 на основе полученных коэффициентов вычислим значения аппроксимирующего полинома  $y_i$  выч., в блоке I2:I9 – отклонения  $Dy_i = y_i$  эксп. –  $y_i$  выч., в столбце J – невязку:

$$\sum_{i=1}^8 \Delta y_i^2.$$

Полученные данные и построенные с помощью Мастера диаграмм графики приведены в табл. 4.3 и 4.4 и на рис. 4.2.

Таблица 4.3 – Таблица вычисления коэффициентов линейной функции, аппроксимирующей экспериментальные данные

$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$x_i^3$	$x_i^4$	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$	$y_i$ выч.	$Dy_i$	$Dy_i^2$
0,5	0,705	0,25	0,125	0,0625	0,3525	0,17625	0,481667	0,223333	0,049878
0,6	0,495	0,36	0,216	0,1296	0,297	0,1782	0,489548	0,005452	2,97E-05
0,7	0,426	0,49	0,343	0,2401	0,2982	0,20874	0,497429	-0,07143	0,005102
0,8	0,357	0,64	0,512	0,4096	0,2856	0,22848	0,50531	-0,14831	0,021996
0,9	0,368	0,81	0,729	0,6561	0,3312	0,29808	0,513191	-0,14519	0,02108
1	0,406	1	1	1	0,406	0,406	0,521072	-0,11507	0,013242
1,1	0,549	1,21	1,331	1,4641	0,6039	0,66429	0,528953	0,020047	0,000402
1,2	0,768	1,44	1,728	2,0736	0,9216	1,10592	0,536834	0,231166	0,053438
6,8	4,074	6,2	5,984	6,0356	3,496	3,26596		<b>Невязка:</b>	<b>0,165167</b>
$\Sigma x_i$	$\Sigma y_i$	$\Sigma x_i^2$	$\Sigma x_i^3$	$\Sigma x_i^4$	$\Sigma x_i y_i$	$\Sigma x_i^2 y_i$			
Матрица коэффициентов линейной системы					Свободные члены				
		6,2	6,8			3,496			
		6,8	8			4,074			
		Обратная матрица			<b>Коэффициенты полинома</b>				
		2,380952	-2,02381			<b>0,07881</b>			
		-2,02381	1,845238			<b>0,44262</b>			

Таблица 4.4 – Таблица вычисления коэффициентов квадратичной функции, аппроксимирующей экспериментальные данные

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$x_i^3$	$x_i^4$	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$	$y_i$ выч.	$\Delta y_i$	$\Delta y_i^2$
2	0,5	0,705	0,25	0,125	0,0625	0,3525	0,17625	0,69973	0,00528	2,7826E-05
3	0,6	0,495	0,36	0,216	0,1296	0,297	0,1782	0,52068	-0,02568	6,5946E-04
4	0,7	0,426	0,49	0,343	0,2401	0,2982	0,20874	0,40395	0,02206	4,8642E-04
5	0,8	0,357	0,64	0,512	0,4096	0,2856	0,22848	0,34952	0,00748	5,5950E-05
6	0,9	0,368	0,81	0,729	0,6561	0,3312	0,29808	0,35741	0,01060	1,1225E-04
7	1	0,406	1	1	1	0,406	0,406	0,42760	-0,02160	4,6656E-04
8	1,1	0,549	1,21	1,331	1,4641	0,6039	0,66429	0,56010	-0,01110	1,2332E-04
9	1,2	0,768	1,44	1,728	2,0736	0,9216	1,10592	0,75492	0,01308	1,7109E-04
10	6,8	4,074	6,2	5,984	6,0356	3,496	3,26596		<b>Невязка:</b>	2,1029E-03
11	$\Sigma x_i$	$\Sigma y_i$	$\Sigma x_i^2$	$\Sigma x_i^3$	$\Sigma x_i^4$	$\Sigma x_i y_i$	$\Sigma x_i^2 y_i$			
12	Матрица коэффициентов линейной системы						Свободные члены			
13		6,0356	5,984	6,2			3,26596			
14		5,984	6,2	6,8			3,496			
15		6,2	6,8	8			4,074			
16		Обратная матрица			Коэффициенты полинома					
17		59,52381	-101,19	39,88095			3,115476			
18		-101,19	174,4048	-69,8214			-5,2175			
19		39,88095	-69,8214	28,56548			2,529631			

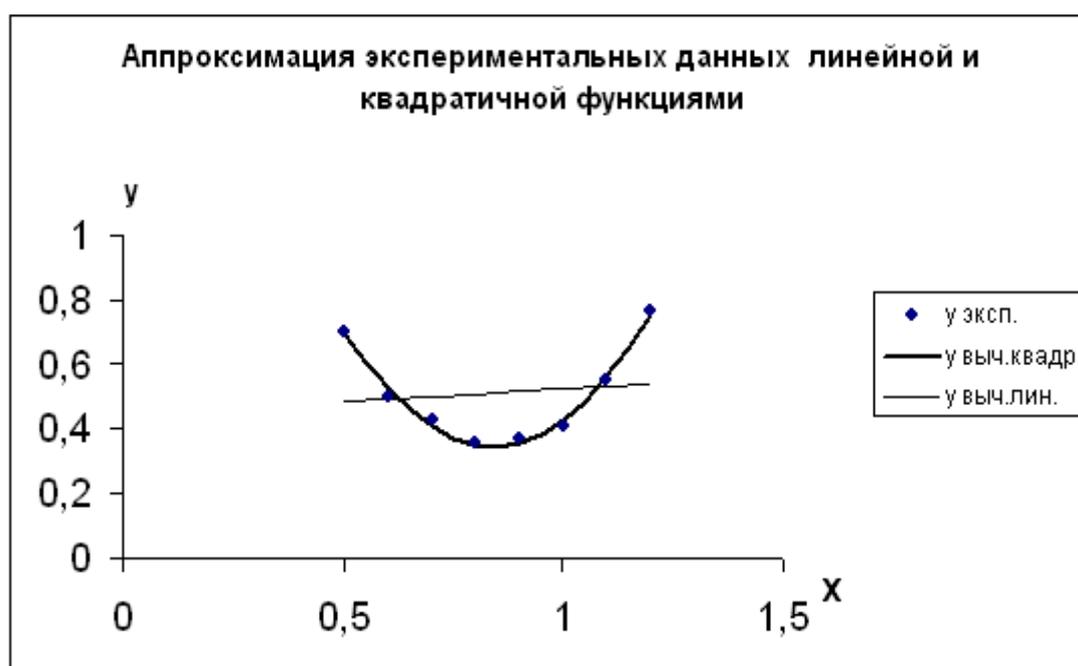


Рисунок 4.2 – Графическое представление результатов аппроксимации экспериментальных данных зависимости органолептической оценки растворов агары от его содержания линейной и квадратичной функциями.

*Вывод:* аппроксимировали экспериментальные данные линейной зависимостью:

$$y = 0,07881x + 0,442262 \text{ с невязкой } Q = 0,165167$$

и квадратичной зависимостью:

$$y = 3,115476x^2 - 5,2175x + 2,529631 \text{ с невязкой } Q = 0,002103.$$

Наименьшую невязку показывает квадратичная зависимость, поэтому выбираем ее для последующего использования (прогнозирования, расчетов).

#### 4.4 ПЕРЕЧЕНЬ ОБЪЕКТОВ АППРОКСИМАЦИИ (ПРИМЕРЫ)

По полученным экспериментальным данным получить зависимости органолептической оценки (Y) от массовой доли пищевой добавки (x). Аппроксимировать зависимость, заданную в табл. 4.5, линейной и квадратичной функциями. Определить невязки и сделать вывод о наиболее рациональной функции для данной пищевой системы, которая соответствует полученным экспериментальным данным с минимальными отклонениями.

Таблица 4.5 – Экспериментальные данные зависимости показателей качества пищевых эмульсионных систем от массовой доли пищевой добавки

Пищевая система	Экспериментальные данные								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1									
1 Майонез	x – лецитин	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
	Y – вязкость	3,03	3,14	3,35	3,46	3,77	3,25	3,17	3,66
2 Рыбный соус	x – мука	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
	y – органолептическая оценка	3,31	3,27	3,26	3,29	3,33	3,39	3,48	3,56
3 Мороженое	x – желатин	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7
	Y – эмульгирующая способность	1,04	1,16	1,26	1,17	1,07	0,89	0,65	0,34
4 Кисель	x – крахмал	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4
	y – органолептическая оценка	6,71	6,73	6,75	6,74	6,64	6,63	6,64	6,61
5 Масляный крем	x – стабилизатор E471	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6
	y – вязкость	2,32	2,51	2,63	2,70	2,69	2,62	2,49	2,29
6 Сосисочная эмульсия	x – соевый белок	2,1	2,3	2,5	2,7	2,9	3,1	3,3	3,5
	y – влагоудерживающая способность	17,5	17,6	17,7	17,9	18,2	18,5	18,8	19,4

Окончание табл. 4.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7 Коллагеновая эмульсия	х – коллаген	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2
	у – жирудерживающая способность	1,92	1,71	1,52	1,37	1,26	1,19	1,14	1,12
8 Шоколадная глазурь	х – глицерид жирных кислот Е471	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2
	у – стабильность эмульсии	1,02	1,14	1,33	1,41	1,47	1,53	1,56	1,24
9 Зефирная масса	х – пектин	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
	у – вязкость	5,78	5,68	5,60	5,54	5,50	5,48	5,49	5,51
10 Конфетная масса	х – арабиногалактан	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9
	у – органолептическая оценка	4,05	4,09	4,15	4,23	4,33	4,46	4,59	4,77
11 Йогурт	х – альгиновая кислота	0,78	0,85	0,98	1,06	1,12	1,19	1,26	1,32
	у – текучесть	82,3	79,2	76,4	73,8	69,8	66,5	63,1	60,0
12 Ацидолакт	х – каррагинан	0,78	0,85	0,98	1,06	1,12	1,19	1,26	1,32
	у – органолептическая оценка	82,3	89,2	91,4	93,8	89,8	86,5	83,1	80,0
13 Ликер	х – гуммиарабик	0,38	0,35	0,48	0,56	0,62	0,69	0,76	0,82
	у – органолептическая оценка	82,7	89,7	91,5	93,9	89,6	86,3	83,2	80,0
14 Адгезирующий копильный препарат	х – каррагинан	1,78	1,85	1,98	2,06	2,12	2,19	2,26	2,32
	у – органолептическая оценка	82,3	89,2	91,4	93,8	89,8	86,5	83,1	80,0
15 Жевательные конфеты	х – желатин	2,78	2,85	2,98	3,06	3,12	3,19	3,26	3,32
	у – органолептическая оценка	2,3	3,2	3,4	4,8	5,0	4,5	4,1	3,6

### Литература

1. Бердышев, В. И. Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложения / В. И. Бердышев, Л. В. Петрак. – Екатеринбург: УрО рн, 1999. – 296 с.
2. Бхаттачария, Р. Н. Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения / Р. Н. Бхаттачария, Р. Ранга Рао. – Москва: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 2019. – 288 с.
3. Лоран, П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. – Москва: Мир, 2015. – 496 с.

## Вопросы для самопроверки

1. Что такое аппроксимация, аппроксимирующая функция?
2. В чем заключается метод наименьших квадратов, применяемый при аппроксимации функции?
3. Каким образом подбирают вид функции при аппроксимации экспериментальных данных?
4. Как определяют коэффициенты функции?
5. Как проверяют адекватность аппроксимированной модели?
6. Что такое невязка  $Q$ ?
7. При каких значениях  $Q$  модель можно считать адекватной?
8. Как используют аппроксимированную функцию в экспериментальных технологиях?
9. В каких пищевых технологиях важны аппроксимирующие функции?
10. Какую информацию несут аппроксимирующие функции?

## Лабораторная работа № 5

# ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА И ОПТИМИЗАЦИЯ БИОТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА С ПРИМЕНЕНИЕМ ОРТОГОНАЛЬНОГО ЦЕНТРАЛЬНОГО КОМПОЗИЦИОННОГО ПЛАНА ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ДВУХ ФАКТОРОВ

**Цель занятия:** формирование знаний, умений и навыков у обучающихся по основам теории математического планирования эксперимента на примере моделирования и оптимизации биотехнологического процесса с применением центрального композиционного плана второго порядка для двух факторов.

**Задание:** Разработать план эксперимента по моделированию и оптимизации заданного биотехнологического процесса с применением центрального композиционного плана второго порядка для двух факторов; провести по данному плану эксперименты с получением частных и обобщенного параметров оптимизации; математически обработать полученные данные по заданному алгоритму; получить кодированную и натуральную модели процесса, проверить ее адекватность и рассчитать оптимальные значения факторов биотехнологического процесса.

### 5.1 Методические указания по выполнению

#### Лабораторной работы

1. Изучить справочно-теоретический материал по теме работы (п. 5.2).
2. Получить индивидуальное задание (п. 5.4).
3. Ознакомиться с примером выполнения задания (п.5.3) и выполнить индивидуальное задание по примеру.

4. Составить план эксперимента согласно матрице ОЦКП 2-го порядка для двух факторов (см. табл. 5.4) при варьировании факторов ( $X_1$  и  $X_2$ ) на трех уровнях (-1; 0; +1), которые даны в индивидуальном задании.

5. Провести девять экспериментов согласно плану эксперимента, определить частные и обобщенный параметры оптимизации ( $Y$ ) в каждом эксперименте (см. табл. 5.8).

6. Рассчитать коэффициенты кодированной модели.

7. Прописать математическую модель в кодированном виде с полученными коэффициентами и проанализировать ее.

8. Проверить модель на адекватность по критерию Фишера.

9. Проанализировать влияние факторов на параметр оптимизации.

10. Натурализовать математическую модель.

11. Определить оптимальные значения оптимизируемого процесса, отыскав координаты точки экстремума способом дифференцирования модели по переменным факторам  $X_1$  и  $X_2$ .

12. Сделать вывод по полученным результатам работы.

## 5.2 СПРАВОЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

### 5.2.1 Основные определения

**Планирование эксперимента** – это процедура выбора числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи с требуемой точностью.

При этом существенно следующее:

- стремление к минимизации общего числа опытов;
- одновременное варьирование всеми переменными, определяющими процесс, по специальным правилам – алгоритмам;
- использование математического аппарата, формализующего многие действия экспериментатора;

- выбор четкой стратегии, позволяющей принимать обоснованное решение после каждой серии экспериментов.

Эксперимент, который ставится для решения задач оптимизацией, называется *экстремальным*.

*Преимущества планирования эксперимента* перед классическим методом однофакторных экспериментов заключаются в следующем:

- Для решения экстремальных задач классический метод практически не пригоден, так как большинство результатов попадают в область, далекую от оптимума.
- Планирование эксперимента позволяет при минимальном числе опытов получать большой объем информации, содержащей данные о влиянии каждого из факторов на исследуемую величину.
- Данные о влиянии каждого фактора на исследуемую величину, полученные в изменяющихся условиях, создаваемых комбинацией различных уровней, более достоверны по сравнению с результатами однофакторного эксперимента.
- Многофакторный эксперимент позволяет получить информацию не только о влиянии каждого фактора на изучаемую величину, но и о влиянии взаимодействия факторов на эту величину.

**Параметр оптимизации (целевая функция, отклик)** – характеристика цели исследования, четко сформулированная и имеющая количественную характеристику (оценку). Параметр оптимизации должен быть доступен для измерения и выражаться одним числом, всесторонне характеризовать объект, иметь физический смысл.

**Математическая модель (функция отклика)** – это уравнение, связывающее параметр оптимизации с факторами.

В общем виде функция отклика может быть представлена уравнением:

$$Y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k), \quad (5.1)$$

где  $y$  – параметр оптимизации;  $x$  – независимые переменные факторы.

Часто приходится решать экстремальные задачи при неполном значении механизма оптимизируемого процесса. В этом случае аналитическое выражение функции отклика неизвестно и поэтому приходится ограничиваться представлением ее в виде полинома:

$$Y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + \dots + b_{kk}x_k^2. \quad (5.2)$$

Модель называется **адекватной**, если в некоторой области, в которую входят координаты выполненных опытов, значения функций отклика, вычисленные с помощью модели, отличаются от фактических значений не более, чем на некоторую наперед заданную величину.

На первом этапе планирования эксперимента функцию отклика аппроксимируют **полиномом первой степени**:

$$Y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \dots + b_kx_k, \quad (5.3)$$

где  $k$  – число факторов.

Для определения коэффициентов уравнения достаточно реализовать факторный эксперимент типа  $2^k$ ; где  $2$  – количество уровней;  $k$  – количество факторов. Планы экспериментов *типа  $2^k$*  называются планами *первого порядка*.

Область оптимума чаще всего удаётся описать полиномом второй степени:

$$Y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_kx_k + b_{12}x_1x_2 + b_{(k-1)k}x_{(k-1)}x_k + b_{11}x_1^2 + \dots + b_{kk}x_k^2. \quad (5.4)$$

Чтобы определить все коэффициенты уравнения, необходимо реализовать план эксперимента типа  $3^k$ , где  $3$  – количество уровней факторов. Однако такие планы требуют выполнения большого числа опытов и применяются редко.

Более рациональными являются **центральные композиционные планы 2-го порядка или дробный факторный эксперимент**.

**Объект исследования** – это процесс, продукт, рецептура или другой объект, который подлежит моделированию, формализации и оптимизации путем планирования эксперимента. На языке математического планирования эксперимента называется «черный ящик».

Кибернетическая схема («черного ящика») объекта исследования приведена на рис. 5.1.

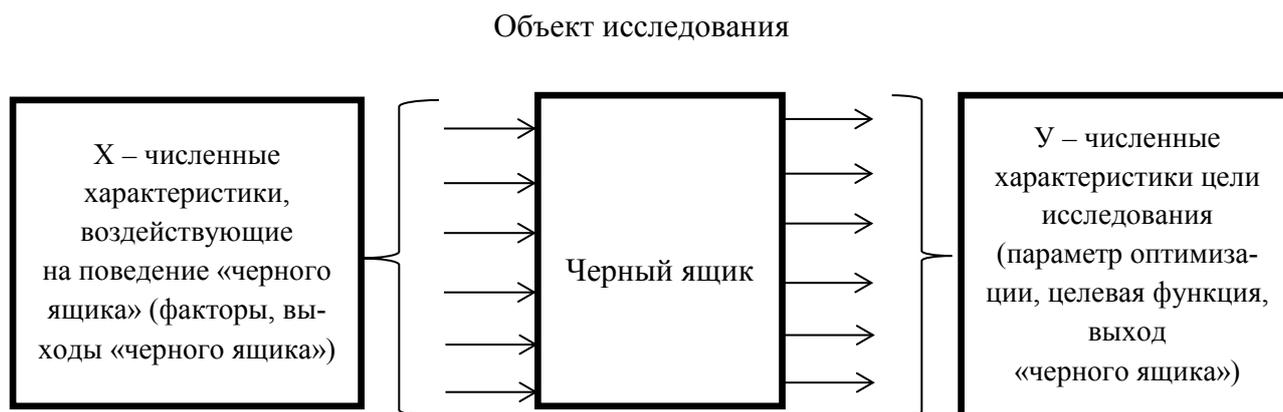


Рисунок 5.1 – Характеристика объекта исследования

*Требования, предъявляемые к объекту исследования:*

- результаты исследования должны быть воспроизводимыми (результаты повторов не превышают некоторой наперед заданной величины);
- объект исследования должен быть управляемым.

**Фактор** – измеряемая переменная величина, принимающая в некоторый момент времени определенные значения. Каждый фактор имеет область определения – совокупность всех значений, которые может принимать фактор. Значения факторов в эксперименте называют *уровнями*.

*Требования, предъявляемые к факторам:* должны быть управляемыми; непосредственно воздействующими на объект; совместимыми; независимыми; некоррелируемыми между собой.

**Полный факторный эксперимент (ПФЭ)** – эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов.

Если число уровней каждого фактора  $m$ , а число факторов  $K$ , то число  $N$  всех сочетаний уровней факторов (число опытов в ПФЭ) определяется:

$$N = m^k . \quad (5.5)$$

В линейной модели (первый этап планирования эксперимента) предусматривается варьирование факторов на двух уровнях, а число опытов равно  $2^K$ .

Выбор **области эксперимента** производится на основе априорной информации, т. е. полученной до начала опытов.

Первоначально необходимо установить основные уровни и интервалы варьирования факторов.

*Основным уровнем фактора* называется значение фактора, принятое за исходное в плане эксперимента. Основные уровни фактора выбираются таким образом, чтобы их сочетание отвечало значению параметра оптимизации, по возможности, более близкому к оптимальному.

*Интервалом варьирования фактора* называется число, прибавление которого к основному уровню дает верхний уровень фактора, а вычитание – нижний.

Для удобства записи условий эксперимента и обработки данных уровни факторов *кодируют*: верхний уровень обозначает плюс 1, нижний – минус 1, основной – 0. Кодирование значения фактора определяют по выражению:

$$X=(X_i-X_{i_0})/E_i, \quad (5.6)$$

где  $i$  – номер фактора;  $X_i$  – натуральное значение  $i$ -го фактора;  $X_{i_0}$  – натуральное значение основного уровня  $i$ -го фактора;  $E_i$  – интервал варьирования  $i$ -го фактора.

ПФЭ осуществляют с помощью *матрицы планирования*, в которой используют кодирование значения уровней факторов (табл. 5.1). Число строк в матрице равно количеству опытов. Числами «+1» и «-1» обозначают уровни факторов  $X_1$  и  $X_2$  в опытах;  $y_1, \dots, y_4$  – значения функции отклика, полученные при выполнении опытов.

Строчки в матрице – это условия опытов.

ПФЭ позволяет количественно оценить линейные эффекты и все эффекты взаимодействия (эффекты, характеризующие совместное влияние нескольких факторов на параметр оптимизации).

Для ПФЭ типа  $2^2$  уравнение регрессии с учетом взаимодействия можно представить выражением:

$$Y_0=b_0x_1+b_2x_2+b_{12}x_1x_2. \quad (5.7)$$

Для этого эксперимента матрица планирования приведена в табл. 5.1. Второй столбец в матрице – фиктивной переменной, он вводится только для количественной оценки свободного члена в уравнении регрессии.

Таблица 5.1 – Матрица ПФЭ типа  $2^2$

Номер опыта	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_1X_2$	$Y$
1	+1	-1	-1	+1	$Y_1$
2	+1	+1	-1	-1	$Y_2$
3	+1	-1	+1	-1	$Y_3$
4	+1	+1	+1	+1	$Y_4$

При увеличении числа факторов количество возможных сочетаний уровней факторов быстро возрастает, поэтому существуют **приемы построения матриц**.

*Первый прием* основан на правиле чередования знаков. В первом столбце знаки чередуются поочередно, во втором – через 2, в третьем – через 4, в четвертом – через 8, в пятом – через 16 и т. д. по  $2^n$ .

*Второй прием* основан на последовательном достижении матрицы, т. е. при добавлении нового фактора необходимо повторить комбинации уровней исходного плана сначала при значении нового фактора на верхнем уровне, а затем на нижнем.

### 5.2.2 Планирование экстремальных экспериментов второго порядка

Функцию отклика в области исследования обычно удается аппроксимировать полиномом второй степени:

$$y = (b_0)^1 + \sum_{(1 \leq i \leq 2)} b_i \cdot x_i + \sum_{(1 \leq i \leq 2)} b_{ii} \cdot x_i \cdot x_i + \sum_{(1 \leq i \leq 2)} b_{ii} (x_i)^2. \quad (5.8)$$

Для определения всех коэффициентов регрессии необходимо, чтобы каждый фактор принимал не менее трех значений. Для этого рациональным является **центральное композиционное планирование (ЦКП)**.

ЦКП второго порядка получают достройкой некоторого количества точек «к ядру», образованному линейным планом – план ПФЭ типа  $2^k$ .

Для двух факторов ЦКП второго порядка может быть представлен в виде схемы (рис. 5.2) или матрицы (табл. 5.2).

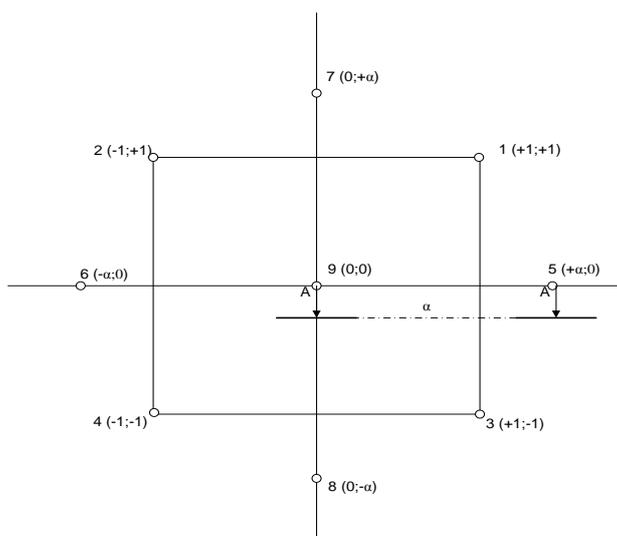


Рисунок 5.2 – Схема ЦКП второго порядка для двух факторов

Таблица 5.2 – Матрица ЦКП второго порядка для двух факторов

Содержание плана	Номер опыта	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_1X_2$	$X_1^2$	$X_2^2$	$Y$
План типа $2^2$	1	+	+	+	+	+	+	$Y_1$
	2	+	-	+	-	+	+	$Y_2$
	3	+	+	-	-	+	+	$Y_3$
	4	+	-	-	+	+	+	$Y_4$
«Звездные» точки	5	+	$+\alpha$	0	0	$\alpha^2$	0	$Y_5$
	6	+	$-\alpha$	0	0	$\alpha^2$	0	$Y_6$
	7	+	0	$+\alpha$	0	0	$\alpha^2$	$Y_7$
	8	+	0	$-\alpha$	0	0	$\alpha^2$	$Y_8$
Нулевая точка	9	+	0	0	0	0	0	$Y_9$

Для трех факторов схема ЦКП второго порядка может быть представлена схемой, представленной на рис. 5.3.

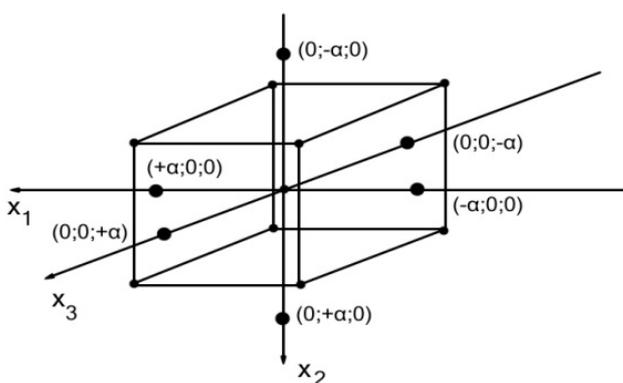


Рисунок 5.3 – Схема ОЦКП второго порядка для трех факторов

Общее число  $N$  опытов ЦКП второго порядка определяется по выражению:

$$N = 2^k + 2k + m_0 . \quad (5.9)$$

Величину «звездного» плеча  $\alpha$  и число опытов  $m_0$  в центре плана выбирают в зависимости от принятого критерия оптимальности. За *критерий оптимальности* обычно принимают *ортогональность* или *ортотабельность* плана.

**Преимущество ортогональных** планов заключается в малом объеме вычислений, так как все коэффициенты регрессии определяются независимо друг от друга.

Ортогонализация достигается выбором плеча  $\alpha$  (табл. 5.3).

Таблица 5.3 – Величина «звездного» плеча для различных планов

Число независимых переменных (факторов)	Ядро плана	Число дополнительных опытов	Величина $\alpha$
2	$2^2$	5	1,0
3	$2^3$	7	1,215
4	$2^4$	9	1,424
5	$2^{5-1}$	11	1,547

### 5.2.3 Ортогональные планы второго порядка

Ортогональные планы должны удовлетворять требованию: сумма почленных произведений двух любых столбцов должна быть равна 0. В матрице ЦКП (см. табл. 5.2) не все столбцы ортогональны, так как  $\sum_{i=1}^N X_{0j} X_{ij}^2 \neq 0$  (произведение столбца  $X_0$  на столбцы  $X_1^2$  и  $X_2^2$ ). Например, для планов второго порядка для двух факторов (см. табл. 5.2) вид регрессии будет следующим:

$$\sum_{i=1}^9 X_{0j} X_{1j}^2 = 4 + 2 \alpha^2 = \sum X_{0j} X_{2j}^2 \neq 0 .$$

В этом случае не выполняется правило ортогональности для столбцов:

$$\sum_{i=1}^N X_{ij}^2 X_{lj}^2 \neq 0 .$$

Причиной этому являются переменные второго порядка  $X_{ij}^2$ .

Для ортогонализации плана необходимо преобразовать столбцы матрицы, заменив  $X_{ij}^2$  новой переменной  $X_{ij}^{/2}$ :

$$X_{ij}^{/2} = X_{ij}^2 - \frac{\sum_{i=1}^N X_{ij}^2}{N} = X_{ij}^2 - \dot{X}_{ij}^2 . \quad (5.10)$$

Тогда

$$\sum X_{oj} X_{ij}^{/2} = \sum_{j=1}^N X_{ij}^2 - N \dot{X}_{ij}^2 = 0. \quad (5.11)$$

Таким образом, введением новой переменной  $X_{ij}^{\cdot 2}$  достигается ортогонализация плана эксперимента. В матрице переменные второго порядка будут записаны следующим образом:

$$X_{ij}^{/2} = X_{ij}^2 - X_{ij}^{\cdot 2}. \quad (5.12)$$

Для матрицы ЦКОП второго порядка для двух факторов новые переменные второго порядка будут иметь вид:

$$X_1^2 = X_2^2 = X_1^{\cdot 2} - \frac{4+2\alpha^2}{9} = X_1^{\cdot 2} - \frac{2}{3} (\alpha=1). \quad (5.13)$$

Для матрицы ЦКОП второго порядка для двух факторов внешний вид переменных второго порядка изменится следующим образом:

$$X_1^{2/} = X_2^{2/} = X_3^{2/} - \frac{8+2\alpha^2}{15} = X_1^{\cdot 2} - 0,73 (\alpha=1,215). \quad (5.14)$$

Матрицы ОЦКП второго порядка для двух и трех факторов с новыми квадратичными переменными представлены в табл. 5.4 и 5.5.

Благодаря ортогональности матрицы планирования коэффициенты математической модели определяются независимо друг от друга по формуле:

$$b_i = \frac{\sum_{j=1}^N x_{ij} \cdot y_j}{\sum_{j=1}^N (x_{ij})^2}, \quad (5.15)$$

где  $i$  и  $j$  – соответственно номер столбца и опыта в матрице;  $x_{ij}$  – элементы соответствующего столбца матрицы;  $y_j$  – значение параметра оптимизации в  $j$ -м опыте.

Таблица 5.4 – Матрица ОЦКП второго порядка для двух факторов  
( $M=2^k + 2k + n_0$ ;  $N=9$ ;  $k=2$ ;  $n_0=1$ )

Содержание плана	Номер опыта	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_1 X_2$	$X_1^2 - \frac{2}{3}$	$X_2^2 - \frac{2}{3}$	$Y$
План типа $2^2=4$	1	+1	+1	+1	+1	+1/3	+1/3	$Y_1$
	2	+1	-1	+1	-1	+1/3	+1/3	$Y_2$
	3	+1	+1	-1	-1	+1/3	+1/3	$Y_3$
	4	+1	-1	-1	+1	+1/3	+1/3	$Y_4$
«Звездные» точки с плечом $\alpha=1$ $2k=4$	5	+1	+1	0	0	+1/3	-2/3	$Y_5$
	6	+1	-1	0	0	+1/3	-2/3	$Y_6$
	7	+1	0	+1	0	-2/3	+1/3	$Y_7$
	8	+1	0	-1	0	-2/3	+1/3	$Y_8$
Нулевая точка $n_0=1$	9	+1	0	0	0	-2/3	-2/3	$Y_9$

Таблица 5.5 – Матрица ОЦКП второго порядка для трех факторов (N=15; k=3; n<sub>0</sub>=1)

Содержание плана	Номер опыта	X <sub>0</sub>	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>1</sub> X <sub>2</sub>	X <sub>2</sub> X <sub>3</sub>	X <sub>1</sub> X <sub>3</sub>	X <sub>1</sub> <sup>2</sup> - 0,73	X <sub>2</sub> <sup>2</sup> - 0,73	X <sub>3</sub> <sup>2</sup> - 0,73	Y
План 2 <sup>3</sup>	1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+0,27	+0,27	+0,27	Y <sub>1</sub>
	2	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	+0,27	+0,27	+0,27	Y <sub>2</sub>
	3	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	+0,27	+0,27	+0,27	Y <sub>3</sub>
	4	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+0,27	+0,27	+0,27	Y <sub>4</sub>
	5	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+0,27	+0,27	+0,27	Y <sub>5</sub>
	6	+1	-1	+1	-1	-1	-1	+1	+0,27	+0,27	+0,27	Y <sub>6</sub>
	7	+1	+1	-1	-1	-1	+1	-1	+0,27	+0,27	+0,27	Y <sub>7</sub>
	8	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+0,27	+0,27	+0,27	Y <sub>8</sub>
«Звездная» точка с плечом α=1,215 2k=6	9	+1	+1,215	0	0	0	0	0	+0,746	-0,73	-0,73	Y <sub>9</sub>
	10	+1	-1,215	0	0	0	0	0	+0,746	-0,73	-0,73	Y <sub>10</sub>
	11	+1	0	+1,215	0	0	0	0	-0,73	+0,746	-0,73	Y <sub>11</sub>
	12	+1	0	-1,215	0	0	0	0	-0,73	+0,746	-0,73	Y <sub>12</sub>
	13	+1	0	0	+1,215	0	0	0	-0,73	-0,73	+0,746	Y <sub>13</sub>
	14	+1	0	0	-1,215	0	0	0	-0,73	-0,73	+0,746	Y <sub>14</sub>
Нулевая n <sub>0</sub> =1	15	+1	0	0	0	0	0	0	-0,73	-0,73	-0,73	Y <sub>15</sub>

Реализация опытов по матрице ЦКОП (с преобразованной квадратичной переменной) позволяет построить модель вида:

$$Y = b_0 + \sum_{1 \leq i \leq k} b_i X_i + \sum_{1 \leq i < l \leq k} b_{il} X_i X_l + \sum_{1 \leq i \leq k} b_{ii} X_i^2. \quad (5.16)$$

Чтобы перейти к обычной форме записи уравнения регрессии, находят величину b<sub>0</sub>:

$$b_0 = b_0 - b_{11} X_1^2 - \dots - b_{kk} X_k^2. \quad (5.17)$$

Обработка результатов эксперимента и проверка адекватности уравнения проводится так же, как при реализации плана первого порядка.

**Основные формулы для расчета коэффициентов модели**, построенной по ЦОКП второго порядка для двух факторов, имеют следующий конкретный вид:

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^9 X_0 Y_i}{\sum_{i=1}^9 X_0^2}, \quad \text{где } \sum_{i=1}^9 X_0^2 = N = 9, \quad b_0 = b_0 - b_{11} X_1^2 - b_{22} X_2^2; \quad (5.18)$$

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^9 X_1 Y_i}{\sum_{i=1}^9 X_1^2}, \quad \text{где } \sum_{i=1}^9 X_1^2 = 6; \quad (5.19)$$

$$b_2 = \frac{\sum_{i=1}^9 X_2 Y_i}{\sum_{i=1}^9 X_2^2}, \quad \text{где } \sum_{i=1}^9 X_2^2 = 6; \quad (5.20)$$

$$b_{12} = \frac{\sum_{i=1}^9 X_1 X_2 Y_i}{\sum_{i=1}^9 (X_1 X_2)^2}, \quad \text{где } \sum_{i=1}^9 (X_1 X_2)^2 = 4; \quad (5.21)$$

$$b_{11} = \frac{\sum_{i=1}^9 (x_{12} - \frac{2}{3}) y_i}{\sum_{i=1}^9 (x_{12} - \frac{2}{3})^2}, \text{ где } \sum_{i=1}^9 (x_{12} - \frac{2}{3})^2 = 2; \quad (5.22)$$

$$b_{22} = \frac{\sum_{i=1}^9 (x_{22} - \frac{2}{3}) y_i}{\sum_{i=1}^9 (x_{22} - \frac{2}{3})^2}, \text{ где } \sum_{i=1}^9 (x_{22} - \frac{2}{3})^2 = 2. \quad (5.23)$$

#### 5.2.4 Проведение эксперимента и обработка его результатов

Каждая строка матрицы – это условие опыта. Для исключения систематических ошибок рекомендуется опыты, предусмотренные матрицей, проводить в случайной последовательности (проводить *рандомизацию*), то есть порядок проведения опытов выбирается по таблице случайных чисел.

Обработку результатов опытов следует проводить методом наименьших квадратов в следующей последовательности:

1. *Оценка ошибки опытов* по параллельным опытам (определяется как корень квадратный из дисперсии опыта) и отсеивание сомнительных результатов по критерию Стьюдента.

#### 2. *Вычисление коэффициентов модели*

Свободный член  $b_0$  определяют по формуле (5.24):

$$b_0 = \frac{\sum_{j=1}^N Y_j}{N}, \quad (5.24)$$

где  $N$  – количество опытов;  $Y_j$  – значение параметра оптимизации в  $j$ -м опыте.

Коэффициенты регрессии, характеризующие линейные эффекты, вычисляют по выражению:

$$b_i = (\sum_{j=1}^N X_{ij} Y_j) / N. \quad (5.25)$$

Коэффициенты, характеризующие эффекты взаимодействия, определяют по формуле:

$$b_{il} = (\sum_{j=1}^N X_{ij} X_{lj} Y_j) / N, \quad (5.26)$$

где  $i, l$  – номер фактора;  $j$  – номер опыта в матрице планирования;  $X_{ij}, X_{lj}$  – кодированные значения ( $\pm 1$ ) факторов  $i$  и  $l$  в  $j$ -м опыте.

3. **Расчет доверительных интервалов** коэффициентов по формуле (5.27):

$$\Delta b_i = \pm t S_{bi}, \quad (5.27)$$

где  $t$  – табличное значение критерия Стьюдента.

$$S_{bi} = + \sqrt{\frac{S_y^2}{N}}, \quad (5.28)$$

а  $S_y^2$  – дисперсия параметра оптимизации.

Коэффициент значим, если его абсолютная величина больше доверительного интервала.

4. **Проверка гипотезы адекватности** модели по критерию Фишера ( $F$ ), табличное значение которого берется из приложения ( $F_T$ ):

$$F_p = \frac{S_{ад}^2}{S_y^2} - \text{расчетное значение}, \quad (5.29)$$

где  $S_{ад}^2$  – дисперсия адекватности, которая определяется по формуле:

$$S_{ад}^2 = \frac{\sum_{j=1}^N \Delta y_j^2}{f}, \quad (5.30)$$

где  $\Delta y_j$  – разность между вычисленным по модели значением параметров оптимизации и полученным в  $j$ -м опыте;  $f$  – число степеней свободы для линейной модели, определяется по формуле:

$$f = N - (K+1), \quad (5.31)$$

где  $K$  – число факторов.

Необходимо помнить, что при вычислении параметра оптимизации по модели значения факторов необходимо представлять в кодированном виде.

Модель адекватна, если расчетное значение критерия Фишера  $F_p$  меньше табличного  $F_T$  для принятых доверительной вероятности и числе степеней свободы  $f$ .

5. **Переход к натуральным математическим моделям** путем подстановки в кодированные адекватные модели кодированных значений факторов:

$$X_i = (X_i^{\wedge} - X_{i0}^{\wedge}) / \Delta X_i^{\wedge}, \quad (5.32)$$

где  $X_i$  и  $X_i^{\wedge}$  – соответственно кодированное и натуральное значения факторов;  $X_i$  – конкретное значение факторов на нулевом уровне;  $\Delta X_i$  – конкретное значение интервала варьирования факторов.

### 5.2.5 Порядок анализа полученных данных по модели

**Значения коэффициентов** при независимых переменных в кодированной модели указывают на силу влияния факторов. Чем больше численная величина коэффициента, тем большее влияние оказывает фактор. Если коэффициент имеет знак «+», то с увеличением значения фактора параметр оптимизации увеличивается, а если «-», то уменьшается. Величина коэффициента соответствует вкладу данного фактора при переходе с нулевого уровня на верхний или нижний.

**Геометрическая интерпретация** модели представляется в виде поверхности отклика в трехмерном пространстве, ограниченная основными уровнями факторов (рис. 5.4). Параметры экстремальной точки  $У$  являются *оптимальными значениями модели* (оптимальными условиями проведения эксперимента).

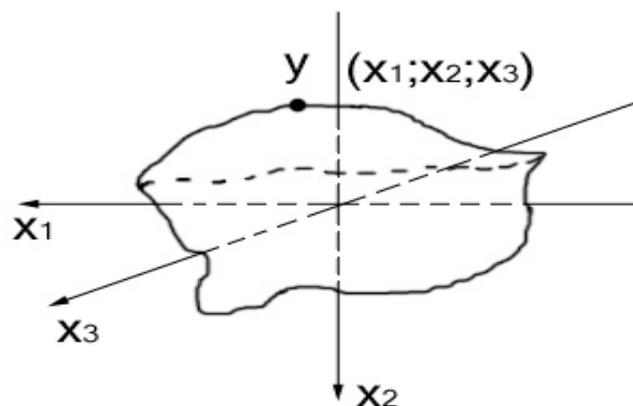


Рисунок 5.4 – Геометрическая интерпретация математической модели

### 5.2.6 Определение оптимальных значений моделируемого процесса

- сводится к определению координат экстремума функции  $y=f(X_1...X_k)$ , т. е. отысканию координат точки перегиба поверхности  $У$  или точки экстремума (рис. 5.4).



2. В качестве параметра оптимизации выбираем обобщенный параметр оптимизации, рассчитываемый с применением частных откликов методом «приближения к идеалу» (табл. 5.7).

Таблица 5.7 – Частные отклики и их «идеальные» значения

Наименование частного отклика	Размерность измерения	«Идеальные» значения частного отклика
Органолептическая оценка эмульсии	Баллы	15
Эмульсионная стойкость	%	100

3. Составляем матрицу и план эксперимента (табл. 5.8 и 5.9).

Таблица 5.8 – Матрица и план эксперимента при моделировании рецептуры эмульсионной заливки

Номер опыта	План эксперимента				Данные для математической обработки				
	содержание хитина, г		содержание соевого белкового концентрата, г		$X_0$	$X_1X_2$	$X_1^2 - 2/3$	$X_2^2 - 2/3$	Y
	по матрице $X_1$	натур. $M_x$	по матрице $X_2$	натур. $M_{сб}$					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	+1	0,45	+1	2,0	+1	+1	+1/3	+1/3	$Y_1$
2	-1	0,15	+1	2,0	+1	-1	+1/3	+1/3	$Y_2$
3	+1	0,45	-1	1,0	+1	-1	+1/3	+1/3	$Y_3$
4	-1	0,15	-1	1,0	+1	+1	+1/3	+1/3	$Y_4$
5	+1	0,45	0	1,5	+1	0	+1/3	-2/3	$Y_5$
6	-1	0,15	0	1,5	+1	0	+1/3	-2/3	$Y_6$
7	0	0,30	+1	2,0	+1	0	-2/3	+1/3	$Y_7$
8	0	0,30	-1	1,0	+1	0	-2/3	+1/3	$Y_8$
9	0	0,30	0	1,5	+1	0	-2/3	-2/3	$Y_9$
$\sum X_{ij}$	0				9,0		0	0	

4. Проводим эксперименты в соответствии с планом, в каждом опыте получаем частные параметры оптимизации (частные отклики), которые обобщаем расчетом обобщенного параметра оптимизации методом «приближения к идеалу» (табл. 5.9).

5. Расчет обобщенного параметра оптимизации проводим по формуле, суммируя безразмерные частные отклики:

$$y_i = \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_{ui} - y_{u0}}{y_{y0}} \right)^2, \quad (5.34)$$

где  $y_{u0}$  – наивысшее значение  $i$ -го отклика («идеал»);  $y_{ui}$  – значение экспериментального частного отклика;  $n$  – количество частных откликов.

Таблица 5.9 – План эксперимента по моделированию и оптимизации по рецептуре заливки для пресервов на основе хитозана и соевого белкового концентрата и результаты его реализации

Номер опыта	План эксперимента		Частные отклики		Безразмерные частные отклики		Обобщенные параметры оптимизации, $y$
	$M_x$ , г	$M_{сб}$ , г	О, баллы	УЭ, %	$S_o^2$	$S_{y_3}^2$	
1	0,45	2,0	12,2	98	0,035	0,0004	0,0354
2	0,15	2,0	13,7	80	0,0075	0,04	0,048
3	0,45	1,0	13,7	88	0,0075	0,014	0,022
4	0,15	1,0	13,0	60	0,018	0,160	0,178
5	0,45	1,5	14,2	84	0,003	0,026	0,029
6	0,15	1,5	14,5	72	0,001	0,078	0,079
7	0,30	2,0	13,7	86	0,0075	0,020	0,027
8	0,30	1,0	14,5	82	0,001	0,032	0,033
9	0,30	1,5	15,0	92	0	0,006	0,006

Расчет безразмерных частных откликов проводим с использованием «идеалов» по каждому отклику, например по первому эксперименту:

$$S_{o1}^2 = \left( \frac{12,2-15,0}{15,0} \right)^2 = 0,035;$$

$$S_{y_{31}}^2 = \left( \frac{98-100}{100} \right)^2 = 0,0004.$$

Значение обобщенного параметра оптимизации в данном случае равно:

$$S_{y_1} = 0,035+0,0004=0,0354$$

6. Определяем коэффициенты модели по формулам (5.18)–(5.23):

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^9 X_0 y_i}{\sum_{i=1}^9 X_0^2}, \text{ где } \sum_{i=1}^9 X_0^2 = N=9; b_0 = 0,051;$$

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^9 Y_1 X_i}{\sum_{i=1}^9 X_1^2}, \text{ где } \sum_{i=1}^9 X_1^2 = 6; b_1 = -0,036;$$

$$b_2 = \frac{\sum_{i=1}^9 Y_1 X_2}{\sum_{i=1}^9 X_2^2}, \text{ где } \sum_{i=1}^9 X_2^2 = 6; b_2 = -0,021;$$

$$b_{12} = \frac{\sum_{i=1}^9 X_1 X_2 Y_i}{\sum_{i=1}^9 (X_1 X_2)^2}, \text{ где } \sum_{i=1}^9 (X_1 X_2)^2 = 4; b_{12} = 0,036;$$

$$b_{11} = \frac{\sum_{i=1}^9 (X_1^2 - \frac{2}{3}) y_i}{\sum_{i=1}^9 (X_1^2 - \frac{2}{3})^2}, \text{ где } \sum_{i=1}^9 (X_1^2 - \frac{2}{3})^2 = 2; b_{11} = 0,043;$$

$$b_{22} = \frac{\sum_{i=1}^9 (X_2^2 - \frac{2}{3}) y_i}{\sum_{i=1}^9 (X_2^2 - \frac{2}{3})^2}, \text{ где } \sum_{i=1}^9 (X_2^2 - \frac{2}{3})^2 = 2; b_{22} = 0,019.$$

7. Записываем математическую модель рецептуры эмульсионного соуса в кодированном виде:

$$y = 0,051 - 0,036X_1 - 0,021X_2 + 0,036X_1X_2 + 0,043(X_1^2 - \frac{2}{3}) + 0,019(X_2^2 - \frac{2}{3}).$$

После приведения подобных членов общий вид кодированной модели рецептуры эмульсионного соуса:

$$y = 0,009 - 0,036X_1 - 0,021X_2 + 0,036X_1X_2 + 0,043X_1^2 + 0,019X_2^2.$$

8. Проверку адекватности модели проводим с применением критерия Фишера (F-критерий). Табличное значение критерия Фишера взять в интернете для уровня значимости  $p=0,05$  (надежность вывода  $P = 95 \%$ ), число степеней свободы большей дисперсии  $f_2 = N-k-1 = 9-2 = 7$ ; число степеней свободы меньшей дисперсии  $f_1 = k = 2$ .  $F_{\text{табл.}} = 4,74$ .

Расчетное значение критерия Фишера находим по формуле (5.29), определив предварительно дисперсии адекватности  $S_{\text{ад}}^2$  (0,092) и дисперсии параметра оптимизации  $S_y^2$  (0,035):

$$F_p = \frac{S_{\text{ад}}^2}{S_y^2} = 0,092/0,035 = 2,63.$$

Полученная модель адекватна, так как расчетное значение критерия Фишера  $F_p$  (2,63) меньше табличного  $F_{\text{табл.}}$  (4,74) для принятой надежности вывода 95 %.

9. Проводим анализ полученной модели в кодированном виде, сравнивая значения коэффициентов модели: влияние массовой доли хитозана ( $X_1$ ) выше на качество эмульсионного соуса (органолептическая оценка и эмульсионная стойкость), поскольку значения коэффициентов у переменных первого и второго порядка выше, чем у второго фактора ( $X_2$ ) – содержание соевого белка. Для стремления  $U$  к 0 в идеальном варианте рецептуры направления влияния каж-

дого фактора переменные, о чем свидетельствуют знаки «+» и «-» перед  $X_1$  и  $X_2$ . Таким образом, первичное увеличение содержания данных добавок положительно сказывается на качестве (до определенного значения), а последующее увеличение – отрицательно.

10. Проводим переход кодированной модели соуса к модели в натуральном виде, для чего в полученное кодированное уравнение подставляем натуральным значениям факторов:

$$X_i = \frac{\dot{X}_i - \dot{X}_{i0}}{\Delta \dot{X}_{i0}};$$

$$X_1 = \frac{M_x - 0,3}{0,15};$$

$$X_2 = \frac{M_{сб} - 1,5}{0,5}.$$

В этом случае модель имеет вид:

$$y = 0,009 - 0,036 \left( \frac{M_x - 0,3}{0,15} \right) - 0,021 \left( \frac{M_{сб} - 1,5}{0,5} \right) + 0,036 \left( \frac{M_x - 0,3}{0,15} \right) \left( \frac{M_{сб} - 1,5}{0,5} \right) + 0,043 \left( \frac{M_x - 0,3}{0,15} \right)^2 + 0,019 \left( \frac{M_{сб} - 1,5}{0,5} \right)^2.$$

После приведения подобных искомая математическая модель рецептуры соуса в натуральном выражении может быть записана в виде:

$$y = 0,705 - 2,114M_x - 0,414M_{сб} + 0,480M_x M_{сб} + 1,911M_x^2 + 0,076M_{сб}^2.$$

11. Определяем оптимальные значения оптимизируемых факторов, что сводится к поиску координат точки перегиба поверхности  $y$ . Для этого дифференцируем полученное натуральное уравнение по каждому фактору, приравниваем дифференциалы к 0 и решаем полученную систему:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx_1} = -2,114 + 0,48M_{сб} + 2*1,911M_x = 0, \\ \frac{dy}{dx_2} = -0,414 + 0,48M_x + 2*0,076M_{сб} = 0. \end{cases}$$

Решаем систему:

$$M_{сб} = 4,4 - 7,96M_x,$$

$$-0,414 + 0,48M_x + 0,152(4,4 - 7,96M_x) = 0.$$

11. Находим оптимальные значения дозировок пищевых ингредиентов:

- $M_x = 0,35$  г – массовая доля хитозана;

- $M_{сб} = 1,62$  г – массовая доля соевого белкового концентрата.

12. Получена адекватная математическая модель рецептуры эмульсионного соуса для рыбных пресервов в виде зависимости качества соуса от массовых долей биологически активных добавок – хитозана и соевого белка, позволяющая без проведения экспериментов прогнозировать качество соуса при варьировании дозировок добавок. Модель позволила расчетным способом получить оптимальные значения добавок при приготовлении 100 г эмульсионного соуса: хитозана – 0,35 г, соевого белкового концентрата – 1,62 г.

## 5.4 ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Таблица 5.10 – Объекты планирования и оптимизации эксперимента

№ п/п	Пример биотехнологического процесса	X <sub>1</sub>			X <sub>2</sub>			Параметр оптимизации Y, содержание продуктов гидролиза, % (определяется конкретно студентом в процессе эксперимента)
		температура, °С			время, ч			
		-1	0	+1	-1	0	+1	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Гидролиз пептидов алкалазой до аминокислот	10	25	40	12	30	48	Y <sub>1</sub> , Y <sub>2</sub> , Y <sub>3</sub> , Y <sub>4</sub> , Y <sub>5</sub> , Y <sub>6</sub> , Y <sub>7</sub> , Y <sub>8</sub> , Y <sub>9</sub>
2	Гидролиз полисахаридов амилазой до глюкозы	20	40	60	6	21	36	Y <sub>1</sub> , Y <sub>2</sub> , Y <sub>3</sub> , Y <sub>4</sub> , Y <sub>5</sub> , Y <sub>6</sub> , Y <sub>7</sub> , Y <sub>8</sub> , Y <sub>9</sub>
3	Гидролиз целлюлозы целлюлазой до глюкозы	30	55	80	19	30	50	Y <sub>1</sub> , Y <sub>2</sub> , Y <sub>3</sub> , Y <sub>4</sub> , Y <sub>5</sub> , Y <sub>6</sub> , Y <sub>7</sub> , Y <sub>8</sub> , Y <sub>9</sub>
4	Гидролиз коллагена коллагеназой до аминокислот	12	30	48	12	42	72	Y <sub>1</sub> , Y <sub>2</sub> , Y <sub>3</sub> , Y <sub>4</sub> , Y <sub>5</sub> , Y <sub>6</sub> , Y <sub>7</sub> , Y <sub>8</sub> , Y <sub>9</sub>
5	Гидролиз пектина пектиназой до пентозанов	12	18	24	12	18	24	Y <sub>1</sub> , Y <sub>2</sub> , Y <sub>3</sub> , Y <sub>4</sub> , Y <sub>5</sub> , Y <sub>6</sub> , Y <sub>7</sub> , Y <sub>8</sub> , Y <sub>9</sub>
6	Гидролиз липидов липазой до свободных жирных кислот	18	45	72	18	18	72	Y <sub>1</sub> , Y <sub>2</sub> , Y <sub>3</sub> , Y <sub>4</sub> , Y <sub>5</sub> , Y <sub>6</sub> , Y <sub>7</sub> , Y <sub>8</sub> , Y <sub>9</sub>
7	Гидролиз каррагинана целлюлазой до гексозанов	20	40	60	10	30	50	Y <sub>1</sub> , Y <sub>2</sub> , Y <sub>3</sub> , Y <sub>4</sub> , Y <sub>5</sub> , Y <sub>6</sub> , Y <sub>7</sub> , Y <sub>8</sub> , Y <sub>9</sub>
8	Гидролиз хитозана хитиназой до глюкозамина	24	36	48	24	36	48	Y <sub>1</sub> , Y <sub>2</sub> , Y <sub>3</sub> , Y <sub>4</sub> , Y <sub>5</sub> , Y <sub>6</sub> , Y <sub>7</sub> , Y <sub>8</sub> , Y <sub>9</sub>
9	Гидролиз фибриллярных белков алкалазой до аминокислот	20	45	70	10	45	90	Y <sub>1</sub> , Y <sub>2</sub> , Y <sub>3</sub> , Y <sub>4</sub> , Y <sub>5</sub> , Y <sub>6</sub> , Y <sub>7</sub> , Y <sub>8</sub> , Y <sub>9</sub>
10	Гидролиз вторичного белкового сырья протосубтилином до аминокислот	18	45	72	30	60	90	Y <sub>1</sub> , Y <sub>2</sub> , Y <sub>3</sub> , Y <sub>4</sub> , Y <sub>5</sub> , Y <sub>6</sub> , Y <sub>7</sub> , Y <sub>8</sub> , Y <sub>9</sub>

1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	Гидролиз крахмала ами-лазой до глюкозы	24	48	72	10	30	50	У <sub>1</sub> , У <sub>2</sub> , У <sub>3</sub> , У <sub>4</sub> , У <sub>5</sub> , У <sub>6</sub> , У <sub>7</sub> , У <sub>8</sub> , У <sub>9</sub>
13	Гидролиз альгиновых кислот альгиназой до пентозанов	20	40	60	24	48	72	У <sub>1</sub> , У <sub>2</sub> , У <sub>3</sub> , У <sub>4</sub> , У <sub>5</sub> , У <sub>6</sub> , У <sub>7</sub> , У <sub>8</sub> , У <sub>9</sub>
14	Гидролиз лигнина ком-плексом ферментов до фенолов	30	50	70	48	72	96	У <sub>1</sub> , У <sub>2</sub> , У <sub>3</sub> , У <sub>4</sub> , У <sub>5</sub> , У <sub>6</sub> , У <sub>7</sub> , У <sub>8</sub> , У <sub>9</sub>
15	Гидролиз хондоитин-сульфата алкалазой до глюкоза-минов	25	45	65	30	50	70	У <sub>1</sub> , У <sub>2</sub> , У <sub>3</sub> , У <sub>4</sub> , У <sub>5</sub> , У <sub>6</sub> , У <sub>7</sub> , У <sub>8</sub> , У <sub>9</sub>
16	Гидролиз гиалуроновой кислоты бетта-амилазой до D-глюкуроновой кис-лоты	30	45	60	20	45	70	У <sub>1</sub> , У <sub>2</sub> , У <sub>3</sub> , У <sub>4</sub> , У <sub>5</sub> , У <sub>6</sub> , У <sub>7</sub> , У <sub>8</sub> , У <sub>9</sub>
17	Гидролиз агар-агара ага-разой до галактозы	20	40	60	18	45	72	У <sub>1</sub> , У <sub>2</sub> , У <sub>3</sub> , У <sub>4</sub> , У <sub>5</sub> , У <sub>6</sub> , У <sub>7</sub> , У <sub>8</sub> , У <sub>9</sub>
18	Гидролиз ламинарина альфа-амилазой до глю-козы	20	40	60	24	48	72	У <sub>1</sub> , У <sub>2</sub> , У <sub>3</sub> , У <sub>4</sub> , У <sub>5</sub> , У <sub>6</sub> , У <sub>7</sub> , У <sub>8</sub> , У <sub>9</sub>

### Литература

1. Мезенова, О. Я. Проектирование поликомпонентных пищевых продук-тов: учеб. пособие / О. Я. Мезенова. – Санкт-Петербург: Изд-во «Перспект науки», 2015. – 224 с.
2. Мезенова, О. Я. Проектирование поликомпонентных пищевых продук-тов: учеб. пособие / О. Я. Мезенова. – Калининград: Изд-во ФГБОУ ВПО «КГТУ», 2015. – 216 с.
3. Блинова, Е. И. Планирование и организация эксперимента / Е. И. Бли-нова. – Минск: БПТУ, 2010. – 234 с.
4. Макаричев, Ю. А. Методы планирование эксперимента и обработки данных: учеб. пособие / Ю. А. Макаричев, Ю. Н. Иванников. – Самара: Са-мар.гос. техн. ун-т, 2016. – 131 с.
5. Реброва, И. А. Планирование эксперимента: учеб. пособие / И. А. Реб-рова. – Омск: СибАДИ, 2010. – 105 с.

### Вопросы для самопроверки

1. Дайте определения терминам: планирование эксперимента, модель, фактор, параметр оптимизации, матрица, экстремальный эксперимент, адекватность модели.

2. Охарактеризуйте преимущества планирования эксперимента перед классическим его проведением?
3. Какие требования предъявляются к факторам и параметру оптимизации?
4. Что такое обобщенный параметр оптимизации и как он рассчитывается?
5. Охарактеризуйте ортогональный центральный композиционный план второго порядка, его преимущества?
6. Как планируется эксперимент согласно матрице ОЦКП второго порядка для двух факторов?
7. Опишите алгоритм определения коэффициентов математической модели, полученной по матрице ОЦКП второго порядка для двух факторов, в кодированном и натуральном виде.
8. Как проверить адекватность математической модели?
9. Какую информацию несет адекватная математическая модель биотехнологического процесса?
10. Как определить оптимальные значения факторов по математической модели?

## Лабораторная работа № 6

# МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ РЕЦЕПТУР ПИЩЕВЫХ БИОПРОДУКТОВ ПО ТРЕМ ФАКТОРАМ

**Цель занятия:** формирование знаний, умений и навыков у обучающихся по планированию и оптимизации эксперимента на примере оптимизации рецептуры пищевого биопродукта с применением центрального композиционного плана второго порядка для трех факторов.

**Задание:** разработать план эксперимента по моделированию и оптимизации рецептуры заданного пищевого биопродукта с применением центрального композиционного плана второго порядка для трех факторов; провести по данному плану эксперименты с получением частных откликов и обобщенного параметров оптимизации; математически обработать полученные данные по заданному алгоритму; получить кодированную и натуральную модели рецептуры, проверить адекватность кодированной модели и рассчитать оптимальные значения факторов рецептуры пищевого биопродукта.

### 6.1 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

1. Изучить справочно-теоретический материал по теме работы (см. лабораторную работу № 5, п. 5.2) и п. 6.2.
2. Получить индивидуальное задание по моделированию рецептуры конкретного пищевого биопродукта (п. 6.4).
3. Обозначить натуральные и кодированные значения факторов и их интервалы варьирования по форме табл. 6.1.

Таблица 6.1 – Значения изменяемых факторов рецептуры пищевого биопродукта, их интервалы варьирования

Факторы	Уровни факторов $X_i$			Интервал варьирования $\Delta X = X_i - X_0$
	нижний -1	основной 0	верхний +1	
Массовая доля первого компонента $M_1 (X_1)$				
Массовая доля второго компонента $M_2 (X_2)$				
Массовая доля третьего компонента $M_3 (X_3)$				

4. Составить план эксперимента по матрице ЦКОП второго порядка для трех обозначенных факторов с учетом кодированных значений факторов в натуральном виде (табл. 6.2).

5. Определиться с частными откликами (частными параметрами оптимизации) и их «идеальными значениями». Например,  $Y_1$  – органолептическая оценка («идеал»  $Y_{10} = 5$  баллов);  $Y_2$  – конкретный показатель функциональности биопродукта (например, для «идеала» содержания витамина С  $Y_{20} = 150$  мг/100 г).

6. Провести эксперимент в соответствии с его планом эксперимента и определить частные отклики (параметры оптимизации)  $Y_1$  и  $Y_2$  (табл. 6.2).

7. На основе частных откликов (параметров оптимизации) рассчитать обобщенный параметр оптимизации в каждом эксперименте и внести данные в табл. 6.2 (красный цвет):

$$y_i = \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_{ui} - y_{u0}}{y_{y0}} \right)^2,$$

где  $Y_{ui0}$  – «идеальное» значение  $i$ -го частного отклика (параметра оптимизации), «идеал»;  $Y_{ui}$  – экспериментальное значение частного отклика (параметра оптимизации);  $n$  – количество частных откликов (параметров оптимизации).

8. Рассчитать коэффициенты математической модели по приведенным формулам (см. п. 6.2, формулы (6.1)–(6.11)) для полиномиальной модели, построенной по матрице ОЦКП второго порядка для трех факторов.

9. Построить математическую модель рецептуры биопродукта в кодированном виде, используя результаты расчетов коэффициентов модели.

10. Оценить адекватность полученной кодированной модели по критерию Фишера (F-критерий). Табличное значение критерия Фишера для уровня значимости  $p = 0,05$  (надежность вывода  $P = 95 \%$ ), числа степеней свободы большей дисперсии  $f_2 = N - k - 1 = 15 - 3 - 1 = 11$  и числа степеней свободы меньшей дисперсии  $f_1 = k = 3$ , равно  $F_{\text{табл.}} = 3,59$ .

11. Проанализировать полученную кодированную математическую модель (оценить количественную значимость и направленность влияния факторов на параметр оптимизации).

12. Перейти от кодированной к натуральной математической модели рецептуры пищевого биопродукта. Для этого в полученное кодированное уравнение необходимо подставить натуральные значения факторов:

$$X_i = \frac{\dot{X}_i - \dot{X}_{i0}}{\Delta \dot{X}_{i0}}.$$

13. Отыскать (рассчитать) оптимальные значения факторов (компонентов) рецептуры как координаты экстремальной точки поверхности отклика (определить производные модели по каждой переменной, приравнять их к нулю и решить систему уравнений):

$$\frac{dy}{dx1} = 0;$$

$$\frac{dy}{dx1} = 0;$$

$$\frac{dy}{dx1} = 0.$$

14. Представить модель в геометрическом пространстве (сделать график модели) и найти координаты точки экстремума данной модели на геометрической поверхности отклика.

15. Сделать вывод по полученным результатам работы.

## 6.2 СПРАВОЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

В экспериментах по обоснованию рецептуры пищевого продукта (БАД к пище, функционального продукта, специализированного питания и др.) наиболее часто востребовано моделирование и оптимизация поликомпонентной рецептуры. Рекомендуется в данном случае ограничиться выбором только трех пищевых компонентов, наиболее важных для пищевой ценности продукта, а остальные зафиксировать в ходе экспериментов на одном количественном уровне, предварительно обосновав их дозировки.

Рассмотрим моделирование и оптимизацию рецептуры на примере ОЦКП второго порядка для трех факторов (варьируется только три компонента).

Основной справочно-теоретический материал приведен в п 5.2.

Общее число  $N$  опытов ОЦКП второго порядка для трех факторов определяется по выражению:

$$N = 2^k + 2k + n_0 = 15,$$

где  $n_0$  – количество экспериментов в «нулевой» точке в центре плана.

Величину «звездного» плеча  $\alpha$ , ядро плана, число дополнительных опытов  $m_0$  в центре плана для ОЦКП второго порядка для трех факторов выбираем из табл. 5.3 (соответственно равны 1, 2<sup>3</sup> и 7).

Матрица, план эксперимента, результаты для расчета модели, частные и обобщенный параметр оптимизации приведены в табл. 6.2

Таблица 6.2 – Матрица ортогонального центрального композиционного плана (ОЦКП) второго порядка для трех факторов (N=15; k=3; n<sub>0</sub>=1)

Содержание плана	Номер опыта	X <sub>0</sub>	План эксперимента в кодированном виде			Данные для расчета математической модели в кодированном виде						Частные отклики		Обобщенный параметр оптимизации Y
			X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>1</sub> X <sub>2</sub>	X <sub>2</sub> X <sub>3</sub>	X <sub>1</sub> X <sub>3</sub>	X <sub>1</sub> <sup>2</sup> - 0,73	X <sub>2</sub> <sup>2</sup> - 0,73	X <sub>3</sub> <sup>2</sup> - 0,73	Y <sub>1</sub>	Y <sub>2</sub>	
План 2 <sup>3</sup>	1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+0,27	+0,27	+0,27	Заполняются по мере выполнения	Заполняются по мере выполнения	Y <sub>1</sub>
	2	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	+0,27	+0,27	+0,27			Y <sub>2</sub>
	3	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	+0,27	+0,27	+0,27			Y <sub>3</sub>
	4	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+0,27	+0,27	+0,27			Y <sub>4</sub>
	5	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+0,27	+0,27	+0,27			Y <sub>5</sub>
	6	+1	-1	+1	-1	-1	-1	+1	+0,27	+0,27	+0,27			Y <sub>6</sub>
	7	+1	+1	-1	-1	-1	+1	-1	+0,27	+0,27	+0,27			Y <sub>7</sub>
	8	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+0,27	+0,27	+0,27			Y <sub>8</sub>
«Звездная» точка с плечом α=1,21 5 2k=6	9	+1	+1,215	0	0	0	0	0	+0,746	-0,73	-0,73	экспериментальными значениями	экспериментальными значениями	Y <sub>9</sub>
	10	+1	-1,215	0	0	0	0	0	+0,746	-0,73	-0,73			Y <sub>10</sub>
	11	+1	0	+1,215	0	0	0	0	-0,73	+0,746	-0,73			Y <sub>11</sub>
	12	+1	0	-1,215	0	0	0	0	-0,73	+0,746	-0,73			Y <sub>12</sub>
	13	+1	0	0	+1,215	0	0	0	-0,73	-0,73	+0,746			Y <sub>13</sub>
Нулевая n <sub>0</sub> =1	14	+1	0	0	-1,215	0	0	0	-0,73	-0,73	+0,746	критериями	критериями	Y <sub>14</sub>
	15	+1	0	0	0	0	0	0	-0,73	-0,73	-0,73			Y <sub>15</sub>
Суммы для расчетов коэффициентов в кодированном виде		15	10,9524	10,9524	10,9524	8	8	8	3,8338	3,8338	3,8338			

Обработка результатов эксперимента, проверка на адекватность модели, отыскание оптимальных значений факторов, геометрическая аппроксимация и анализ модели проводится так же, как и при реализации плана второго порядка для 2-х факторов (см. лабораторную работу № 5).

**Математическая модель в соответствии с ОЦКП второго порядка для трех факторов** имеет следующий конкретный вид:

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_{12}X_1X_2 + b_{13}X_1X_3 + b_{23}X_2X_3 + b_{11} (X_1^2 - 0,73) + b_{22} (X_2^2 - 0,73) + b_{33} (X_3^2 - 0,73).$$

**Основные формулы для коэффициентов модели**, построенной по ОЦКП второго порядка для трех факторов, имеют следующий конкретный вид:

*Свободный член:*

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^{15} X_{0i} Y_i}{\sum_{i=1}^{15} X_{0i}^2}, \quad \text{где } \sum_{i=1}^{15} X_{0i}^2 = N = 15; \quad (6.1)$$

$$b_0 = \hat{b}_0 - b_{11}X_1^2 - b_{22}X_2^2 - b_{33}X_3^2. \quad (6.2)$$

*Коэффициенты линейной части модели:*

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{15} X_1 Y_i}{\sum_{i=1}^{15} X_1^2}, \text{ где } \sum_{i=1}^{15} X_1^2 = 10,9524; \quad (6.3)$$

$$b_2 = \frac{\sum_{i=1}^{15} X_2 Y_i}{\sum_{i=1}^{15} X_2^2}, \text{ где } \sum_{i=1}^{15} X_2^2 = 10,9524; \quad (6.4)$$

$$b_3 = \frac{\sum_{i=1}^{15} X_3 Y_i}{\sum_{i=1}^{15} X_3^2}, \text{ где } \sum_{i=1}^{15} X_3^2 = 10,9524. \quad (6.5)$$

*Коэффициенты при переменных, образованных сочетанием факторов:*

$$b_{12} = \frac{\sum_{i=1}^{15} X_1 X_2 Y_i}{\sum_{i=1}^{15} (X_1 X_2)^2}, \text{ где } \sum_{i=1}^{15} (X_1 X_2)^2 = 8; \quad (6.6)$$

$$b_{13} = \frac{\sum_{i=1}^{15} X_1 X_3 Y_i}{\sum_{i=1}^{15} (X_1 X_3)^2}, \text{ где } \sum_{i=1}^{15} (X_1 X_3)^2 = 8; \quad (6.7)$$

$$b_{23} = \frac{\sum_{i=1}^{15} X_2 X_3 Y_i}{\sum_{i=1}^{15} (X_2 X_3)^2}, \text{ где } \sum_{i=1}^{15} (X_2 X_3)^2 = 8. \quad (6.8)$$

*Коэффициенты при переменных второго порядка:*

$$b_{11} = \frac{\sum_{i=1}^{15} (X_1^2 - 0,73) Y_i}{\sum_{i=1}^{15} (X_1^2 - 0,73)^2}, \text{ где } \sum_{i=1}^{15} (X_1^2 - 0,73)^2 = 3,8338; \quad (6.9)$$

$$b_{22} = \frac{\sum_{i=1}^{15} (X_2^2 - \frac{2}{3}) Y_i}{\sum_{i=1}^{15} (X_2^2 - \frac{2}{3})^2}, \text{ где } \sum_{i=1}^{15} (X_2^2 - 0,73)^2 = 3,8338; \quad (6.10)$$

$$b_{33} = \frac{\sum_{i=1}^{15} (X_3^2 - 0,73) Y_i}{\sum_{i=1}^{15} (X_3^2 - 0,73)^2}, \text{ где } \sum_{i=1}^{15} (X_3^2 - 0,73)^2 = 3,83382. \quad (6.11)$$

### 6.3 ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Таблица 6.4 – Исходные данные для планирования эксперимента и оптимизации рецептуры пищевого биопродукта

№ п/п	Пищевой биопродукт (БАД к пище, функциональный пищевой продукт)	Факторы (компоненты рецептуры, % массы рецептуры)									Частные параметры оптимизации (показатели качества)				Обобщ. параметр оптимизации У	
		X <sub>1</sub>			X <sub>2</sub>			X <sub>3</sub>			У <sub>1</sub>	идеальное значение У <sub>10</sub>	У <sub>2</sub>	идеальное значение У <sub>20</sub>		
1	2	3			4			5			6	7	8	9	10	
1	Хлеб на основе ржаного бездрожжевого обогащенного теста	Отруби ржаные			Ламинария			Яблоки сушеные			Органо- оценка, баллы	5 бал- лов	Содер- жание вита- мина С	70 мг/ 100 г		
		-1	0	+1	-1	0	+1	-1	0	+1	Эксп. данные					Эксп. данные
		2	3	4	1	2	3	2	4	6						
2	Творожная мас- са, обогащенная фитокомпонен- тами	Ламинария сушеная			Черника сушеная			Мята сушеная			Орга- нол. оценка, баллы	5 бал- лов	Содер- жание вита- мина С	70 мг/ 100 г		
		-1	0	+1	-1	0	+1	-1	0	+1	Эксп. данные					Эксп. данные
		1	2	3	2	3	4	1	2	3						
3	Колбаса вареная, обогащенная функциональ- ными компонен- тами	Сушеный чернослив			Хитозан			Коллагеновая добавка			Орга- нол. оценка, баллы	5 бал- бал- лов	Содер- жание пище- вых во- локон	2 г/ 100 г		
		-1	0	+1	-1	0	+1	-1	0	+1	Эксп. данные					Эксп. данные
		0,2	0,3	0,4	0,2	0,4	0,6	2	4	6						
4	Рыбные пресер- вы, обогащен- ные БАВ-ми	Черноплодная рябина			Свекольный сок			Помела сушеная			Орга- нол. оценка, баллы	5 бал- бал- лов	Содер- жание вита- мина С	70 мг/ 100 г		
		-1	0	+1	-1	0	+1	-1	0	+1	Эксп. данные					Эксп. данные
		0,5	1,0	1,5	0,7	1,3	1,9	1,2	1,8	2,4						

1	2	3			4			5			6	7	8	9	10
5	БАД для спортивного питания	Активные пептиды			Пчелиная пыльца			L-карнитин			Органо-оценка, баллы	5 бал-бал-лов	Содержание белка	40 г/100 г	
		-1	0	+1	-1	0	+1	-1	0	+1	Эксп. данные		Эксп. данные		
		2	3	4	20	25	30	3	4	5					
6	Спред бутербродный обогащенный БАВ-ми	Лецитин			Каротин			ПНЖК			Органо-оценка, баллы	5 бал-бал-лов	Содержание жира	80 г/100 г	
		-1	0	+1	-1	0	+1	-1	0	+1	Эксп. данные		Эксп. данные		
		2	3	4	3	4	5	4	6	8					
7	Сбор трав урологического действия	Иван-чай сушеный			Сенна сушеная			Плоды шиповника сушеные			Органо-оценка, баллы	5 бал-бал-лов	Содержание витамина С	150 мг/100 г	
		-1	0	+1	-1	0	+1	-1	0	+1	Эксп. данные		Эксп. данные		
		30	33	36	20	24	28	4	6	8					
8	БАД сердечно-сосудистого действия	Плоды боярышника			Валериана			Мелисса			Органо-оценка, баллы	5 бал-бал-лов	Содержание витамина С	150 мг/100 г	
		-1	0	+1	-1	0	+1	-1	0	+1	Эксп. данные		Эксп. данные		
		20	30	40	10	20	30	2	4	6					
9	БАД хондропротекторного действия	Мумие			Хондроитинсульфат			Глюкозамин			Эффект оздоровления	100%	Содержание сульфат-иона	20 мг/100 г	
		-1	0	+1	-1	0	+1	-1	0	+1	Эксп. данные		Эксп. данные		
		20	30	40	20	25	30	10	15	20					

Продолжение табл. 6.3

1	2	3			4			5			6	7	8	9	10
10	БАД успокаивающего действия	Мелисса			Пустырник			Валериана			Органо-оценка, баллы	5 бал-бал-лов	Содержание витамина С	100 мг/100 г	
		-1	0	+1	-1	0	+1	-1	0	+1	Эксп. данные				
		10	14	18	5	7	9	20	30	40					
11	БАД тонизирующего действия	Родиола розовая			Женшень			Мед			Органо-оценка, баллы	5 бал-бал-лов	Содержание витамина С	100 мг/100 г	
		-1	0	+1	-1	0	+1	-1	0	+1	Эксп. данные				
		4	6	8	3	7,5	12	20	30	40					
12	БАД, поддерживающий функцию иммунной системы	Сухая кровь марала			Дрожжи			Витамин А			Органо-оценка, баллы	5 бал-бал-лов	Эффективность	100 %	
		-1	0	+1	-1	0	+1	-1	0	+1	Эксп. данные				
		30	40	50	20	25	30	5	7	9					
13	БАД антиоксидантного действия	Пыльца цветочная			Маточное молочко			Янтарная кислота			Органо-оценка, баллы	5 бал-бал-лов	Эффективность	100%	
		-1	0	+1	-1	0	+1	-1	0	+1	Эксп. данные				
		20	30	40	40	45	50	10	15	20					
14	БАД, улучшающий пищеварение	Сок сельдерея			Плоды барбариса			Чай зеленый			Органо-оценка, баллы	5 бал-бал-лов	Эффективность	100%	
		-1	0	+1	-1	0	+1	-1	0	+1	Эксп. данные				
		10	15	20	15	20	25	20	25	30					

1	2	3			4			5			6	7	8	9	10	
15	БАД, регулирующая аппетит	Дудник китайский			Целлюлоза			Зерно ячменя			Органо- л. оценка, баллы	5 бал- бал- лов	Содер- жание вита- мина С	70 мг/100 г		
		-1	0	+1	-1	0	+1	-1	0	+1	Эксп. данные					Эксп. данные
		2	3	4	10	15	20	30	35	40						
16	Биокрипсы фруктово- овощные	Морковь			Капуста			Яблоки			Органо- л. оценка, баллы	5 бал- бал- лов	Содер- жание вита- мина С	70 мг/ 100 г		
		-1	0	+1	-1	0	+1	-1	0	+1	Эксп. данные					Эксп. данные
		20	30	40	10	20	30	20	25	30						
17	Мармелад фрук- тово-ягодный функциональ- ный	Мякоть алычи			Ягоды черноплod- ной рябины			хитозан			Органо- л. оценка, баллы	5 бал- бал- лов	Содер- жание вита- мина С	70 мг/ 100 г		
		-1	0	+1	-1	0	+1	-1	0	+1	Эксп. данные					Эксп. данные
		20	30	40	10	20	30	2	4	6						
18	Галеты пони- женной кало- рийности	Отруби ржаные			Ламинария			Цельная ржаная мука			Органо- л. оценка, баллы	5 бал- бал- лов	Содер- жание целлю- лозы	10 г/ 100 г		
		-1	0	+1	-1	0	+1	-1	0	+1	Эксп. данные					Эксп. данные
		2	3	4	1	2	3	20	40	60						
19	Плавленый сыр повышенной биологической ценности	Сушеные грибы			Ламинария сушеная			Кожа рыб			Органо- л. оценка, баллы	5 бал- бал- лов	Содер- жание йода	150 мкг/100 г		
		-1	0	+1	-1	0	+1	-1	0	+1	Эксп. данные					Эксп. данные
		2	3	4	1	2	3	2	4	6						

Окончание табл. 6.3

1	2	3			4			5			6	7	8	9	10
20	Ацидофильное мороженое функциональное	Сок облепихи			Ацидофильная закваска			Мед с пергой			Орга- нол. оценка, баллы	5 бал- бал- лов	Содер- жание вита- мина С	70 мг/ 100 г	
		2	3	4	1	2	3	2	4	6					

## Литература

1. Мезенова, О. Я. Проектирование поликомпонентных пищевых продуктов: учеб. пособие / О. Я. Мезенова. – Санкт-Петербург: Изд-во «Перспектива науки», 2015. – 224 с.
2. Мезенова, О. Я. Проектирование поликомпонентных пищевых продуктов: учеб. пособие / О. Я. Мезенова. – Калининград: Изд-во ФГБОУ ВПО «КГТУ», 2015. – 216 с.
3. Блинова, Е. И. Планирование и организация эксперимента / Е. И. Блинова. – Минск: БПТУ, 2010. – 234 с.
4. Макаричев, Ю. А. Методы планирование эксперимента и обработки данных: учеб. пособие / Ю. А. Макаричев, Ю. Н. Иванников. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2016. – 131 с.
5. Реброва, И. А. Планирование эксперимента: учеб. пособие / И. А. Реброва. – Омск: СибАДИ, 2010. – 105 с.

## Вопросы для самопроверки

1. Какой формулой наиболее часто описывается модель рецептуры поликомпонентного пищевого продукта?
2. Какие факторы рационально оптимизировать при моделировании рецептуры биологически активных добавок к пище, функциональных и обогащенных пищевых продуктов?
3. Какие частные отклики рекомендуется использовать при моделировании рецептуры пищевого биопродукта? По какому принципу выбираются частные отклики и их «идеалы»?
4. Охарактеризуйте методологию построения математической модели второго порядка для трех факторов с применением ОЦКП второго порядка для трех факторов.
5. Как рассчитываются коэффициенты математической модели по результатам экспериментов?
6. Как проверяется значимость коэффициентов?
7. Какую информацию несет кодированная математическая модель рецептуры продукта?
8. Какую можно использовать натуральную математическую модель рецептуры продукта?
9. Какие существуют способы отыскания оптимальных значений факторов?
10. Какую информацию несет графическая интерпретация математической модели?

Учебное издание

Ольга Яковлевна Мезенова  
Наталья Юрьевна Мезенова

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
В ПИЩЕВОЙ БИОТЕХНОЛОГИИ

*Редактор Е. Билко*

Подписано в печать 19.03.2021 г. Формат 60x84. Уч.-изд. л. 5,6. Печ. л. 6,4.

Тираж 50 экз. Заказ 20.

Издательство федерального государственного бюджетного образовательного учреждения  
высшего образования «Калининградский государственный технический университет»,  
236022, Калининград, Советский проспект, 1